Problemes Aritmètica II

Problemes Preparatoris

1. Calculeu la suma
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2+n}.$$
en funció de m.
2. Demostreu que un n-agon (convex) té $n(n-3)/2$ diagonals.
3. Volem trossejar una rajola de xocolata de mida $n \times m$ i obtenir-ne els nm quadrats. Ho farem trencant les peces grosses en peces més petites, seguint les marques entre els quadradets. Demostreu que haurem de fer exactament $nm-1$ talls.
4. Demostreu que hi ha infinits primers que no acaben amb 1 (en base 10).

Problemes d'Olimpíada

1. [XLIII 4] Sigui
$$S = \frac{1\cdot(n-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{(n-2)\cdot 1}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}.$$
Demostreu que $S = \frac{1}{6}$.
2. [XLII 5] Trobeu una fórmula per calcular la suma
$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)n.$$
3. [LIV 3] Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió escrictament creixent d'enters positius tals que per a tot $n \geq 2017$ es compleix que a_n divideix $(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$. Proveu que existeix un enter positiu N tal que $a_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ per a tot $n > N$.
4. [L 1] Sigui $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n, el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.
5. [XXXII] Calculeu el màxim comú divisor de
$$\binom{n}{k}, \quad \binom{n+1}{k}, \ldots, \quad \binom{n+k}{k}$$
on $n \geq k$ són nombres naturals.