

Apunts de còniques i quàdriques (esborrany)

JOACHIM KOCK

Versió 17/12/2011

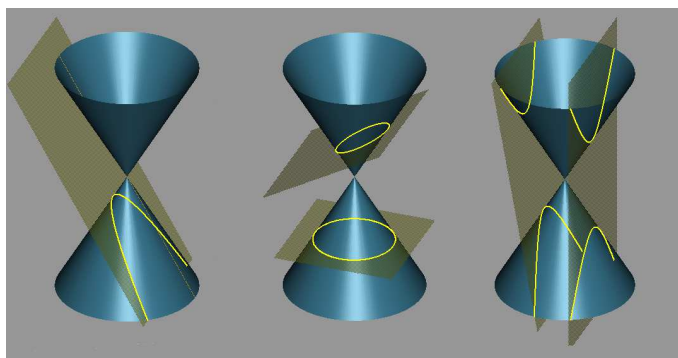
Continguts

1	Còniques i quàdriques — introducció i primera definició	1
2	Repàs de formes bilineals i formes quadràtiques	6
3	Funcional biafi i quàdriques	11
4	Funcional polar: centre, varietat tangent	18
5	Cons i cilindres	23
6	Classificació afí de les quàdriques	29

1 Còniques i quàdriques — introducció i primera definició

1.1 Còniques. Les còniques són: les *hipèrboles*, les *paràboles* i les *el·lipses* (que inclouen els cercles). Algebraicament, són les corbes de grau 2 — és a dir, corbes planes definides com zeros de polinomis quadràtics en dues variables — tal caracterització porta a considerar també casos degenerats com *par-de-rectes* (possiblement coincidents) i fins i tot *punt* o *buit*.

L'origen de la paraula “cònica” és “secció cònica”, o “secció cònica plana”: són les figures que apareixen quan un pla talla un con:



Dependent de la posició del pla relativament al con veiem els diferents tipus de cònica, i movent continuadament el pla es veu la transició entre ells. Si el pla passa per l'àpex del

con, s'obté en general un parell de rectes, i si a més el pla és tangent al con, s'obté només una recta. Finalment és possible que el pla talla el con només a l'àpex, en el qual cas la cònica es redueix a un punt.

1.2 Exemples de còniques. El primer exemple és un cercle a $\mathbb{R}^2$:

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Però la noció de cercle no és una noció afí: depèn de la mètrica euclidiana. Se apliquem una homologia general a un cercle el resultat serà una el·lipse.

El segon exemple és una paràbola:

DIBUIX

El tercer exemples una hipèrbola:

DIBUIX

Les còniques són figures geomètriques molt importants: l'el·lipse és la figura descrita per l'òrbita d'una planeta, la hipèrbola l'òrbita d'una cometa (no periòdica), i la paràbola l'òrbita d'una pilota de futbol a l'aire.

Plantegem la qüestió: existeix una afinitat que transforma una paràbola en una hipèrbola? La resposta és no: tenen propietats afins diferents: per exemple, per a una hipèrbola existeix un punt tal que la reflexió central en aquest punt deixa la hipèrbola invariant. Per a una paràbola no existeix tal punt. Com que aquesta propietat ha de ser conservada per afinitats, concloem que “hipèrbola” i “paràbola” són nocions afiment diferents.

És clar que còniques en general no són varietats lineals. La raó per tractar còniques en una assignatura que es diu *Geometria Lineal* és que hi ha una manera de representar quàdriques per matrius, i després fer servir àlgebra lineal per manipular-les. Més precisament, quàdriques són donades per aplicacions *biafins*.

1.3 Definició provisional de cònica (a $\mathbb{R}^2$). Un polinomi quadràtic en dues variables x, y és una expressió

$$q(x, y) = \underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{\text{part quadràtica}} + \underbrace{dx + ey}_{\text{part lineal}} + \underbrace{f}_{\text{part constant}}.$$

Definim *cònica de* $\mathbb{R}^2$ com conjunt de zeros a $\mathbb{R}^2$ d'un polinomi quadràtic no nul.

Observació clau: el polinomi q es pot escriure com un producte de matrius:

$$q(x, y) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x & y \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f & d/2 & e/2 \\ \hline d/2 & a & b/2 \\ \hline e/2 & b/2 & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}$$

El mitjos apareixen perquè volem que la matriu sigui simètrica. Observeu que vectors com

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

són exactament el tipus de vectors que tractem quan manipulem espais afins en coordenades cartesianes.

La forma matricial d'un polinomi quadràtic serà la important. Per tant, ajustem la notació per facilitar el càlculs. De qualsevol manera, els coeficients són arbitraris. És millor escriure'ls sense els factors $\frac{1}{2}$. Aprofitem per adoptar també una convenció millor per a les variables: fem servir (x_1, x_2) en lloc de (x, y) , per facilitar generalització a dimensió superior, i per tenir una correspondència natural entre els índexs de les variables i els índexs dels coeficients. Per tant, qualsevol polinomi quadràtic és de la forma

$$q(x_1, x_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & b_1 & b_2 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} \\ \hline b_2 & a_{12} & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_i b_i x_i + c$$

Observeu que el factor 2 dona compte del fet que els termes b_i apareixen dues vegades en la matriu, mentre que la repetició en la primera suma (el monomi $x_1 x_2$ apareix tant com $x_1 x_2$ com com $x_2 x_1$) correspon a la simetria de la matriu $A = (a_{ij})$.

1.4 Exemple. És interessant considerar quàdriques de $\mathbb{R}^1$: en termes elementals, sabem que les quàdriques són de la forma $ax^2 + bx + c$, i que normalment el lloc dels zeros consisteix en dos punts, les dues arrels — a condició que el discriminant, $b^2 - 4ac$, sigui

positiu! Escrivim l'equació de forma matricial, després de canviar el coeficient b per $2b$:

$$(1 \ x) \begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Ara el discriminant és $4b^2 - 4ac$. Per tant, excepte d'un factor 4, no és res més que el determinant de la matriu! Quan és zero, la quàdrica degenera en un punt “doble”. Això és un fenomen general, i un aspecte important de la notació matricial: l'anul·lació del determinant expressa una degeneració de la quàdrica.

(Aquesta classificació serà important fora de l'assignatura: en el càlcul la farem servir per determinar si un punt crític és un màxim o un mínim, etc.)

1.5 Una mica de perspectiva. Quan diem “cònica” ens referim a “cònica real afí”, perquè fins ara estem treballant a $\mathbb{R}^2$. Aquest escull d'àmbit implica dues peculiaritats o “defectes”, que esdevenen centrals de l'anàlisi de la situació:

Un defecte és de naturalesa geomètrica: alguns punts “escapen a l'infinit”: ho veiem en el comportament de les còniques no degenerades quan movem el pla que intercepta el con: una el·lipse no té punts a l'infinit, una paràbola en té un, i una hipèrbola en té dos. L'àmbit apropiat per tractar tal fenomen és la *geometria projectiva*, on el pla afí es complementa per una recta a l'infinit, evitant així que punts “escapin”. A més a més, en la geometria projectiva aquesta recta té paper igual a qualsevol altra recta — totes les perspectives possibles són equivalents — i per això, projectivament, no hi ha diferència entre els tres tipus de cònica no degenerada.

L'altre defecte és purament algebraic: ho veiem clarament des del punt de vista de les equacions de les còniques: si a l'equació $x^2 + y^2 = r$ variem r des del valor $r = 1$ fins a $r = -1$, veiem la degeneració molt dràstica d'un cercle que esdevé un sol punt i després desapareix completament. Aquest fenomen s'explica per la no clausura dels nombres reals: de fet una cònica com $x^2 + y^2 = -1$, que és buida sobre els nombres reals, encara té molts punts complexos: és un cercle imaginari.

Per tant, en la geometria projectiva complexa, l'estudi de les còniques és molt més simple i harmoniós. Comparat a aquest món ideal, l'estudi afí i real implica doncs dues subtilitats addicionals: la relació entre la cònica “ideal” i l'infinit, i la qüestió de la seva “realitat”.

