

Geometria enumerativa de curvas racionais

JOACHIM KOCK, 01/2000

1 Geometria algébrica, teoria de interseção

1.1 Geometria algébrica. A geometria algébrica é a geometria onde os objetos são definidos por equações polinomiais, e as funções são apenas polinômios. Por exemplo, uma *curva algébrica plana* é o lugar dos zeros de um polinômio a duas variáveis.

Um exemplo simples para ilustrar a interação entre os dois aspectos, o algébrico e o geométrico, é o seguinte: considere uma equação de segundo grau (um objeto algébrico). Sabemos que existem duas soluções (pelo menos se o discriminante é positivo). O objeto geométrico correspondente é a curva algébrica plana dada pela equação: uma parábola. As duas soluções são então identificadas como as interseções da parábola com o eixo- x .

1.2 Teoria de interseção: o teorema de Bézout. O *grau* de uma curva algébrica plana é simplesmente o grau do polinômio que a define. Assim uma reta tem grau 1, enquanto uma parábola ou um círculo tem grau 2. (Mais geralmente, uma curva de grau 2 é chamada de cônica.)

O *teorema de Bézout*, que é um teorema fundamental para a teoria de interseção, afirma que *duas curvas algébricas planas de grau d e d' se interceptam em $d \cdot d'$ pontos*.

Para ser correto é preciso excluir o caso onde as duas curvas são iguais ou têm componentes em comum, e os pontos na interseção devem ser contados com multiplicidade. Também há duas coisas mais fundamentais a estabelecer direitinho para o teorema valer:

1.3 Números complexos. Primeiro, sabemos que se é negativo o discriminante da equação de segundo grau, então não há nem uma solução: a parábola é disjunta do eixo- x . Para evitar esse tipo de aborrecimento, é comum na geometria algébrica trabalhar sobre \mathbb{C} , o corpo dos números complexos: aqui todo polinômio tem solução (teorema fundamental da álgebra). (É possível também trabalhar mais abstratamente sobre qualquer corpo algebricamente fechado.)

Adiante, tudo é complexo: o plano é o plano complexo, e as curvas são complexas. Isto quer dizer que uma curva algébrica complexa tem dimensão 2 sobre os reais (e em termos de geometria diferencial, é uma superfície).

1.4 Espaço projetivo. O teorema de Bézout não é verdadeiro ainda: por exemplo, duas retas paralelas não têm nenhum ponto em comum, enquanto o teorema prescreve 1 ponto de interseção. O ponto escapou para infinito. Para lidar rigorosamente com esse tipo de posição especial, é preciso trabalhar com variedades projetivas. A *reta projetiva* é a mais simples. Consiste na reta \mathbb{C} com um ponto acrescentado, chamado ∞ . Em termos de análise complexa é a esfera de Riemann. (Em geometria algébrica é normalmente denotada simplesmente \mathbb{P}^1 , enquanto outras áreas da geometria costumam escrever $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ quando se referem à esfera de Riemann.) Para obter o *plano projetivo*, é preciso acrescentar a \mathbb{C}^2 toda uma reta no infinito, com um ponto correspondendo a cada direção em que um ponto poderia escapar. Agora duas retas paralelas se interceptam no infinito, naquele ponto que corresponde à direção assintótica comum às duas retas.

Essa é a maneira informal de pensar no plano projetivo: formalmente é construído como

$$\mathbb{P}^2 = \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}{\sim},$$

onde a equivalência é a que identifica dois pontos \mathbf{v} e \mathbf{w} se existe um número complexo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ tal que $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$. Ou seja, é o conjunto dos raios em \mathbb{C}^3 , ou em termos de álgebra linear, o conjunto de subespaços de dimensão 1.

Mais geralmente se constrói o espaço projetivo de dimensão r ,

$$\mathbb{P}^r = \frac{\mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

Agora o teorema de Bézout funciona.

1.5 Teorema de Bézout. *Sejam Z_1, \dots, Z_r hypersuperfícies gerais de graus d_1, \dots, d_r no espaço projetivo complexo de dimensão r . Então a interseção é constituída por $\prod d_i$ pontos.*

O *grau* de uma hypersuperfície $Z \subset \mathbb{P}^r$ é o grau do polinômio que a define.

Para uma demonstração do teorema no caso de duas curvas planas, veja [5]. Para o caso geral, tanto como uma introdução à teoria de interseção, veja [4]

2 Geometria enumerativa

A geometria enumerativa é a disciplina que se propõe de responder a perguntas de tipo: quantas objetos geométricos de um dado tipo satisfazem certas coisas. Os objetos mais populares a contar são curvas. A exposição aqui se ocupa com curvas racionais, e mais precisamente com a seguinte questão.

