

# Còniques i quàdriques projectives (esborrany)

JOACHIM KOCK

Versió 19/12/2013

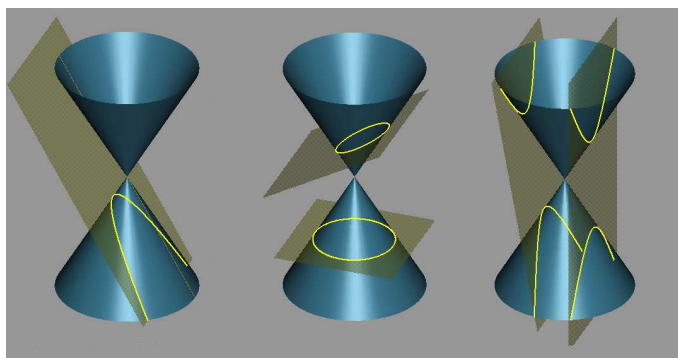
## Continguts

|   |                                             |    |
|---|---------------------------------------------|----|
| 1 | Còniques i quàdriques                       | 1  |
| 2 | Quàdriques projectives                      | 4  |
| 3 | Equivalència projectiva de quàdriques       | 7  |
| 4 | Classificació de formes quadràtiques        | 9  |
| 5 | Classificació de les quàdriques projectives | 12 |

## 1 Còniques i quàdriques

**1.1 Còniques.** Les còniques són: les *hipèrboles*, les *paràboles* i les *el·lipses* (que inclouen els cercles). Algebraicament, són les corbes de grau 2 — és a dir, corbes planes definides com a lloc de zeros de polinomis quadràtics en dues variables. Aquesta caracterització lleva a considerar també casos degenerats com *par-de-rectes*, possiblement coincidents, i alguns altres casos.

L'origen de la paraula “cònica” és “secció cònica”, o “secció cònica plana”: són les figures que apareixen quan un pla talla un con:



Dependent de la posició del pla relativament al con veiem els diferents tipus de cònica, i movent continuadament el pla es veu la transició entre ells. Si el pla passa per l'àpex del con, s'obté en general un parell de rectes, i si a més el pla és tangent al con, s'obté només una recta. El fet que les còniques són interseccions d'un con per un hiperplà suggereix

que són només perspectives diferents d'un sol tipus d'objecte, i indica que la geometria projectiva és rellevant per al seu estudi.

**1.2 Definició provisional de cònica afí (a  $\mathbb{R}^2$ ).** Un polinomi quadràtic en dues variables  $x_1, x_2$  és una expressió

$$q(x_1, x_2) = \underbrace{a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2}_{\text{part quadràtica}} + \underbrace{2b_1 x_1 + 2b_2 x_2}_{\text{part lineal}} + \underbrace{c}_{\text{part constant}},$$

on  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$  són nombres reals. (Els factors 2 no tenen importància. Hi són només per deixar més simple la representació matricial més avall.)

La idea és que *cònica de  $\mathbb{R}^2$*  deu significar *conjunt de zeros a  $\mathbb{R}^2$  d'un polinomi quadràtic no nul*. Però, per vàries raons això no seria completament satisfactori:

**1.3 Alguns problemes amb la primera definició.** Segons la definició, admitim com a polinomi quadràtic l'expressió 7. Clarament, el conjunt dels zeros de 7 és buit. Volem realment incloure aquest cas? Altres exemples de còniques buides són

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + 5.$$

Com que aquestes expressions són sempre estrictament positives, els conjunts dels zeros són buits. Però aquí el problema és diferent. De fet els dos polinomis tenen zeros complexes: les còniques són dos cercles imaginaris (de radis diferents). No hauríem de considerar-les iguals, només perquè tenen conjunts de zeros (reals) coincidents.

Un altre problema apareix amb còniques no nul·les, com ara

$$2x_1 \quad \text{i} \quad x_1^2.$$

Clarament tenen el mateix conjunt de zeros, a saber l'eix  $x_2$ . De nou, podem pensar que el polinomi  $2x_1$  potser que no mereix ser anomenada cònica.

Simplement excloure els polinomis de grau menor que 2 és una possibilitat, i en molts llibres es fa això. Però aquesta convenció no sempre és elegant. Per exemple, en famílies de còniques, com ara

$$x_2 - tx_1^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

apareix naturalment polinomis de grau menor que 2. En aquest exemple particular, per

a  $t \neq 0$  tenim diferents paràboles, però per a  $t = 0$  tenim només el polinomi  $x_2$ , amb lloc de zeros una recta.