1.6 Quàdriques (a $\mathbb{R}^n$). Anàlogament, una *quàdrica* de $\mathbb{R}^n$ serà el lloc de zeros d'un

polinomi no nul de grau 2 en n variables. Es pot representar com a una matriu $n \times n$ simètrica.

Exemples de $\mathbb{R}^3$ són hiperboloides, el·lipsoides, paraboloides, cons, cilindres, etc.

DIBUIXOS AMB MAPLE

1.7 Vers una definició intrínseca de quàdrica. Si ara $\mathbb{A}$ és un espai afí general, voldríem definir la noció de quàdrica intrínsecament, és a dir sense referència a coordenades. La idea és que una quàdrica de $\mathbb{A}$ ha de ser una funció $q : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que per a alguna referència $r : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}$, la funció composta $q \circ r$ és una quàdrica de $\mathbb{R}^n$. Hem de verificar llavors que aquesta definició no depèn de la referència escollida.

Es possible fer així. Preferim un mètode més intrínsec...

1.8 Formes lineals, formes quadràtiques; funcionals afins i funcionals quadràtics.

Important en àlgebra lineal són les formes lineals $F : V \rightarrow \mathbb{R}$. Per exemple, tot subespai vectorial és la intersecció de nuclis de formes lineals. En coordenades, les formes lineals són polinomis homogenis de grau 1.

En la geometria afí, la noció corresponent és la de funcional afí, que és res més que una aplicació afí $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Sabem que tot hiperplà és conjunt de zeros d'un funcional afí, i que tot subespai afí és la intersecció d'hiperplans. En coordenades, els funcionals afins són polinomis de grau ≤ 1 , típicament no homogenis.

Ara passem a grau 2. En àlgebra lineal això vol dir *formes quadràtiques*, on la paraula “forma” refereix a l'homogeneïtat. A la geometria afí, estudiem *funcionals quadràtics*, on la paraula “funcional” indica funcions no necessàriament homogenies.

En àlgebra lineal aprenem (i en farem un petit repàs en breu) que en coordenades, una forma quadràtica es pot escriure com una matriu simètrica, que de fet aquesta matriu defineix una forma bilineal, que la forma quadràtica s'obté a partir de la forma bilineal en duplicant les variables, i que tota forma quadràtica apareix així, de manera única. La noció de forma bilineal és molt natural des del punt de vista de l'àlgebra lineal, i té sentit independentment de coordenades.

Tot això té anàlegs per a la geometria afí: veurem que funcionals quadràtics es poden representar en coordenades mitjançant matrius simètriques (on apareixen una columna i una fila extra per fer compte dels termes no homogenis) i més abstractament podem definir funcionals quadràtics en termes de funcionals biafins, una noció natural i molt bé comportada.

1.9 Funcionals biafins. Un *funcional biafi* és per definició una aplicació $b : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que és afí en cada variable separadament. Un *funcional quadràtic* és una funció $q : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $q(P) = b(P, P)$ per a algun funcional biafi b . Una *quàdrica* és el lloc de zeros d'un funcional quadràtic no nul. Es verifica fàcilment que en coordenades això dona exactament la noció anterior.

2 Repàs de formes bilineals i formes quadràtiques

Intuïtivament, formes quadràtiques són funcions que en coordenades són donades per polinomis homogenis de grau 2. Però és important donar una definició que no depèn de coordenades. Per això, i per veure la relació amb l'àlgebra lineal, definim formes quadràtiques en termes de formes bilineals.

2.1 Formes bilineals. Siguin V_1 i V_2 espais vectorials. Una forma bilineal és una aplicació

$$B : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

que és lineal en cada argument separadament. Vol dir que per a tot vector $\vec{v}_1 \in V_1$, l'aplicació

$$\begin{aligned} V_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v}_2 &\longmapsto B(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \end{aligned}$$

és una forma lineal, i per a tot $\vec{v}_2 \in V_2$, l'aplicació

$$\begin{aligned} V_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v}_1 &\longmapsto B(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \end{aligned}$$

és una forma lineal.

2.2 Exemple. L'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

és una forma bilineal.

2.3 Lema. Si $B : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ és una forma bilineal, i si $\phi_1 : V'_1 \rightarrow V_1$ i $\phi_2 : V'_2 \rightarrow V_2$ són aplicacions lineals, llavors la composició

$$V'_1 \times V'_2 \xrightarrow{\phi_1 \times \phi_2} V_1 \times V_2 \xrightarrow{B} \mathbb{R}$$

és de nou una forma bilineal.

En combinació amb l'exemple anterior obtenim:

2.4 Corol·lari. Donades dues formes lineals, $F_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ i $F_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$, el seu producte

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) &\longmapsto F_1(\vec{v}_1)F_2(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

és una forma bilineal.

2.5 Lema. Si $V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ és bilineal i $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és lineal, llavors la composició

$$V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$$

és bilineal.

2.6 En coordenades. Supposeu que $\dim V = n$ i $\dim V' = n'$, i fixeiu una base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ per a V i una base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_{n'}$ per a V' . Llavors podem definir una matriu $n \times n'$

$$A := (a_{ij}), \quad a_{ij} := B(\vec{e}_i, \vec{e}'_j).$$

Aquesta matriu determina la forma bilineal B , perquè si $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i$ i $\vec{w} = \sum_j w_j \vec{e}'_j$, llavors per linearitat en cada variable,

$$B(\vec{v}, \vec{w}) = B\left(\sum_i v_i \vec{e}_i, \sum_j w_j \vec{e}'_j\right) = \sum_{i,j} v_i B(\vec{e}_i, \vec{e}'_j) w_j = \sum_{i,j} v_i A_{ij} w_j.$$

Si pensem $\vec{v}$ i $\vec{w}$ com vectors columnes podem interpretar l'expressió anterior com un producte de matrius:

$$\boxed{\vec{v}^\top} \quad \boxed{A} \quad \boxed{\vec{w}}$$

Canvi de coordenades és multiplicar A per alguna matriu de cada costat.

2.7 Simetria. Ara considerem formes bilineals en un sol espai vectorial V :

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Una tal forma bilineal es diu *simètrica* si $B(\vec{v}, \vec{w}) = B(\vec{w}, \vec{v})$ per a tots $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Equivalentment, la matriu de B (en qualsevol base) és simètrica.

Si $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ és una forma bilineal simètrica, denotem per $B_{\vec{w}} : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal obtinguda fixant $\vec{w}$ en algun dels arguments, és a dir

$$\begin{aligned} B_{\vec{w}} : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto B(\vec{v}, \vec{w}). \end{aligned}$$

Diem que dues matrius simètriques A i A' són *congruents* si existeix una matriu invertible C tal que

$$A' = C^{\top} A C.$$

Una interpretació d'aquesta condició és que A i A' representen la mateixa forma bilineal simètrica, però en bases diferents, essent C la matriu de canvi de coordenades d'una base a altra.

Arribem ara a la noció de forma quadràtica. Comencem amb alguns exemples:

2.8 Exemple. La típica funció quadràtica és

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto Q(x) = x^2. \end{aligned}$$

L'observació clau és que aquesta funció és un “cas particular” de la forma bilineal simètrica

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy. \end{aligned}$$

La relació fonamental entre Q i B és:

$$Q(x) = B(x, x).$$

Es pot observar també que B és l'única tal forma bilineal simètrica — de fet la recuperem com

$$B(x, y) = \frac{1}{2}Q(x + y) - \frac{1}{2}Q(x) - \frac{1}{2}Q(y).$$

(Per a veure això cal observar que $Q(2x) = 4Q(x)$ i $Q(-x) = Q(x)$.)