Quantas curvas racionais planas de grau d passam por $3d - 1$ pontos?

Veremos logo mais a definição de uma curva racional, e explicamos porquê justamente $3d - 1$ pontos.

O primeiro exemplo, todo mundo sabe responder: Uma reta é uma curva racional de grau $d = 1$, logo $3d - 1 = 2$. Portanto, o primeiro caso é o seguinte.

2.1 Proposição. *Através de dois pontos distintos passa uma única reta.*

Demonstração. Uma reta é dada por uma equação $aX + bY + c = 0$, para alguns números complexos a, b, c não todos nulos. (O caso $a = b = 0$ corresponde à reta no infinito.) Ou seja, a cada equação dessas corresponde um ponto no espaço $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. No entanto, se você multiplicar a equação toda por um escalar $\lambda \neq 0$, a reta continua a mesma. Portanto, a coleção de todas as retas é parametrizada pelo espaço projetivo $\mathbb{P}_{[a,b,c]}^2$. (Desta forma, mais geralmente, espaços projetivos aparecem naturalmente como espaços de parâmetros de objetos geométricos.)

Agora que temos todas as retas, vamos escolher dois pontos, e ver quais as retas passam por eles. Quê pontos pegar? Não importa, desde que sejam distintos um do outro. Porque sempre podemos fazer uma mudança de coordenadas que leva um par de pontos em qualquer outro par de pontos. Então vamos pegar $P = (1, 0)$ e $Q = (0, 1)$. Agora é fácil descrever o conjunto das retas que passam por P : para termos $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0$ precisamos $a + c = 0$. A condição $a + c = 0$ descreve um subconjunto em $\mathbb{P}_{[a,b,c]}^2$, de fato um hiperplano (ou seja, uma reta), que chamamos P^* . Por outro lado o conjunto de todas as retas que passam por Q é dada pela equação $b + c = 0$, o que descreve em $\mathbb{P}_{[a,b,c]}^2$ uma outra reta, denotada Q^* . Agora o conjunto das retas que passam por ambos os pontos P e Q é dado como a interseção $P^* \cap Q^*$. Que pelo teorema de Bézout consiste em um único ponto. Esse ponto corresponde à única reta solução enunciada na proposição. \square

Neste caso simples é fácil resolver concretamente o sistema de equações e encontrar qual é essa reta prometida. De fato, a solução é dada por $a = b$. (Isto é um espaço unidimensional de soluções, mas lembra que subespaços unidimensionais de \mathbb{C}^3 são justamente os pontos de $\mathbb{P}_{[a,b,c]}^2$!)

Porém esse não é o objetivo da geometria enumerativa, e também de um ponto de vista é irrelevante: afinal a pergunta disse respeito a dois pontos quaisquer; a escolha de P e Q foi arbitrária — porque a solução a essa problema arbitrária teria importância? Outras escolhas de dois pontos dariam outras soluções. O que todas essas perguntas concretas têm em comum é que o número de soluções é 1.

Este primeiro exemplo foi muito simples. Porém serve como ilustração para muitas características da geometria enumerativa

1. A posição dos pontos não é dada, e a solução não é concreta. Qualquer escolha de pontos suficientemente gerais dá o mesmo número como resposta. (No caso em cima, suficientemente geral significa apenas que os dois pontos não podem ser iguais, mas em geral é mais sutil. . .)
2. A solução é encontrada em três passos: primeiro, um espaço de parâmetros é montado para a coleção de todos os objetos que se pretende contar.
3. Depois, cada condição imposta sobre as curvas corresponde a uma subvariedade no espaço de parâmetros, e interceptando todas essas subvariedades, o conjunto das soluções é encontrada. Para poder determinar o número de elementos nesse conjunto, ele deve ser de cardinalidade finita, o que quer dizer que é um conjunto de dimensão zero. Portanto, *o número de condições impostas deve corresponder à dimensão do espaço de parâmetros.*
4. Para calcular o número de pontos na interseção, se usa teoria de interseção do espaço de parâmetros. Isso quer dizer em particular que o espaço precisa ser compacta. Espaço projetivo é compacto, e a teoria de interseção é conhecida graças ao teorema de Bézout.

Vamos para um exemplo um pouco menos trivial.

2.2 Proposição. *Dados cinco pontos no plano, existe uma única conica lisa que passa pelos cinco pontos. (Os pontos precisam estar em posição suficientemente geral, o que quer dizer que nenhum três entre eles podem ser alinhados.)*

Observe que toda cônica lisa é racional, veja [5]. Note ainda que $d = 2$ implica $3d - 1 = 5$.