Acabem acceptant les còniques de grau menor que 2. Les anomenem de *còniques defectives*.

**1.4 L'espai de totes les còniques.** Com que no admitem el polinomi zero, i com que multiplicació per un escalar  $\lambda \neq 0$  no canvia el lloc dels zeros, veiem que naturalment

*El conjunt de totes les còniques formen un espai projectiu  $\mathbb{P}^5$  amb coordenades projectives  $[c : b_1 : b_2 : a_{11} : a_{12} : a_{22}]$ .*

Aquesta observació és molt important, però està en lleugera contradicció amb la idea original, on cònica va significar l'objecte geomètric dels zeros. La idea que les còniques formen un espai projectiu  $\mathbb{P}^5$  és més important que la idea original. Per tant definim ara

*Una cònica és un polinomi quadràtic no-nul (en dues variables) llevat un factor constant no-nul.*

Així, per definició, les còniques formen un espai projectiu  $\mathbb{P}^5$ .

**1.5 Exemple.** Les tres còniques

$$7 \quad , \quad x_1^2 + x_2^2 + 1 \quad \text{ i } \quad x_1^2 + x_2^2 + 5$$

són còniques diferents: cap d'elles és múltiple de cap altra, i per tant són punts diferents del  $\mathbb{P}^5$  esmentat. No obstant això, totes tres tenen conjunt de zeros buit.

La primera cònica continua buida si passem als nombres complexos, mentre que les altres són cercles imaginaris. En canvi, els dos cercles continuen buits si passem al pla projectiu (real), mentre que la primera serà una recta doble a l'infinit (com ho veurem tot seguit).

La primera cònica pot aparèixer en una família de paràboles:

$$-t(x_1^2 - x_2) + 7, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Veurem més endavant que els dos cercles imaginaris mai poden aparèixer en una família de paràboles, per tant geomètricament són de naturalesa diferent. Poden aparèixer en una família amb cercles reals:

$$x_1^2 + x_2^2 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aquí, per a  $t < 0$  tenim cercles reals, per a  $t = 0$  el lloc de zeros es redueix a un punt (que sobre els nombres complexos seria de fet un parell de rectes imaginàries conjugades amb intersecció el punt real  $(0, 0)$ ), i per a  $t > 0$  tenim cercles imaginàries (que inclou els dos casos esmentats).

**1.6 Definició de quàdrica de  $\mathbb{R}^n$ .** Una quàdrica de  $\mathbb{R}^n$  és un polinomi no nul de grau  $< 2$  en les variables  $x_1, \dots, x_n$ , llevat factor constant. Gairebé per definició, les quàdriques de  $\mathbb{R}^n$  formen un espai projectiu. Veurem que és de dimensió  $\binom{n+2}{2} - 1$ .

Exemples de  $\mathbb{R}^3$  són hiperboloides, el·lipsoïdes, paraboloides, cons, cilindres, etc.

DIBUIXOS AMB MAPLE

**1.7 Representació matricial.** Les còniques en general no són varietats lineals. La raó per tractar còniques en una assignatura que es diu *Geometria Lineal* és que hi ha una manera natural de representar les còniques (i quàdriques) per matrius, i després fer servir àlgebra lineal per manipular-les. Observació clau: *el polinomi  $q$  es pot escriure com un producte de matrius*:

$$q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Observeu que vectors com

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

són exactament el tipus de vectors que tractem quan manipulem espais afins en coordenades cartesianes.

La representació matriu funciona igual per a quàdriques de  $\mathbb{R}^n$ : són les matrius simètriques  $(n+1) \times (n+1)$ , llevat un factor constant.

## 2 Quàdriques projectives

**2.1 Còniques projectives.** Un cop que hem representat una cònica per una matriu, i que aquesta matriu diu respecte a vectors de tipus  $(1, x_1, x_2)$ , ja veiem com naturalment

hem d'interpretar el pla afí com una carta afí del pla projectiu. Si al lloc de coordenades  $(1, x_1, x_2)$  fem servir coordenades projectives  $[x_0 : x_1 : x_2]$  llavors la mateixa expressió matricial determina la que per definició és una cònica del pla projectiu, o per simplificar, una cònica projectiva. Observeu que com que tenim  $x_0$  al lloc de 1, el polinomi que defineix una cònica projectiva sempre és homogeni de grau (estrictament igual a) 2. Això és exactament la característica que assegura que la noció de zero d'un polinomi està ben definida en un espai projectiu: de fet, ser homogeni de grau 2 vol dir

$$q([\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2]) = \lambda^2 q([x_0 : x_1 : x_2]).$$

Així, si  $q$  és zero o no en algun punt no depen de l'ambigüitat de les coordenades projectives: si multipliquem les coordenades per un escalar  $\lambda \neq 0$ , llavors el valor de  $q$  serà  $\lambda^2$  cops el valor original, per tant un és igual a zero si i només si l'altre ho és.