2.9 Exemple. Podem generalitzar l'exemple a dimensió arbitrari: considerem la funció quadràtica $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i^2$, i la forma bilineal simètrica $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \sum x_i y_i$, llavors altra vegada

$$Q(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{x}) \quad \text{i} \quad B(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}Q(\vec{x} + \vec{y}) - \frac{1}{2}Q(\vec{x}) - \frac{1}{2}Q(\vec{y}).$$

Guiat per aquests dos exemples, definim:

2.10 Formes quadràtiques. Una *forma quadràtica* en un espai vectorial V és una funció $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $Q(\vec{v}) = B(\vec{v}, \vec{v})$ per a alguna forma bilineal simètrica $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Com als exemples, donada Q , la forma bilineal B , que s'anomena la *polarització* de Q , es pot recuperar com

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}Q(\vec{x} + \vec{y}) - \frac{1}{2}Q(\vec{x}) - \frac{1}{2}Q(\vec{y}). \quad (1) \quad \boxed{\text{polar-lin}}$$

2.11 Lema. Si $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ és una forma quadràtica i $\phi : V' \rightarrow V$ és qualsevol aplicació lineal, llavors la composició

$$V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{Q} \mathbb{R}$$

és una forma quadràtica

Observeu també que si $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ és una forma lineal, llavors el seu quadrat, $\vec{v} \mapsto F(\vec{v})F(\vec{v})$, és una forma quadràtica.

2.12 Restricció a subespais vectorials. Si $W \leq V$ és un subespai vectorial, i $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ és una forma quadràtica, llavors les fórmules anteriors, aplicades a la inclusió $W \hookrightarrow V$ ens dóna una forma quadràtica en W que anomenem la *restricció* de Q a W .

2.13 Ortogonalitat. Una forma quadràtica $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ (amb polarització $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$) defineix una noció d'ortogonalitat: diem que dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són *ortogonals*, i ho denotem $\vec{v} \perp \vec{w}$, quan $B(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Si $S \subset V$ és un conjunt de vectors, posem

$$S^\perp := \{\vec{v} \in V \mid B(\vec{v}, \vec{s}) = 0, \forall \vec{s} \in S\}.$$

Es pot també caracteritzar com $\bigcap_{\vec{s} \in S} \text{Ker}(B_{\vec{s}})$. En particular és un subespai vectorial. Finalment, per a dos conjunts de vectors S, T , escrivim $S \perp T$ quan $\vec{s} \perp \vec{t} \forall \vec{s} \in S, \forall \vec{t} \in T$. Una suma directe $V = W \oplus W'$ es diu que és ortogonal si $W \perp W'$. Ho escrivim $W \oplus^\perp W'$.

2.14 Radical. Definim el *radical* de $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ com $\text{rad}(Q) := V^\perp$.

2.15 Matrius. Donada una base de V , sabem que cada forma bilineal simètrica és donada per una matriu simètrica. Per tant, el mateix és cert per a les formes quadràtiques.

2.16 Bases ortogonals. Una base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ de V es diu que és *ortogonal* quan $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ per a $i \neq j$.

2.17 Lema. Una forma quadràtica $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ sempre admet una base ortogonal. (És a dir, V admet una base ortogonal respecte a Q .)

Demostració. Si $Q = 0$, l'enunciat és evident; sinó, existeix un vector $\vec{e}$ amb $Q(\vec{e}) \neq 0$. Per tant, $B_{\vec{e}} : V \rightarrow \mathbb{R}$ és una forma no degenerada, per tant $\vec{e}^\perp = \text{Ker}(B_{\vec{e}})$ és un hiperplà, i tenim $V = \text{span } \vec{e} \oplus^\perp \vec{e}^\perp$. Concloem per inducció. $\square$

2.18 Corol·lari. Tota forma quadràtica $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ admet una base respecte a la qual

$$Q = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2.$$

És a dir, la seva matriu és

$$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostració. Del lema sabem que podem escollir una base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ tal que (q_{ij}) , la matriu de Q , sigui diagonal. Si $q_{ii} > 0$ (diguem que en tenim s) podem canviar $\vec{e}_i$ per $\vec{e}_i / \sqrt{q_{ii}}$. Si $q_{ii} < 0$ (diguem que en tenim $r - s$), canviem $\vec{e}_i$ per $\vec{e}_i / \sqrt{-q_{ii}}$. En canviant l'ordre dels vectors arribem a la conclusió. $\square$

2.19 Teorema. (Teorema d'inèrcia de Sylvester.) *Per a qualsevol forma quadràtica Q d'un espai vectorial V existeix una base de V respecte a la qual Q té matriu diagonal*

$$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

El nombre r s'anomena el rang de Q . El nombre s s'anomena la signatura de Q .

A més a més, dues formes quadràtiques són congruents si i només si tenen el mateix rang i la mateixa signatura.

Mètode de Gauss (“compleció de quadrats”)

3 Funcional biafí i quàdriques

(Utilitzem la paraula *funcional* per designar aplicacions amb valor en $\mathbb{R}$.)

3.1 Functionals biafins. Siguin $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ espais afins. Un *funcional biafí* de $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ és una aplicació

$$b : \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$$

afí en cada variable. Vol dir que per a tot punt $P \in \mathbb{A}$, l'aplicació $\mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$, $X' \mapsto b(P, X')$ és una aplicació afí, i per a tot $P' \in \mathbb{A}'$, l'aplicació $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto b(X, P')$ és una aplicació afí.

3.2 Exemple. Una forma bilineal (d'un parell de espais vectorials) és un exemple d'un funcional biafí (dels espais afins subjacents). Una funció constant (de dues variables) és un funcional biafí.

3.3 Exemple. L'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto axy + bx + cy + d \end{aligned}$$

és un funcional biafí (per a qualssevol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Els següents lemes són fàcils de provar:

3.4 Lema. Si $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ i $\phi' : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$ són aplicacions afins, llavors el seu producte,

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \times \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, P') &\longmapsto \phi(P)\phi'(P')\end{aligned}$$

és una aplicació biafi.

3.5 Lema. Si $b : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ és biafi, i si $f : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$ i $g : \mathbb{B}' \rightarrow \mathbb{B}$ són aplicacions afins, llavors la composta

$$\mathbb{A}' \times \mathbb{B}' \xrightarrow{f \times g} \mathbb{A} \times \mathbb{B} \xrightarrow{b} \mathbb{R}$$

és biafi.

3.6 La “bidiferencial” d’un funcional biafi. Sigui $b : \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional biafi. Definim una aplicació

$$H : T\mathbb{A} \times T\mathbb{A}' \rightarrow T\mathbb{R}$$

com

$$H(\vec{v}, \vec{w}) := b(P + \vec{v}, P' + \vec{w}) - b(P, P' + \vec{w}) - b(P + \vec{v}, P') + b(P, P').$$

O equivalentment:

$$H(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{P'Q'}) = b(Q, Q') - b(P, Q') - b(Q, P') + b(P, P').$$

3.7 Lema. La fórmula de H depèn només dels vectors, no pas dels punts mencionats. A més a més, H és una forma bilineal.

Demostració. De fet, si barregem les dues versions de la fórmula podem escriure primer,

$$\begin{aligned}H(\vec{v}, \overrightarrow{P'Q'}) &= b(P + \vec{v}, Q') - b(P, Q') - b(P + \vec{v}, P') + b(P, P') \\ &= Db_{Q'}(\vec{v}) - Db_{P'}(\vec{v}).\end{aligned}$$

(Aquí, $b_{X'} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ denota l’aplicació afi obtinguda com $X \mapsto b(X, X')$.) Això mostra que per a P' i Q' fixats, H està bé definit, i mostra també que és lineal en el primer argument. Anàlogament podem escriure

$$\begin{aligned}H(\overrightarrow{PQ}, \vec{w}) &= b(Q, P' + \vec{w}) - b(P, P' + \vec{w}) - b(Q, P') + b(P, P') \\ &= Db_Q(\vec{w}) - Db_P(\vec{w}).\end{aligned}$$

(Aquí, $b_X : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$ denota l'aplicació afí obtinguda com $X' \mapsto b(X, X')$.) Això estableix que per a P i Q fixats, H està bé definit, i que és lineal en el segon argument també.