Demonstração. Uma cônica é o lugar de zeros de uma equação de segundo grau,

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f.$$

Logo, como no caso anterior, o espaço projetivo $\mathbb{P}_{[a,b,c,d,e,f]}^5$ é o espaço de parâmetros para todas as cônicas. Observe que nem todas essas cônicas são cônicas lisas. Podem ser pares-de-retas, ou mesmo “retas-duplas”, e não queremos contar tais cônicas. Porém, precisamos de um espaço de parâmetros compacto, portanto não dá para simplesmente jogar fora os pontos que correspondem a cônicas degeneradas; é melhor ficarmos com o espaço todo, e só no final argumentar porque todas as soluções encontradas são de fato cônicas lisas. Mas primeiro os argumentos da teoria de interseção: passar por um ponto dado, digamos $P = (0, 0)$, corresponde a ter $f = 0$, o que descreve um hiperplano em $\mathbb{P}_{[a,b,c,d,e,f]}^5$. Da mesma forma, para cada ponto P , a condição de passar por ele descreve em $\mathbb{P}_{[a,b,c,d,e,f]}^5$ um hiperplano. Pelo teorema de Bézout, a interseção de cinco tais hiperplanos consiste em um ponto só, portanto: uma só cônica passa pelos cinco pontos. (E no caso, é simples ver que não pode ser degenerada: seria uma reta-dupla ou um par-de-retas, e é impossível para tal curva passar por cinco pontos, uma vez que excluimos o caso de ter três pontos colineares.) \square

Mais geralmente, o conjunto de todas as curvas planas de grau d (não necessariamente racionais) tem como espaço de parâmetros \mathbb{P}^N onde $N = d(d + 3)/2$. E argumentando como no dois exemplos em cima se mostra que *por $d(d + 3)/2$ pontos no plano passa uma única curva de grau d .*

Por exemplo, as cúbicas têm como espaço de parâmetros \mathbb{P}^9 . Quais são racionais?

3 Curvas racionais, parametrizações

Definição. Uma curva racional é uma curva C que pode ser parametrizada. Em outras palavras, existe um morfismo sobrejetor $\mathbb{P}^1 \rightarrow C$.

3.1 Reparametrização. A reta projetiva \mathbb{P}^1 é a curva racional mais simples. Por exemplo o morfismo pode ser simplesmente a identidade $\text{Id} : \mathbb{P}^1 \rightarrow$

\mathbb{P}^1 . Porém, existem outros morfismos sobrejetores $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. De fato, para cada matriz inversível dois-por-dois existe um tal morfismo, definido por multiplicação no espaço \mathbb{C}^2 que definiu \mathbb{P}^1 . (Portanto tais morfismos sobrejetores são sempre inversíveis, e são então automorfismos.) Duas tais matrizes definem o mesmo automorfismo se uma é obtida a partir da outra por multiplicação por um escalar $\lambda \neq 0$. Portanto vemos que o grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ é isomorfo ao espaço projetivo \mathbb{P}^3 . O importante aqui é que a dimensão do espaço de todos os automorfismos é igual a 3.

Seja C uma curva racional, então por definição existe um morfismo sobrejetor $\mathbb{P}^1 \rightarrow C$. Porém esse morfismo não é único; podemos sempre obter outra parametrização simplesmente compondo com um automorfismo de \mathbb{P}^1 :

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \rightarrow C.$$

3.2 O espaço das parametrizações. Uma curva racional de grau d em \mathbb{P}^2 é dada por um morfismo $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Dar um tal morfismo é dar três polinômios homogêneos de grau d . O espaço dos polinômios em \mathbb{P}^1 de grau d é de dimensão $d + 1$. Multiplicando os três polinômios pelo mesmo escalar $\lambda \neq 0$ dá o mesmo morfismo. Portanto, a coleção de todos os mapas $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ de grau d formam um subconjunto U (aberto e denso) num espaço projetivo $\mathbb{P}^{3(d+1)-1}$. Observe que não é o espaço todo: alguns pontos desse espaço são excluídos pela condição de que os três polinômios não são permitidos a se anular simultaneamente (porque $(0, 0, 0)$ não é um ponto em \mathbb{P}^2).

Em conclusão: o espaço das parametrizações U é de dimensão $3d + 2$. Não é um espaço compacto.