Ara veiem amb claredat que el polinomi 1, la cònica buida de  $\mathbb{R}^2$  estudiada abans, s'identifica amb la cònica projectiva  $x_0^2$ , que és una recta doble, exactament la recta doble disjunt de la carta afí. O sigui, en termes del pla afí, és la recta doble a l'infinit.

**2.2 Homogeneïtzació.** El passatge d'una quàdrica afí a la quàdrica projectiva associada és trivial a nivell de matrius: és la mateixa matriu. En termes del polinomi, que en versió afí és en variables  $x_1, \dots, x_n$ , veiem de la expressió matricial que es tracta de “substituir els uns per  $x_0$ ”. Aquí els uns són tots els termes que no ja tenen grau 2. O sigui, cada terme que no tingui grau dos, el multipliquem per un factor  $x_0$  fins a que tingui grau dos. Aquest procés es diu *homogeneïtzació*.

El procés contrari, d'una quàdrica projectiva a un afí (respecte a la carta afí  $x_0 = 1$ ) no és res més que substituir  $x_0 = 1$ . Així obtenim una (hi ha molts altres) bijecció entre quàdriques projectives i quàdriques afins (si admitim com a quàdriques afins les quàdriques defectives).

**2.3 Exemple.** Una cònica (projectiva) és una quàdrica de  $\mathbb{P}^2$ . Per exemple,

$$q(x_0, x_1, x_2) = [x_0 : x_1 : x_2] \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_0x_2$$

és una paràbola.

**2.4 Seccions còniques.** La matriu  $3 \times 3$  que defineix una cònica (afí o projectiva) també es pot interpretar com definint una forma quadràtica de  $\mathbb{R}^3$ . Ja hem observat que aquest polinomi és homogeni de grau 2. Per tant defineix una quàdrica de  $\mathbb{R}^3$ ! Aquesta quàdrica té la perculiaritat que  $(0, 0, 0)$  hi pertany, i que si algun punt  $\vec{v}$  hi pertany, llavors  $\lambda\vec{v}$  també hi pertany. És a dir que és un con! És el con sobre la cònica original  $V(q) \subset \mathbb{A}$ , si considerem  $\mathbb{A} = \{(1, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3\}$ . Finalment veiem que la cònica original és una secció cònica plana!

**2.5 Còniques defectives.** Hem definit cònica defectiva com polinomi de grau menor que 2. En aquest cas l'homogeneïtzació té un factor  $x_0$ . És a dir, conté la recta de l'infinit. Així podem explicar la diferència de

$$2x_1 \quad \text{i} \quad x_1^2.$$

La primera cònica, defectiva, té una recta a l'infinit. L'altra no. L'altra, de fet no té altres zeros que la recta d'equació  $x_1$ . La seva equació és  $x_1$  al quadrat. Diem que és una recta doble.

**2.6 Quàdriques no defectives.** Si una quàdrica no és defectiva, això vol dir que l'hiperplà  $H$  a l'infinit no és un component de  $q$  (és a dir: la funcional  $q$  no s'anul·la idènticament sobre  $H$ ). En termes de la matriu vol dir que la part quadràtica no és zero. Si estem parlant de  $\mathbb{P}^n$ , llavors l'hiperplà  $H$  té equació  $x_0$ . Llavors, la intersecció de  $q$  amb  $H$  és de nou una quàdrica de l'espai projectiu  $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ .

Analitzem el cas de còniques de  $\mathbb{P}^2$ : com que l'hiperplà a l'infinit és només una recta projectiva  $\mathbb{P}^1$ , i com que sabem ara que la intersecció és una quàdrica, ha de consistir en dos punts, un sol punt (que pensem com a dos punts coincidents), o bé pot ser la quàdrica buida de  $\mathbb{P}^1$ . Conclusió: una cònica no defectiva pot tenir dos, un, o cap punt a l'infinit.