Observació: el fet que la definició de H no depèn dels punts $P, Q \in \mathbb{A}$ i $P', Q' \in \mathbb{A}'$ es pot demostrar també directament suposant que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, és a dir $S = Q - P + R$, i anàlogament amb els punts de $\mathbb{A}'$. $\square$

Encara no he decidit si el terme “bidiferencial” és justificat. Una alternativa seria *hessiana* (però difereix de la noció habitual de hessiana per un factor 2). Una opció més neutra seria *part quadràtica* però m'agradiria tenir una paraula amb més personalitat per combinar amb “diferencial” d'una aplicació afí, i per a donar una impressió menys coordinatitzada...

3.8 Exemple. Sigui $H : T\mathbb{A} \times T\mathbb{A}' \rightarrow T\mathbb{R}$ una forma bilineal, siguin $F : T\mathbb{A} \rightarrow T\mathbb{R}$ i $F' : T\mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$ formes lineals, i sigui $k \in \mathbb{R}$ un punt (un constant). Llavors per a punts fixats $P_0 \in \mathbb{A}$ i $P'_0 \in \mathbb{A}'$ la fórmula

$$b(P_0 + \vec{v}, P'_0 + \vec{w}) := k + F(\vec{v}) + F'(\vec{w}) + H(\vec{v}, \vec{w})$$

defineix un funcional biafí.

EXPLICAR

HFFk

3.9 Lema. Sigui $b : \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional biafí. Llavors és de la forma de l'exemple anterior. És a dir, per a punts fixats $P_0 \in \mathbb{A}$ i $P'_0 \in \mathbb{A}'$ tenim

$$b(P_0 + \vec{v}, P'_0 + \vec{w}) := k + F(\vec{v}) + F'(\vec{w}) + H(\vec{v}, \vec{w})$$

on H és la bidiferencial de b , i $k := b(P_0, P'_0)$. A més,

$$\begin{aligned} F(\vec{v}) &:= Db_{P'_0}(\vec{v}) \\ F'(\vec{w}) &:= Db_{P_0}(\vec{w}) \end{aligned}$$

amb notació com en el lema anterior. (Per tant, F i F' són formes lineals.)

La verificació és directe.

Funcionals quadràtics

Un funcional biafí simètric $b : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ defineix una aplicació

$$\begin{aligned} q : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto q(P) := b(P, P). \end{aligned}$$

Una aplicació d'aquesta forma es diu *funcional quadràtic*. El funcional biafí b es pot recuperar del funcional quadràtic via la fórmula

$$b(P, P') := 2q\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P'\right) - \frac{1}{2}q(P) - \frac{1}{2}q(P').$$

El funcional biafí b s'anomena la *polarització* de q .

Observeu que la fórmula de polarització és lleugerament diferent de la fórmula del cas lineal (1): l'ajust és necessari perquè només podem fer servir combinacions afins!

Quàdriques

3.10 Discussió. Intuïtivament, una quàdrica ha de ser el conjunt de zeros d'un funcional quadràtic. Però, per dues raons això no seria completament satisfactori. Primer, el conjunt buit apareix com conjunt de zeros de funcionals quadràtics molts distints, com ara $x^2 + y^2 + 1$ o 4 , i no volem identificar aquests dos objectes. (Un motiu és que sobre els nombres complexos, els conjunts de zeros serien distints!) Fins i tot conjunts no buits poden aparèixer de funcionals quadràtics distints, com ara x^2 i x : a $\mathbb{R}^2$, aquests dos funcionals quadràtics ambdós defineixen una recta, però com a “còniques” voldríem distingir-les: una és una “recta doble”, l'altre una cònica “defectiva” (no té realment grau 2). (Un motiu és que projectivament, la segona cònica conté també una recta a l'infinit, el “defecte”.) Per tant, una quàdrica ha de contenir més informació que un conjunt de punts.

En segon lloc, observem que si q és un funcional quadràtic, i $\lambda \in \mathbb{R}$ és diferent de 0, llavors λq és un altre funcional quadràtic que té exactament el mateix conjunt de zeros. Volem considerar aquestes dues quàdriques iguals, perquè geomètricament com també algebraicament tenen les mateixes propietats.

Finalment, és millor excloure el cas del funcional quadràtic constant nul; el seu lloc de zeros seria tot l'espai.

3.11 Definició de quàdrica. Per definició, doncs, una *quàdrica* és un funcional quadràtic llevat un factor constant no nul. El *lloc* d'una quàdrica q és per definició el conjunt dels seus zeros. El denotem $V(q)$.

3.12 Quàdriques defectives. Per definició, una quàdrica és *defectiva* si la seva bidiferencial és zero. En coordenades vol dir que la part quadràtica és zero. Doncs en realitat, el grau és estrictament més petit que 2. Diem que q és irrellevant si és zero.

Perquè incloure en la definició de quàdrica les quàdriques defectives? No són realment quàdriques... Donem tres raons: la primera és que una família de quàdriques naturalment pot contenir una quàdrica defectiva: considerem per exemple la família de còniques $Y - tX^2$: per a $t \neq 0$, les còniques són totes paràboles, però el seu límit a $t = 0$ és una cònica defectiva (és a dir una recta). La segona raó és que és molt convenient tenir la propietat que la intersecció d'una quàdrica $V(q)$ amb un subespai afí $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ no contingut a $V(q)$ sigui de nou una quàdrica. És a dir, la restricció de q a $\mathbb{B}$ és de nou una quàdrica. Més abstractament, volem que l'antiimatge d'una quàdrica per una aplicació afí sigui de nou una quàdrica. Per que això sigui cert hem d'incloure les quàdriques defectives. (Per exemple, la intersecció de la paràbola $x^2 - y$ amb la recta $x = 0$ és només un punt de la recta.) El tercer argument és per analogia amb les funcionals afins, on ja hem vist la naturalitat d'incloure les funcionals constants. De fet, aquesta analogia és que va motivar la definició de quàdriques en termes de funcionals biafins.

3.13 L'estudi afí de les quàdriques. Volem estudiar les còniques i més generalment les quàdriques des d'un punt de vista afí: vol dir que ens interessin les propietats d'elles que són invariants per afinitats. Evidentment, la primera cosa que hem de veure és la pròpia noció de quàdrica és una noció afí.

El punt clau és el següent lema. Observeu primer que una quàdrica és una funció $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Si tenim una aplicació afí

$$\phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$$

i una funció $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$, en podem definir una funció $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$? No pas naturalment. La construcció natural és la contrària: si tenim una funció $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{A} \\ & & \searrow q \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

llavors tenim de manera completament natural una funció $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$: és simplement la composició. Ara tenim

main-lemma

3.14 Lema. *Si q és una quàdrica de $\mathbb{A}$ i si $\phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ és una aplicació afí tal que no tota la imatge està dins de $V(q)$, llavors la composició $q \circ \phi$ és una quàdrica de $\mathbb{B}$. A més a més tenim*

$$P \in V(q \circ \phi) \Leftrightarrow \phi(P) \in V(q).$$

No és cert en general que la imatge per ϕ d'una quàdrica és una quàdrica. Per exemple una quàdrica de $\mathbb{R}^1$ consisteix en només dos punts. Si $\phi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és una aplicació afí, la imatge dels dos punts típicament consistiria de dos punts, però una quàdrica de $\mathbb{R}^2$ mai és de dos punts (si té dos punts necessàriament en té infinits). Però és cert si l'aplicació és invertible. En particular tenim:

3.15 Corol·lari. *Si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una afinitat invertible, llavors la imatge d'un quàdrica és una quàdrica.*

Quàdriques en coordenades cartesianes

Si $(P_0; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ és una referència cartesiana de $\mathbb{A}$, i si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ denoten les coordenades corresponents, llavors podem deduir de l'expressió del lema 3.9 que un funcional quadràtic té la forma

$$q(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j}_{\text{part quadràtica}} + 2 \underbrace{\sum_i B_i x_i}_{\text{part lineal}} + \underbrace{C}_{\text{part constant}}.$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \vec{x}^\top \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vec{x} \\ \hline \end{array}$$

on A és la bidiferencial. Anomenem *matriu total* del funcional quadràtic la matriu

$$\begin{pmatrix} C & B \\ B^\top & A \end{pmatrix}.$$

3.16 Exemples: còniques. Una *cònica* és una quàdrica de $\mathbb{R}^2$. Per exemple,

$$q(x_1, x_2) = (1 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_2$$

és una paràbola.

