

Problemes Recurrències, Caselles i Inclusió/Exclusió

Problemes Preparatoris

1. Considereu la successió $0, -3, 9, -12, 18, -21, \dots$. Podeu donar una fórmula unificada per a calcular el terme a_n ?
2. Sigui p_n el nombre de paraules de n lletres que podem fer amb les lletres a, b i c , si no poden contenir ni ab ni ac . Trobeu una fórmula explícita per p_n .
3. Tenim una capsa plena de mitjons de colors blanc i negre, amb 10 de cada tipus. Quants mitjons hem de treure per assegurar que tenim un parell del mateix color? I si ara hi ha tres colors? I n colors?
4. Si tenim 30 mitjons de color blanc, vermell, blau i negre, proveu que tenim o 10 mitjons blancs, o 8 de vermells, o 8 de blaus o 7 de negres.

Problemes d'Olimpiada

1. XLIV.5 Un alfabet està constituït per tres lletres: I, X, V que s'escriuen amb barretes d'igual mida l. Si tenim n barretes i les utilitzem totes, quantes paraules diferents podrem escriure? I si $n = 12$?
2. XLVIII.5 Tenim una col·lecció d'esferes iguals que apilem formant un tetràedre les arestes del qual tenen totes n esferes. Calculeu, en funció de n , el nombre total de punts de tangència (contactes) que hi ha entre les esferes de la pila.
3. XLIII.5 Una botiga que està oberta els set dies de la setmana ha venut, durant l'any 2005, un total de 629 bicicletes. Sabent que, com a mínim, ha venut una bicicleta cada dia, demostreu que hi ha un període de dies consecutius durant el qual s'han venut exactament 100 bicicletes.
4. XLVII.1 Tenim 2010 cartes numerades de 1 a 2010. Demostreu que si agafem 11 cartes qualssevol, n'hi ha dues (numerades i i j), d'entre aquestes 11, que compleixen $i < j \leq 2i$.
5. LIV.2 Sobre cada vèrtex d'un polígon regular de 2018 costats s'hi col·loca un nombre del conjunt $\{1, 2, \dots, 1008\}$. Demostreu que hi ha quatre vèrtexs A, B, C i D diferents i ordenats en sentit horari tals que els números a, b, c, d assignats a ells compleixen que $a + b = c + d$.
6. LVIII.6 Volem pintar els nombres $1, 2, \dots, 2021$, cadascun de color blau o vermell, de manera que per cada conjunt de nombres consecutius la diferència entre la quantitat de nombres blaus i vermells (així com la diferència entre la quantitat de nombres vermells i blaus) sigui com a molt 2. De quantes maneres ho podem fer?
7. XLIX.4 Sigui n un nombre enter més gran que 3. Suposem donats n punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats. Sigui k un enter tal que $n/2 < k < n$. Tracem una col·lecció de segments rectilinis, amb la condició que els extrems de cada un d'ells pertanyin al conjunt dels n punts. Suposem que cada un dels n punts és extrem d'almenys k segments diferents. Demostreu que com a mínim hi ha una terna dels segments dibuixats que són els costats d'un triangle.
8. XLVIII.2 En un triangle rectangle d'hipotenusa unitat i angles de $30^\circ, 60^\circ$ i 90° , s'elegeixen 25 punts qualssevol. Demostrea que sempre n'hi haurà 9 d'ells que podran cobrir-se amb un semicercle de radi $\frac{3}{10}$.