EXEMPLE: un el·lipse de  $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$  (coma ara  $x_1^2 + x_2^2 - 1$ ) no té cap punt a l'infinit. Una paràbola (com ara  $2x_2 - x_1^2$ ) té un punt a l'infinit (un punt doble), i una hipèrbola (com per exemple  $x_1^2 - x_2^2 - 1$ ) té dos punts a l'infinit (les direccions asimptòtiques). Així les còniques reals es distingeixen pel nombre de punts d'intersecció amb la recta a l'infinit.

ATENCIÓ: sobre els nombres complexos, l'el·lipse també té dos punts a l'infinit, però són punts imaginaris.

**2.7 Rang (projectiu).** El rang (projectiu) d'una quàdrica és el rang de la matriu que la defineix. Això no depèn de les coordenades escollides perquè un canvi de coordenades

correspon a multiplicar la matriu per una matriu invertible, i això no modifica el rang. Diem que una quàdrica és *pròpia* o *no-degenerada* si té rang (projectiu) maximal.

Exemple: entre les còniques, el·lipse, paràbola, i hipèrbola tenen rang 3 (que és el maximal), per tant són pròpies. Un parell de rectes té rang 2. Una recta doble té rang 1. (Punt i buit, hem vist que de fet són el·lipses imaginàries, es pot calcular que tene rang 3.

**2.8 Còniques pròpies projectives.** El fet que les còniques pròpies són perspectives una de l'altra indica que són projectivament equivalents, i que la seva diferència aparent és només una qüestió de com intercepta la recta a l'infinit. Això és cert:

*projectivament, no hi ha diferència entre els tres tipus de cònica no degenerada.*

Per tant, en la geometria projectiva complexa, l'estudi de les còniques és molt més simple i harmoniós. Comparat a aquest món ideal, l'estudi afí i real implica doncs dues subtilitats addicionals: la relació entre la cònica “ideal” i l'infinit, i la qüestió de la seva “realitat”.

## 3 Equivalència projectiva de quàdriques

**3.1 L'estudi projectiu de les quàdriques.** Volem estudiar les còniques i més generalment les quàdriques des d'un punt de vista projectiva: vol dir que ens interessin les propietats d'elles que són invariants per projectivitats. Evidentment, la primera cosa que hem de veure és que la pròpia noció de quàdrica és una noció projectiva.

El punt clau és el següent lema. Observeu primer que una quàdrica és una funció  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (llevat un constant  $\lambda \neq 0$ ). Si tenim una aplicació projectiva

$$\phi : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$$

i una funció  $\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , en podem definir una funció  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ? No pas naturalment. La construcció natural és la contrària: si tenim una funció  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^m & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^n \\ & & \searrow q \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

llavors tenim de manera completament natural una funció  $\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ : és simplement la composició. Ara tenim

main-lemma

**3.2 Lema.** *Si  $q$  és una quàdrica de  $\mathbb{P}^n$  i si  $\phi : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$  és una aplicació projectiva tal que no tota la imatge està dins de  $V(q)$ , llavors la composició  $q \circ \phi$  és una quàdrica de  $\mathbb{P}^m$ . A més a més tenim*

$$P \in V(q \circ \phi) \Leftrightarrow \phi(P) \in V(q).$$

No és cert en general que la imatge per  $\phi$  d'una quàdrica és una quàdrica. Per exemple una quàdrica de  $\mathbb{P}^1$  consisteix en només dos punts. Si  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  és una aplicació afí, la imatge dels dos punts típicament consistiria de dos punts, però una quàdrica de  $\mathbb{P}^2$  mai és de dos punts (si té dos punts necessàriament en té infinits).

**3.3 Efecte d'una projectivitat sobre una quàdrica.** Si  $q : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és una quàdrica, i si  $\phi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  és una projectivitat, llavors l'acció natural de  $\phi$  sobre  $q$  és de precomposar. Veiem quin és l'efecte sobre la matriu de  $q$ . Sabem que  $\phi$  ve donada per alguna matriu invertible  $M$ . L'acció és d'aplicar aquest matriu *abans* d'aplicar la matriu de  $q$ . Com que  $q$  agafa com a input *dues* còpies del punt  $[x_0 : x_1 : x_2]$  hem de multiplicar per  $M$  a les dues còpies. Al final el resultat serà

$$[x_0 : x_1 : x_2] M^\top \quad Q \quad M \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Per tant, l'efecte d'una projectivitat amb matriu  $M$  sobre una quàdrica de matriu  $Q$  és de fer

$$M^\top Q M$$

Com que aquesta operació apareix tot el temps li donem (temporàriament) un nom: *transpo-conjugació*. Observeu que no apareix cap inversa en l'expressió.