EXEMPLES: les matrius que corresponen a una hipèrbola i a una el·lipse.

EXEMPLE: observem que les corbes de Bézier són (segments de) paràboles.

3.17 Equivalència. Declarem dues matrius simètriques A i A' equivalents si existeix una matriu afí M tal que $A' = M^\top A M$. A més hem d'admetre multiplicació per un escalar no zero. Per tant, declarem A i A' equivalents si existeixen una matriu afí M i un escalar $\lambda \neq 0$ tals que

$$\lambda A' = M^\top A M.$$

(La necessitat de posar λ separadament ve de la no clausura algebraica dels nombres reals: sobre els nombres complexos tal multiplicació sempre es pot dur a terme amb una ajust de M . Però sobre els reals, tals ajusts són possible només per a $\lambda > 0$.)

Quàdriques en coordenades afins (baricèntriques)

3.18 Coordenades cartesianes o baricèntriques? Hem començat amb la definició de quàdriques en $\mathbb{R}^n$, però l'aparença de vectors com $(1, x_1, \dots, x_n)$ ens indica que es tracta naturalment d'una noció de quàdrica en espais afins, via coordenades cartesianes.

Quina és la noció de quàdrica en coordenades afins (baricèntriques)? Tractem el cas de les còniques, per facilitar la notació: sabem que la relació entre coordenades cartesianes i coordenades afins (respecte a una base afí (P_0, P_1, P_2)) són

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Per tant, podem escriure

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & b_1 & b_2 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} \\ \hline b_2 & a_{12} & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & b_1 & b_2 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} \\ \hline b_2 & a_{12} & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x_0 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}$$

El producte de les tres matrius al mig és de nou una matriu simètrica:

c	$b_1 + c$	$b_2 + c$
$b_1 + c$	$a_{11} + 2b_1 + c$	$a_{12} + b_1 + b_2 + c$
$b_2 + c$	$a_{12} + b_1 + b_2 + c$	$a_{22} + 2b_2 + c$

els detalls d'aquest canvi no seran molt importants. L'important és que quàdriques en coordenades baricèntriques també són matrius simètriques, però amb una interpretació una mica diferent: donada una matriu simètrica Q , la cònica que defineix en coordenades cartesianes no és la mateixa cònica que defineix en coordenades afins.

Observeu que en coordenades afins (baricèntriques) $[x_0, \dots, x_n]$ el polinomi que respon a un funcional quadràtic sempre és homogeni de grau 2. Podem interpretar aquest polinomi com una funció de $\mathbb{R}^{n+1}$, de fet una forma quadràtica. Per tant defineix una quàdrica de $\mathbb{R}^{n+1}$! Aquesta nova quàdrica té la propietat especial que $\vec{0}$ hi pertany, i si algun punt $\vec{v}$ hi pertany, llavors tota la recta generada per $\vec{0}$ i $\vec{v}$ també hi pertany. És un con — un tema que tractem més endavant.

4 Funcional polar: centre, varietat tangent

4.1 Funcional polar. Si $q : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ és un funcional quadràtic amb polarització $b : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, per a cada punt $P \in \mathbb{A}$ tenim un funcional afí

$$\begin{aligned} b_P : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P' &\longmapsto b(P, P') \end{aligned}$$

que anomenem el *funcional polar* de P respecte a q .

En coordenades cartesianes, el funcional polar de P respecte a q és l'aplicació afi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline X \\ \hline \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & P \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline X \\ \hline \end{array} \end{array}$$

4.2 Punt singular. Un *punt singular* d'una quàdrica $Q \subset \mathbb{A}$ és un punt $P \in Q$ tal que el funcional polar b_P és idèntic zero en $\mathbb{A}$.

Centre

4.3 Centre. Un *punt central* d'una quàdrica $q : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ és un punt Z (no necessàriament de $V(q)$) tal que la reflexió central en Z deixa el funcional q invariant. És a dir

$$q \circ r_Z = q.$$

Anomenem el *centre* de q el conjunt de tots els punts centrals de q .

Observeu que demanem que la reflexió deixi el funcional q invariant; en alguns casos degenerats, això és una condició més fort que deixar el lloc $V(q)$ invariant. Per exemple, en el cas $V(q) = \emptyset$, tota reflexió (com tota afinitat) deixa $V(q)$ invariant! Altre cas és el d'una quàdrica defectiva: llavors $V(q) = H$ és un hiperplà, i tota reflexió central en un punt de H deixa H invariant, però no deixa invariant q . (Exemple concret: reflexió en el punt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ deixa invariant la recta $V(x_1)$ però no el funcional x_1 .)

4.4 Proposició. *Un punt Z és un punt central per a q si i només si el polar de Z respecte a q és un funcional constant.*

Demostració. Que Z sigui un punt central vol dir que per a tot punt P tenim $q(2Z - P) = q(P)$. Fem expansió per polarització:

$$\begin{aligned} q(2Z - P) &= b(2Z - P, 2Z - P) \\ &= 4b(Z, Z) - 4b(Z, P) + b(P, P) \end{aligned}$$

Això és igual a $q(P)$ per a tot P si i només $b(Z, Z) - b(Z, P) = 0$, és a dir, el funcional polar b_Z és constant. $\square$

4.5 Corol·lari. *Un punt singular de $V(q)$ és també un punt central.*

4.6 Lema. *El centre de q és un subespai afí.*

Demostració. Si Z_0 i Z_1 són punts centrals, volem establir que $Z := (1-t)Z_0 + tZ_1$ és un punt central. Però $b_Z = (1-t)b_{Z_0} + tb_{Z_1}$ que és un funcional constant com que Z_0 i Z_1 són punts centrals. $\square$

4.7 Lema. *Un funcional quadràtic q és constant al llarg del seu centre (és a dir, el valor $q(Z)$ no depèn del punt central Z).*

Demostració. Sigui Z un punt central, i sigui $Z' := Z + \vec{w}$ un altre (és a dir, $\vec{w}$ pertany a la direcció del centre). Calculem

$$\begin{aligned} q(Z + \vec{w}) &= b(Z', Z + \vec{w}) \\ &= b_{Z'}(Z) + Db_{Z'}(\vec{w}) \\ &= b_Z(Z') + Db_{Z'}(\vec{w}) \\ &= b_Z(Z + \vec{w}) + Db_{Z'}(\vec{w}) \\ &= b_Z(Z) + Db_Z(\vec{w}) + Db_{Z'}(\vec{w}) \\ &= q(Z) \end{aligned}$$

com que Db_Z i $Db_{Z'}$ són zero (són diferencials de funcionals constants). (Observeu també que tenim $Hq(\vec{w}) = Db_{Z'}(\vec{w}) - Db_Z(\vec{w}) = 0$.) $\square$

4.8 Observació. Recordeu que per a una forma bilineal b d'un espai vectorial V , el *radical* de b és el subespai de vectors $\vec{v} \in V$ tals que $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in V$. El lema diu equivalentment que la direcció del centre és el radical de la bidiferencial.

Recta tangent i varietat tangent

4.9 Quàdriques de la recta. En general una quàdrica de la recta és la unió de dos punts: són les dues arrels d'un polinomi de grau 2. Alguns casos degenerats no són interessants aquí: la quàdrica pot ser buida perquè les arrels són complexes, la quàdrica pot ser defectiva, de en la realitat el polinomi és de grau 1 (o 0). El cas degenerat interessant aquí és el cas d'una arrel doble.

Vegeu l'exemple amb el discriminant!

4.10 Lema. Si $Q \subset \mathbb{A}$ és una quàdrica, i si $L \subset \mathbb{A}$ és un subespai afí no contingut a Q , llavors la intersecció $Q \cap L$ és una quàdrica de L .

