

Problemes Aritmètica

Problemes Preparatoris

1. Sigui n un nombre enter senar. Demostreu que $n^2 - 1$ sempre és múltiple de 8.
2. Sigui p un nombre primer senar que és suma de dos quadrats. Demostreu que $p + 3$ és múltiple de 4.
3. Quin és el nombre més gran n tal que, quan dividim 1905, 2587 i 4292 entre n ens dona el mateix residu?
4. [OME LX 4] Considerem 2024 nombres primers diferents p_1, \dots, p_{2024} tals que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \dots + p_{2024}.$$

Siguin $A = p_1 p_2 \dots p_{1012}$ i $B = p_{1013} p_{1014} \dots p_{2024}$. Demostreu que $|A - B| \geq 4$.

Problemes d'Olimpíada

1. [LVII 4] Determineu tots els enters positius n tals que la fracció

$$\frac{8n - 3}{17n - 9}$$

és irreductible.

2. [LVI 3] Trobeu els valors del nombre enter positiu n per els quals l'equació

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$

té solució entera.

3. [LVI 6] Sigui m un nombre enter positiu. Demostreu que el polinomi

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3mx + 3m + 1$$

no té zeros enters i calculeu el màxim comú divisor dels nombres $P(m)$ i $P(m)+3$.

4. [LIV 6] Sigui a un nombre enter i $p \geq 3$ un nombre primer. Demostreu que el número

$$a^p + (a + 1)^p + \dots + (a + p - 1)^p$$

és múltiple de p^2 .

5. [L 4] Busqueu els nombres enters positius n menors de 201314 tals que en dividir 3^n i 5^n per 13 donin residus 3 i 5 respectivament. Quins són els primer i l'últim? Quants n'hi ha en total?
6. [LV 2] Trobeu tots els números enters positius amb xifra inicial 6, tals que el número enter que s'obté en esborrar aquest 6 és igual a $1/25$ del número inicial. Demostreu que no existeix cap número enter que comenci en 6 i tal que en esborrar aquest 6 s'obtingui un número igual a $1/35$ del número inicial.
7. [LVI 2] Sigui $n = 2^k$ un nombre enter positiu. Es diu que un subconjunt A de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ és bescanoní si compleix que
 - 1) El nombre 1 pertany a A .
 - 2) Si un nombre x pertany a A , llavors $2x$ no hi pertany.

Es demana

- a) Trobar un conjunt bescanoní amb el nombre màxim d'elements quan $n = 2^5$.
- b) Calcular el nombre màxim de d'elements que pot tenir un conjunt bescanoní en funció de k .