Diem que dues quàdriques són equivalents si la matriu d'una apareix per transpo-conjugació de l'altra per una matriu invertible — o, és clar, si una és un múltiple de l'altra. En altres paraules, declarem dues matrius simètriques  $A$  i  $A'$  equivalents si existeix una

matriu invertible  $M$  i un escalar  $\lambda \neq 0$  tals que

$$\lambda A' = M^\top A M.$$

**3.4 Corol·lari.** *Si dues quàdriques són equivalents llavors tenen el mateix rang.*

El nostre objectiu de moment és classificar les quàdriques (projectives) fins a equivalència (projectiva). La classificació ens permetrà de decidir, donades dues quàdriques, si són equivalents o no, i en particular de trobar un representant canònic en cada classe d'equivalència. Això equival a escullir la base més adequada.

La classificació segueix un procediment purament algebraic. Després veurem interpretacions geomètriques. L'ingredient principal és el teorema d'inèrcia de Sylvester (1852), que resol completament el problema anàleg en àlgebra lineal, que ara passem a explicar.

## 4 Classificació de formes quadràtiques

**4.1 Classificació de formes quadràtiques reals.** Una forma quadràtica de l'espai vectorial  $\mathbb{R}^n$  és una aplicació de la forma

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^\top A x\end{aligned}$$

on  $A$  és una matriu simètrica. Volem doncs classificar matrius simètriques, i declarem dues matrius  $A$  i  $A'$  *congruents* si existeix una matriu invertible  $P$  tal que

$$A' = P^\top A P$$

No hi ha cap condició sobre  $P$ , a més de ser invertible.

El primer pas és el teorema espectral:

**4.2 Teorema. (Teorema espectral per a matrius simètriques (real).)** *Un matriu simètrica (real)  $M$  és diagonalitzable per una matriu ortogonal. És a dir, existeix una matriu ortogonal  $P$  tal que  $M = P^{-1} D P$ , on  $D$  és una matriu diagonal. (Les entrades de  $D$  són els valors propis de  $M$ .)*

El teorema espectral parla de conjugació veritable, però que  $P$  sigui ortogonal vol dir exactament que  $P^\top = P^{-1}$ , per tant podem interpretar el teorema també en termes de transpo-conjugació. Implica que tota matriu simètrica és congruent (en el sentit acabat d'explicar) a una matriu diagonal.

Però, amb matrius no ortogonals podem transformar més. En particular, si les entrades de la diagonal de  $D$  són  $\lambda_i$ , amb els primeres  $s$  entrades positives, i les següents  $r - s$  entrades negatives, i les restants igual a zero, llavors podem multiplicar dels dos costats amb la matriu

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_i} & & \\ & 1/\sqrt{-\lambda_i} & \\ & & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

(on cada entrada representa una matriu diagonal) i obtenir

$$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

El nombre  $r$  es el *rang* de  $Q$ . El nombre  $s$  s'anomena la *signatura* de  $Q$  i es pot caracteritzar com el nombre de valors propis positius.

El teorema d'inèrcia de Sylvester diu que ara no podem reduir més, i que aquests dos nombres són invariants complets del problema de classificació de matrius simètriques:

**4.3 Teorema. (Teorema d'inèrcia de Sylvester.)** *Dues matrius simètriques són congruents si i només si tenen el mateix rang i la mateixa signatura.*

En altres paraules, qualsevol matriu simètrica és congruent a una matriu diagonal

$$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

i aquesta matriu és única, si exigim que les entrades positives venen abans de les negatives a la diagonal, i els zero a la fi.

**4.4 Consideracions computacionals.** Invocar el teorema espectral per a garantir l'existència de la forma diagonal és convenient ja que coneixem aquest teorema. Però no és

gaire econòmic, perquè per diagonalitzar ortogonalment una matriu hem de calcular valors propis i vector propis, la qual tasca té una certa complexitat algebraica – en particular involucra resoldre equacions en  $n$  variables.

En la pràctica podem estalviar feina, perquè tenim dret a utilitzar matrius no ortogonals, i és possible arribar a la forma diagonal sense calcular cap valor propi. El procediment és el següent. Cada entrada no nula a la diagonal la podem fer servir com a pivot per fer operacions de files i columnes i obtenir zero en les altres entrades de la seva columna i fila.