Demostració. És un cas particular de lema 3.14 on considerem la inclusió de L en $\mathbb{A}$ com una aplicació afí. $\square$

4.11 Recta tangent. Diem que una recta L és una *recta tangent* a una quàdrica $Q = V(q)$ en el punt P si la restricció de q a L és un punt doble (o tota la recta, és a dir $L \subset V(q)$). És més fàcil veure si L ve donada per una parametrització com $t \mapsto P + t\vec{v}$ per algun vector $\vec{v} \neq \vec{0}$. Llavors és només una qüestió de substituir $P + t\vec{v}$ dins de l'equació de Q : això ja és l'equació de $Q|L$ donada com equació en t . Qualsevol vector direcció d'una recta tangent de Q a P s'anomena *vector tangent* de Q a P .

4.12 Exemple. A $\mathbb{R}^2$, sigui Q el cercle, $x^2 + y^2 - 1$. En el punt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la recta $P + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una recta tangent, i per tant $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vector tangent a P : substituïm en l'equació: $1^2 + t^2 - 1$. Clarament $t = 0$ és arrel doble.

El següent càlcul mostra que no hi ha altres rectes tangents a P : una recta que passa per P és de la forma

$$P + t\vec{v}$$

amb $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Si la substituïm en l'equació de Q obtenim

$$(1 + tv_1)^2 + (tv_2)^2 - 1.$$

Per que aquesta equació tingui arrel doble a $t = 0$, hem de matar el terme lineal que és $2tv_1$. Per tant, hem de tenir $v_1 = 0$. Per tant, el vector direcció de la recta ha de ser $\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$, que és exactament la direcció que ja hem tractat.

DIBUIX

Una cònica pròpia (és a dir, de rang projectiu 3) té exactament una recta tangent en cada punt. Per a la cònica de rang projectiu 2 (parell de rectes), el punt d'intersecció P de les dues rectes té la propietat que tota recta que passa per P és tangent. Intuïtivament ja és un punt doble, i per tant serà un punt doble en tota recta que passa pel punt. Veurem que això passa exactament als punts singulars (és a dir els punts P tals que el polar de P és idèntic zero).

Per a les quàdriques de dimensió 2 (les quàdriques de $\mathbb{R}^3$), tot punt té una infinitat de rectes tangents, i juntes aquestes rectes formen el *pla tangent* (que definim en breu).

4.13 Exemple. A $\mathbb{R}^3$ sigui Q la quàdrica donada per $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1$. (És un hiperboloide d'un full.) Considerem el punt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Afirmem que les dues rectes

$$P + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

són tangents. En el primer cas l'equació és $t^2 - t^2 - 1 + 1$. Això és sempre 0, doncs aquesta recta està continguda en Q . En el segon cas, $-t^2 - 1 + 1$. Per tant, l'equació és $t^2 = 0$, i clarament $t = 0$ és una arrel doble. Busquem totes les rectes tangents possibles

$$P + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Analitzem per a quins valors de v_1, v_2, v_3 la recta és tangent. L'equació és

$$(tv_1)^2 - (tv_2)^2 - (1 - tv_3)^2 + 1$$

Té zero doble a $t = 0$ si i només si no hi ha terme lineal. Per tant, hem de matar $-2tv_3$. Per tant, tota recta tangent és de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Clarament totes aquestes rectes pertanyen al pla $x_3 = 1$. Aquest pla serà el *pla tangent* de Q a P .

4.14 Varietat tangent. Per definició, la *varietat tangent* d'una quàdrica q en un punt $P \in V(q)$ és la unió de totes les rectes tangent a P .

4.15 Observació. La paraula “espai tangent” pot aparèixer més natural que “varietat

tangent”, però volem subratllar que es tracta d’un subespai afí. En canvi “espai tangent” ha de significar la direcció de la varietat tangent: és un espai vectorial (subespai vectorial de $T(\mathbb{A})$) i no pas només un espai afí.

4.16 Proposició. *La varietat tangent de q a $P \in V(q)$ es caracteritza també com el lloc del funcional polar de P . En particular és un hiperplà, excepte si P és un punt singular (és a dir, el polar és idèntic zero), en el qual cas la varietat tangent és tot l’espai.*

Demostració. Representem una recta per P com $P = t\vec{v}$. Dir que és una recta tangent vol dir que

$$((1, P) + (0, \vec{v})) Q(1P + 0\vec{v})$$

com polinomi en t té una arrel doble a $t = 0$. Això vol dir que el terme lineal, que és $2Q(1P, 0\vec{v})$ és zero.

D’altra banda que L està continguda en l’hiperplà tangent vol dir que la restricció de PQ (el polar) a L és idènticament zero. Aquesta restricció és

$$1P Q (1P + 0\vec{v})$$

però com que P pertany a la quàdrica ja sabem que $1P Q 1P$ és zero, doncs la condició és equivalent a la condició de zero doble. $\square$

4.17 Corol·lari. *Una recta L és tangent de q en un punt P si i només el funcional polar de P s’anul·la idènticament en L .*

Observem que la intersecció d’una quàdrica i el seu hiperplà tangent H (en un punt no singular) és una quàdrica degenerada de H .

5 Cons i cilindres

5.1 Rang projectiu. El *rang projectiu* d’una quàdrica és el rang de la matriu que la defineix. Això no depèn de les coordenades escollides perquè un canvi de coordenades correspon a multiplicar la matriu per una matriu invertible, i això no modifica el rang. Diem que una quàdrica és *pròpia* si té rang projectiu maximal.

5.2 Cons. Sigui $H \subset \mathbb{A}$ un hiperplà, i $O \notin H$ un punt. (Per tant, $\mathbb{A} = \overline{OH}$.) Sigui

$S \subset H$ un subconjunt. El *con* sobre S amb àpex O és el conjunt

$$\overline{OS} := \{(1-t)O + tP \mid P \in S\} = \bigcup_{P \in S} \overline{OP},$$

la unió de totes les rectes que passen per O i algun punt de S .

5.3 Exemple. El con $\overline{OS}$ és una varietat lineal si i només si S ho és. En aquest cas la notació és compatible amb la notació emprada per a varietats generades per punts i altres subvarietats lineals — però observeu que si $S = \{P_0, P_1\}$ (el conjunt de dos punts), llavors $\overline{OS}$ és diferent de $\overline{O, P_0, P_1}$: el primer és un con i el segon és un espai afí.

5.4 Exemple. En $\mathbb{R}^3$, si $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ és el cercle en el hiperplà $x_3 = 1$, i $O = (0, 0, 0)$ llavors el con $\overline{OS}$ és el con en el sens usual

$$\overline{OS} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

Per exemple, $P = (1, 0, 1) \in S$, i la recta $\overline{OP}$ és $t\overrightarrow{OP}$, o sigui $(t, 0, t)$. Tota aquesta recta està continguda en $\overline{OS}$.

Observem que $\overline{OS}$ és una quàdrica. Això és general:

lem:con

5.5 Lema. Si $H \subset \mathbb{A}$ és un hiperplà (doncs un subespai afí) i $Q \subset H$ és una quàdrica de H , i si $O \notin H$, llavors el con $\overline{OQ}$ és una quàdrica de $\mathbb{A}$ (del mateix rang que Q).