3.3 Espaço de módulos de curvas racionais planas. É chamado um *espaço de módulos* um espaço de parâmetros onde cada ponto corresponde a uma classe de equivalência de objetos, em vez de corresponder a objetos em si. No caso, queremos considerar duas parametrizações equivalentes se uma é apenas uma reparametrização da outra, no sentido dos parágrafos anteriores. Deve ser o quociente W do espaço U pela ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Não vamos entrar em detalhes aqui, mas apenas observar que a dimensão deve ser

$$3d + 2 - 3 = 3d - 1.$$

3.4 Cúbicas, de novo. Agora no caso das cúbicas: o espaço de todas as cúbicas tem dimensão 9, enquanto as que são racionais formam um subconjunto de dimensão $3d - 1 = 8$. Ou seja, seu fecho é uma hipersuperfície

$\Delta \subset \mathbb{P}^9$. A solução para a contagem de curvas racionais por oito pontos seria então a interseção de oito hiperplanos em \mathbb{P}^9 com a hipersuperfície Δ . Se soubessemos o grau de Δ , poderíamos aplicar novamente Bézout, para resolver o problema de contagem de curvas racionais: Se o grau fosse n então a resposta seria $n \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = n$, porque uma hipersuperfície tem grau 1.

É possível calcular esse grau, embora requer mais geometria algébrica.

Mas voltamos para o espaço de módulos W . Infelizmente não é compacto e não dá para fazer teoria de interseção: soluções poderiam escapar no infinito.

Não seria possível compactificar esse espaço, da mesma forma que \mathbb{P}^5 é uma compactificação do espaço das cônicas lisas, ou como tomamos simplesmente o fecho do lugar em \mathbb{P}^9 das cúbicas? A resposta é sim:

3.5 Teorema. Existe um espaço $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, d)$ que é uma compactificação do espaço W das curvas racionais planas de grau d . Os elementos na fronteira de $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, d)$ correspondem a (classes de equivalência de) morfismos $C \rightarrow \mathbb{P}^2$ cujo domínio são árvores de \mathbb{P}^1 's. Os elementos desse espaço são chamados de *mapas estáveis*.

Assim, o espaço inclui curvas degeneradas, como por exemplo par-de-retas no caso de $d = 2$, como já vimos foi o caso do espaço de parâmetros \mathbb{P}^5 .

O espaço de mapas estáveis foi construído por M. Kontsevich em torno de 1993. Veja [3] para as propriedades básicas desses espaços, e [1] para os detalhes da sua construção. A teoria de interseção deste espaço é muito mais complicada do que a de \mathbb{P}^N . Não é possível atribuir um grau às hipersuperfícies definidas nele pelas condições de passar por um ponto, e não há teorema de tipo Bézout. Porém, existem métodos que permitem a avaliação da cardinalidade de um conjunto finito de pontos, e assim usar os espaços para geometria enumerativa. As computações são sempre dadas em termos de recursões muito complicadas, e na prática tão difíceis que é preciso o auxílio de um computador para chegar a soluções numéricas.

O problema da contagem de curvas racionais planas passando por $3d - 1$ pontos foi resolvido por Kontsevich (veja em baixo), e muitos outros problemas de geometria enumerativa de curvas racionais também.

Vamos descrever um pouquinho para dar a idéia dessa geometria enumerativa moderna.

4 Funções geratrizes, cohomologia quântica, fórmula de Kontsevich

A exposição agora passa a ser rápida — não há possibilidade de dar os detalhes.

4.1 Anel de interseção de \mathbb{P}^2 (chamada também de cohomologia).

Seja T_0 a classe de \mathbb{P}^2 , seja T_1 a classe de uma reta, e seja T_2 a classe de um ponto. Define uma multiplicação \cup declarando $T_i \cup T_j$ como a classe da interseção de duas subvariedades de classe T_i e T_j . Note que T_0 é a identidade, porque interseção com o espaço todo não tem efeito. Temos $T_1 \cup T_1 = T_2$ pelo teorema de Bézout. E também $T_1 \cup T_2 = 0$. O anel fica $\mathbb{Z}[T_1]/(T_1^3)$. Pode usar coeficientes racionais, as vezes é prático.

A idéia (que vem da física teórica) agora é construir um produto mais geral que o produto \cup , e que codifica toda a informação da geometria enumerativa de curvas racionais (sujeitas a condições de incidência).

Definição. Para $a_2 = 3d - 1$, seja $N_d(a_2)$ o número de curvas racionais planas de grau d que passa por a_2 pontos gerais. Para $a_2 \neq 3d - 1$, ponha $N_d(a_2) = 0$. Empregamos a notação curta $N_d = N_d(3d - 1)$.