Suposem per exemple que la entrada  $m_{11}$  és no nula. Fem operacions de files per aconseguir zeros a les altres entrades de la columna. Fer totes aquestes operacions de files equival a multiplicar per l'esquerra per una matriu  $E_1^\top$  que fora de la diagonal de uns té només entrades no nul·les a la primera columna. (Aquesta matriu no és ortogonal.) Ara és fàcil veure que en la matriu  $E_1^\top \cdot M \cdot E_1$  la entrada  $m_{11}$  és la única de la primera columna i de la primera fila diferent de zero. Continuem així amb les altres entrades no nul·les de la diagonal.

Aquesta tècnica no és sempre suficient, perquè no serveix en la situació on la matriu conté un menor de tipus  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ . En aquest cas tornem al punt de vista del teorema espectral, interpretant aquesta petita matriu com una transformació lineal de  $\mathbb{R}^2$ . Clarament aquesta transformació intercanvia els dos eixos; és a dir, és una reflexió ortogonal de la recta  $x = y$  (seguida d'una homotècia de raó  $b$ ). Aixó vol dir que per diagonalitzar cal conjuguar per una rotació de  $\pi/4$ , és a dir conjuguar o transpo-conjuguar amb

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Un càlcul directe mostra que

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Així podem aconseguir la forma diagonal.

(Per evitar funcions trigonomètriques es pot argumentar també observant que una reflexió ortogonal en la recta  $x = y$  té vectors propis  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Per tant podríem també fer transpo-conjugació per  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . El resultat seria  $\begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}$  al lloc de  $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ .)

#### 4.5 Exemple. Segui

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Volem pivotar a la primera entrada. Això vol dir restar tres cops la primera fila de la segona, i restar dos cops la primera fila de la tercera. Això vol dir multiplicar de l'esquerre per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que per tant és la nostre  $E_1^\top$  (amb notació com abans). Efectuem el producte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara no podem continuar pivotant a la diagonal. Però tenim un menor del tipus “reflexió”, que podem eliminar per transpo-conjugació per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i arribem a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 5 Classificació de les quàdriques projectives

Quan volem classificar quàdriques de  $\mathbb{P}^n$  hem de classificar matrius simètriques  $(n+1) \times (n+1)$  llevat transpo-conjugació i llevat un escalar. El teorema de Sylvester ens diu que tals matrius es classifiquen pel rank  $r$  i per l'índex  $s$ . En el cas projectiu tenim a més el dret de multiplicar per un escalar, que pot ser  $-1$ . Això canvia  $s$  i  $r-s$ . Per tant, si tenim per exemple rang 3, llavors índex 2 és equivalent a índex  $3-2=1$ . Per tant les

quàdriques es classifiquen per rang i per  $\min(s, r - s)$ .

### Classificació de les quàdriques de $\mathbb{P}^1$

| $r$ | $\min(s, r - s)$ | Equació         | Nom                         |
|-----|------------------|-----------------|-----------------------------|
| 2   | 0                | $x_0^2 + x_1^2$ | Buit (dos punts imaginaris) |
| 2   | 1                | $x_0^2 - x_1^2$ | Parell de punts             |
| 1   | 0                | $x_0^2$         | Punt doble                  |

### Classificació de les còniques projectives

| $r$ | $\min(s, r - s)$ | Equació                 | Nom                             |
|-----|------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 3   | 0                | $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ | Buit (cònica pròpia imaginària) |
| 3   | 1                | $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ | Cònica pròpia                   |
| 2   | 0                | $x_0^2 + x_1^2$         | Punt (dues rectes imaginàries)  |
| 2   | 1                | $x_0^2 - x_1^2$         | Parell de rectes                |
| 1   | 0                | $x_0^2$                 | Recta doble                     |

### Classificació de les quàdriques de $\mathbb{P}^3$

| $r$ | $\min(s, r - s)$ | Equació                         | Nom                          |
|-----|------------------|---------------------------------|------------------------------|
| 4   | 0                | $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ | Buit (el·lipsoide imaginari) |
| 4   | 1                | $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ | El·lipsoide                  |
| 4   | 2                | $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ | Hiperboloide                 |
| 3   | 0                | $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$         | Punt (con imaginari)         |
| 3   | 1                | $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$         | Con                          |
| 2   | 0                | $x_0^2 + x_1^2$                 | Recta (dos plans imaginaris) |
| 2   | 1                | $x_0^2 - x_1^2$                 | Parell de plans              |
| 1   | 0                | $x_0^2$                         | Pla doble                    |