Demostració. Busquem una aplicació biafí $\bar{b} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Per a un punt arbitrari $X = (1-t)O + tP$, amb $P \in H$, tindrem

$$\bar{q}(X) := \bar{b}(X, X) = (1-t)^2 \bar{b}(O, O) + 2t(1-t) \bar{b}(O, P) + t^2 \bar{b}(P, P)$$

per biafinitat. Per tant, $\bar{b}$ es queda determinat si posem

$$\bar{b}(O, P) := 0 \quad \text{i} \quad \bar{b}(P, P) := b(P, P).$$

És clar que $\bar{q}$ s'anul·la en X si i només si $b(P, P) = 0$ o $t = 0$, és a dir quan $X \in \overline{OP}$. $\square$

Demostració. (En coordenades afins (baricèntriques).) Si $P_0, \dots, P_{n-1}$ és una base de H , llavors $P_0, \dots, P_{n-1}, O$ és una base de $\mathbb{A}$. Per tant, $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ són coordenades afins

(baricèntriques) del espai afí H , i en coordenades baricèntriques respecte a aquesta base la quàdrica ve donada per alguna matriu Q . Afirmem que la matriu

$$C := \begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

defineix $\overline{OQ}$ respecte a $\{P_0, \dots, P_{n-1}, O\}$. En efecte, qualsevol punt de $\mathbb{A}$ s'escriu $X = (1-t)O + tP$ amb $P \in H$, i podem calcular

$$X^\top CX = t^2 P^\top QP + (1-t)^2 O^\top 0O = t^2 P^\top QP.$$

Per tant, $X \in C$ si i només si $P \in Q$ o $t = 0$ (la última possibilitat essent equivalent a $X = O$). (És clar que el rang de C és el mateix de Q .) $\square$

5.6 Exemple. Cons sobre el·lipse, paràbola i hipèrbola són tots congruents. Vegeu figura a la primera pàgina.

Voldríem provar que tota quàdrica de rang no maximal apareix d'aquesta manera: com un con sobre una quàdrica de dimensió menor. Això és cert en geometria projectiva, però no en geometria afí: la raó és que l'àpex del con pot “escapar a l'infinit”, i tindríem un cilindre i no pas un con:

5.7 Cilindres. Sigui $H \subset \mathbb{A}$ un hiperplà, i considereu un vector $\vec{w} \notin T(H)$. Posem $W := \text{span } \vec{w}$. (Tenim doncs $T(H) \oplus W = T(\mathbb{A})$.) Sigui $S \subset H$ un subconjunt. El *cilindre* sobre S amb direcció W és el conjunt

$$S + W := \{P + \vec{w} \mid P \in S, \vec{w} \in W\} = \bigcup_{P \in S} P + W,$$

la unió de totes les rectes que passen per algun punt de S i té direcció W . Es pot descriure també com la unió de totes les translacions de S en direcció W .

Tant el con com el cilindre és una unió de rectes: el con és una unió de rectes que passen per un cert punt O , mentre el cilindre és una unió de rectes que tenen una certa direcció W . (En la geometria projectiva “cilindre” és només un cas particular de “con”, perquè que totes les rectes tenen la mateixa direcció vol dir que passen pel mateix punt a l'infinit.)

5.8 Exemple. Un cilindre sobre S és una varietat lineal si i només si S ho és.

5.9 Lema. *Sigui $H \subset \mathbb{A}$ un hiperplà (doncs un subespai afí) i sigui $Q \subset H$ una quàdrica de H . Per a qualsevol direcció W tal que $T(H) \oplus W = T(\mathbb{A})$, el cilindre $Q + W$ és una quàdrica de $\mathbb{A}$ (del mateix rang que Q).*

Demostració. (Demostració abstracte.)... □

Demostració. Molt similar a la demostració anterior del cas del con, però *en coordenades cartesianes*. Si $P_0, \dots, P_{n-1}$ és una base de H , és a dir, $P_0, \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_{n-1}}$ és una referència cartesiana per a l'espai afí H , doncs $(1, x_1, \dots, x_{n-1})$ són coordenades cartesianes del espai afí H , i en aquesta base la quàdrica ve donada per alguna matriu Q .

Si $\vec{w} \in W$ és no zero, llavors $P_0, \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_{n-1}}, \vec{w}$ és una referència cartesiana per a l'espai afí $\mathbb{A}$, i afirmem que la matriu

$$C := \begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

defineix $Q + W$. En efecte, qualsevol punt de $\mathbb{A}$ s'escriu $X = P_0 + \vec{v} + t\vec{w}$, amb $\vec{v} \in T(H)$ i $t\vec{w} \in W$, i podem calcular

$$X^\top C X = (1, \vec{v}^\top) Q \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} + t0t = (1, \vec{v}^\top) Q \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Per tant, $X \in C$ si i només si $P_0 + \vec{v} \in Q$. (És clar que el rang de C és el mateix de Q .) □

5.10 Con sobre cilindre versus cilindre sobre con. Les dues construccions, cons i cilindres, es poden combinar: per exemple si comencem amb alguna quàdrica de dimensió petita podem pujar la dimensió fent primer dues construccions de cons, després un cilindre sobre el resultat, i finalment un con sobre això; el resultat final seria una quàdrica de 4 dimensions més que l'original. Es podria imaginar que totes les combinacions diferents possibles donaria lloc a diferents tipus de quàdriques, o al menys que diferents tipus de quàdriques resultaria dependent del nombre de vegades que fem con i cilindre. El fet és que el tipus de quàdrica que resulta depèn només d'una cosa: si hi ha en la seqüència de construccions un con o si no n'hi ha!

5.11 Exemple. Comencem amb una quàdrica pròpia de la recta. És a dir, dos punts. Imaginem la recta com subespai afí de l'espai de dimensió 3, per hi haver espai per fer dues construccions. El cilindre sobre aquests dos punts és un parell de rectes paral·leles, i si fem el cilindre sobre això arribem a un parell de plans paral·leles. Si tornem a les dues rectes i hi fem un con, el resultat és un parell de plans no paral·lels: clarament es tallen a l'àpex. Doncs els dos plans es tallen en una recta.

DIBUIXOS

Ara tornem al dos punts originals: si fem el con sobre els, arribem a un parell de rectes no paral·leles (amb punt d'intersecció A). Si fem el con sobre això, no és difícil veure que el resultat serà un parell de plans que es tallen en una recta (la qual recta és $\overline{OA}$). Finalment, si fem el cilindre sobre el parell de rectes, també arribem a un parell de plans que es tallen en una recta (la recta és $A + \vec{w}$, on $\vec{w}$ és la direcció del cilindre).

DIBUIXOS

En conclusió: hi ha només dues possibilitats:

- cilindre sobre cilindre (parell de plans paral·leles)
- qualsevol combinació amb un con (parell de plans no paral·leles)

Per tant, dir que alguna quàdrica es pot realitzar com un con no exclou que també podria ser un cilindre (sobre algun con). Per distingir entre cons i cilindres, necessitem de la noció de punt singular.

5.12 Lloc singular. Recordeu que un punt singular d'una quàdrica q és un punt $P \in V(q)$ tal que el funcional polar de P (respecte a q) és zero. El *lloc singular* d'una quàdrica q és el conjunt de tots els seus punts singulars. El lloc singular d'una quàdrica q es pot doncs caracteritzar com la intersecció

$$\text{Ker}(q) \cap V(q).$$

En particular, és sempre una varietat lineal.

5.13 Lema. Si $C \subset \mathbb{A}$ és un con amb àpex O , llavors O és un punt singular de C .

Demostració. És evident de la construcció de con (cf. 5.5): recordeu que el funcional biafí $\bar{b}$ que defineix el con amb àpex O es va definir com

$$\bar{b}(O, P) = 0, \quad \forall P \in \mathbb{A},$$

per tant O és un punt singular. $\square$

5.14 Lema. *Si C és un con dins un espai de dimensions n , llavors el seu lloc singular és de dimensió*

$$\dim \text{Sing}(C) = n - \rho.$$

(Aquí ρ denota el rang projectiu.)

Exemples.

5.15 Cilindre pur. Un cilindre sense punts singulars s'anomena *cilindre pur*.

5.16 Proposició. *Sigui q una quàdrica impròpia (és a dir, de rang no maximal). Si existeix un punt singular $O \in V(q)$, llavors q és un con sobre una quàdrica del mateix rang amb àpex O .*

Demostració. Suposem que existeix un hiperplà H que talla $V(q)$; per tant $B := H \cap V(q)$ és una quàdrica de H . És clar (per un càlcul directe) que si $P \in B$ llavors q s'anul·la en tota la recta $\overline{OP}$, doncs $V(q)$ és el con sobre B . $\square$

5.17 Proposició. *Si q no té cap punt singular és una quàdrica pròpia o un cilindre pur (amb direcció algun $\vec{w} \in T(\text{Ker}(q))$). En aquest cas, la base del cilindre és una quàdrica del mateix rang que ha de ser una quàdrica pròpia o un cilindre pur.*

Demostració. Sigui H un hiperplà tal que $T(H) + \vec{w} = T(\mathbb{A})$ per algun vector $\vec{w} \in T(\text{Ker}(q))$, i sigui

$$B := V(q) \cap \mathbb{L}.$$

Llavors per a tot punt $P \in \mathbb{L}$ és clar que els punts $P + \vec{w}$ també pertany a $V(q)$. Doncs q és un cilindre sobre B . Ara B no pot tenir cap punt singular, perquè seria també un punt singular del cilindre. Per tant, per inducció sobre la dimensió B és una quàdrica pròpia o un cilindre pur. $\square$

5.18 Teorema. *Una quàdrica no defectiva i no buida és*

- o bé una quàdrica pròpia (és a dir de rang projectiu maximal)
- o bé un con (iterat) sobre una quàdrica pròpia
- o bé un cilindre pur sobre una quàdrica pròpia.