4.2 A potencial quântica para \mathbb{P}^2 é por definição a função geratriz para os números $N_d(a_2)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x_1, x_2) &= \sum_{d \geq 1} \exp(d \cdot x_1) \sum_{a_2=0}^{\infty} \frac{x_2^{a_2}}{a_2!} N_d(a_2) \\ &= \sum_{d \geq 1} \exp(d \cdot x_1) \frac{x_2^{3d-1}}{(3d-1)!} N_d\end{aligned}$$

Os símbolos a_2 e x_2 (que dizem respeito a N_d) são relacionados ao símbolo T_2 , a classe de um ponto (a condição de passar por um ponto). Da mesma forma, os símbolos a_1 e x_1 são relacionados a T_1 , a classe de uma reta. A relação com o grau d é explicada vagamente pela observação que uma curva de grau d sempre corta uma reta em d pontos (cf. o teorema de Bézout).

4.3 As derivadas. A grande vantagem de funções geratrizes é que as derivadas são novamente funções geratrizes, mas para números que são modificações dos números originais. Denote por Γ_1 a derivada de Γ com relação a x_1 (e ponha analogamente $\Gamma_2 := \frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma$). Então

$$\Gamma_1 = \sum_{d \geq 1} d \cdot \exp(d \cdot x_1) \frac{x_2^{3d-1}}{(3d-1)!} N_d,$$

ou seja, Γ_1 é a função geratriz dos números dN_d . A interpretação de Γ_2 é um pouco mais sutil; é mais fácil entender a terceira derivada Γ_{222} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{222} &= \sum_{d \geq 2} \exp(d \cdot x_1) \frac{x_2^{3d-4}}{(3d-4)!} N_d \\ &= \sum_{d \geq 1} \exp((d+1) \cdot x_1) \frac{x_2^{3d-1}}{(3d-1)!} N_{d+1} \end{aligned}$$

O que é quase a função geratriz de N_{d+1} .

4.4 O produto quântico. Define um novo produto chamado produto quântico:

$$T_i * T_j := T_i \cup T_j + \sum_{k=0}^2 \Gamma_{ijk} T_{2-k}$$

Observe que T_0 ainda é identidade para esse produto. A álgebra $A[[x_1, x_2]]$ com o produto quântico é chamada a cohomologia quântica.

4.5 Teorema. O produto quântico é associativo.

Associatividade é suficiente verificar nos geradores. O único caso não trivial a verificar é

$$T_1 * (T_1 * T_2) = (T_1 * T_1) * T_2.$$

Expandindo o que significa essa relação de associatividade, usando a definição, isto é equivalente à equação diferencial parcial

$$\Gamma_{222} + \Gamma_{111}\Gamma_{122} = \Gamma_{112}\Gamma_{112}.$$

A prova desta identidade depende da geometria do espaço $\overline{M}_{0,3d-1}(\mathbb{P}^2, d)$. Para a demonstração (devida a Kontsevich também), veja [3].

4.6 A fórmula de Kontsevich. A consequência da associatividade é surpreendente. Escrevendo quem é cada derivada em jogo, multiplicando as séries formais, e extraindo coeficientes (veja [3]), você vê que a EDP é equivalente à seguinte relação recursiva

$$N_d + \sum_{d_A+d_B=d} \binom{3d-4}{3d_A-1} d_A^3 d_B N_{d_A} N_{d_B} = \sum_{d_A+d_B=d} \binom{3d-4}{3d_A-2} d_A^2 d_B^2 N_{d_A} N_{d_B},$$

que é a já celebre fórmula de Kontsevich, que determina todos os números N_d , a partir do primeiro número $N_1 = 1$.

Referências

FP-notes

[1] FULTON, W., and PANDHARIPANDE, R. Notes on stable maps and quantum cohomology. In *Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995*, J. Kollár, R. Lazarsfeld and D. Morrison, Eds., vol. 62, II of *Proc. Symp. Pure. Math.*, pp. 45–96. (alg-geom/9608011).

Gatto

[2] GATTO, L. The Recife notes on intersection theory over moduli spaces of curves. Recife Lecture Notes 1998, Preliminary version, 190pp., available at <http://www.dmat.ufpe.br/~jojo/Mat/RLN/letterio.ps>.

livrinho99

[3] KOCK, J., and VAINSENER, I. *A Fórmula de Kontsevich para Curvas Racionais Planas*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999.

encher:15coloquio

[4] VAINSENER, I. *Classes Características em Geometria Algébrica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1985.

encher:curvasplanas

[5] VAINSENER, I. *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção matemática universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1996.