El rang projectiu determina la dimensió de la quàdrica pròpia que és la base.

6 Classificació afí de les quàdriques

Formes canòniques

6.1 Teorema de classificació. Tota quàdrica q és equivalent a exactament una de les quàdriques següents (que anomenem de forma canònica):

$$\begin{aligned} I : \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 \\ II : \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 1 \\ III : \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 1 \\ IV : \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 2x_{r+1} \end{aligned}$$

Els tipus II i III difereixen per tenir més termes positius (tipus II) o més termes negatius (tipus III).

Veure que una quàdrica ha de ser d'un aquests tipus és una qüestió de manipular matrius simètriques. Hi ha dos casos principals:

6.2 Quàdriques amb centre no buit. Podem simplificar la matriu per eliminar els termes constants, i després diagonalitzar la part quadràtica. (Geomètricament, l'aspecte més important és que escollim com origen algun punt del centre. És per això que el terme lineal desapareix.) Arribem a exactament un dels tipus I, II, III.

6.3 Quàdriques amb centre buit. En aquest cas podem primer suposar que la matriu de la part quadràtica és diagonal, i ara la condició de centre buit ens diu que la part lineal té alguna entrada no zero, que podem suposar és la entrada amb índex $r + 1$. Esglaonem simètricament i arribem al tipus IV.

Invariants

6.4 Invariants. Tenim el rang projectiu ρ , el rang afí r . La signatura de la matriu total o de la part quadràtica no és un invariant, perquè si multipliquem el polinomi per un

constant negatiu, canviem la signatura s per $r - s$.

Introduïm l'índex d'una matriu simètrica com

$$i := \min\{s, r - s\}$$

(on r denota el rang, i s la signatura). Aquí estem parlant de la matriu de la part quadràtica.

Per a la matriu total M podem igualment introduir un índex. Si posem $\sigma := \text{signatura}(M)$, llavors podem definir

$$j := \min\{\sigma, \rho - \sigma\}.$$

6.5 Proposició. *Si q i q' són equivalents, llavors tenen el mateix quaternes d'invariants (r, ρ, i, j) .*

Demostració. Cadascú dels invariants és realment invariant sota canvi de coordenades, és a dir canvis de tipus $M \mapsto C^T M C$, on C és la matriu d'una afinitat. $\square$

Observem que dels quatre tipus són possibles només els invariants (r, ρ, i, j) de les formes següents:

I	(r, i, r, i)	$2i \leq r \leq n$
II	$(r, i, r + 1, i)$	$2i \leq r \leq n$
III	$(r, i, r + 1, i + 1)$	$2i < r \leq n$
IV	$(r, i, r + 2, i + 1)$	$2i \leq r < n$

Classificació de les quàdriques de la recta

	r	i	ρ	j	Equació	Nom
III	1	0	2	1	$-x^2 + 1$	Parell de punts
II	1	0	2	0	$x^2 + 1$	Buit (dos punts imaginaris)
IV	0	0	2	1	x	Punt (altre punt a l'infinit)
I	1	0	1	0	x^2	Punt doble
II	0	0	1	1	1	Buit (punt doble a l'infinit)

Classificació de còniques

	r	i	ρ	j	Equació	Nom
II	2	1	3	1	$x^2 - y^2 + 1$	Hipèrbola
III	2	0	3	1	$-x^2 - y^2 + 1$	El·lipse
II	2	0	3	0	$x^2 + y^2 + 1$	Buit (el·lipse imaginària)
IV	1	0	3	1	$x^2 + y$	Paràbola
I	2	1	2	1	$x^2 - y^2$	Parell de rectes
I	2	0	2	0	$x^2 + y^2$	Punt (dues rectes imaginàries)
III	1	0	2	1	$-x^2 + 1$	Parell de rectes paral·leles
II	1	0	2	0	$x^2 + 1$	Buit (rectes paral·leles imaginàries)
IV	0	0	2	1	x	Recta (altra recta a l'infinit)
I	1	0	1	0	x^2	Recta doble
II	0	0	1	1	1	Buit (recta dobla a l'infinit)

Classificació de les quàdriques de l'espai

	r	i	ρ	j	Equació	Nom
II	3	0	4	0	$x^2 + y^2 + z^2 + 1$	Buit (el·lipsoide imaginari)
III	3	0	4	1	$-x^2 - y^2 - z^2 + 1$	El·lipsoide
II	3	1	4	1	$x^2 + y^2 - z^2 + 1$	Hiperboloide de dos fulls
III	3	1	4	2	$x^2 - y^2 - z^2 + 1$	Hiperboloide d'un full
IV	2	0	4	1	$x^2 + y^2 + z$	Paraboloide el·líptic
IV	2	1	4	2	$x^2 - y^2 + z$	Paraboloide hiperbòlic
I	3	0	3	0	$x^2 + y^2 + z^2$	Punt (con imaginari)
I	3	1	3	1	$x^2 + y^2 - z^2$	Con
II	2	0	3	0	$x^2 + y^2 + 1$	Buit (cilindre el·líptic imaginari)
III	2	0	3	1	$-x^2 - y^2 + 1$	Cilindre el·líptic
II	2	1	3	1	$x^2 - y^2 + 1$	Cilindre hiperbòlic
IV	1	0	3	1	$x^2 + z$	Cilindre parabòlic
I	2	0	2	0	$x^2 + y^2$	Recta (dos plans imaginaris)
I	2	1	2	1	$x^2 - y^2$	Parell de plans
III	1	0	2	1	$-x^2 + 1$	Plans paral·lels
II	1	0	2	0	$x^2 + 1$	Buit (plans paral·lels imaginaris)
IV	0	0	2	1	x	Pla (altre pla a l'infinít)
I	1	0	1	0	x^2	Pla doble
II	0	0	1	1	1	Buit (pla doble a l'infinít)

Aquesta lliçó és l'última programada de l'assignatura i termina amb un festival piro-tècnic d'animacions espectaculars en Maple. En particular veiem moltes famílies a 1 paràmetre amb diverses degeneracions, de tots els angles, i en colors.

```
animate(implicitplot3d,[x^2-t*y^2-z^2+1,x=-4..4,y=-4..4,z=-4..4,numpoints=10000],t=-1..1);
animate(implicitplot3d,[x^2-y^2-t*z,x=-4..4,y=-4..4,z=-4..4,numpoints=10000],t=-1..1);
animate(implicitplot3d,[x^2+y^2-z^2+t,x=-4..4,y=-4..4,z=-4..4,numpoints=10000],t=-1..1);
```

Però després de l'espectacle hi ha un petit comentari, amb el qual retornem als orígens de l'assignatura: expliquem com els funcionals quadràtics de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ formen un espai afí de dimensió 10 (l'espai de totes les matrius simètriques 4×4), i que cada animació

representa una recta dins aquest espai de paràmetres: no és res més que agafar dues quàdriques (és a dir punts al $\mathbb{R}^{10}$) i considerar la recta de les combinacions afins d'elles!

(Més precisament, com que el funcional zero no és una quàdrica, i com que multiplicar un funcional per un constant no nul dona la mateixa quàdrica, podem afirmar que les quàdriques formen un espai projectiu de dimensió 9. Així l'estudi de les quàdriques forneix una excel·lent motivació per a la geometria projectiva.)