

Problemes Desigualtats

Problemes Preparatoris

1. Demostreu que per a tot nombre real x es té que $x^2 - 4x + 6 \geq 2$.
2. Demostreu la desigualtat

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} \leq \frac{1}{10}.$$

3. Demostreu la desigualtat

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} \leq \frac{1}{12}.$$

4. Demostreu que si $x + y + z = 6$ llavors $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Problemes d'Olimpíada

1. [LXI.5] Siguin a, b i c nombres reals positius tals que $a + b + c = abc$. Demostreu que

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

2. [XLVI.5] Siguin a, b i c tres nombres reals i positius tals que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9$. Proveu que

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \leq \sqrt{3}.$$

3. [XXXVI.8]

- i) Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests nombres és mínima quan els nombres són iguals.
- ii) Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) := \frac{9x^2 \sin^2(x) + 4}{x \sin(x)}$$

a l'interval $0 < x < \pi$.

4. [L.6] Digueu per quins valors de $\gamma \in (0, 1]$ és certa, per a qualsevol parella de nombres reals positius a i b , la desigualtat següent:

$$\gamma\sqrt{ab} + (1-\gamma)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

5. [LIX.6] Considerem un triangle ABC amb un punt P interior tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^\circ$. Demostreu que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3} (\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}).$$

6. [LIII.2] Siguin a, b, c, d nombres reals donats amb c i d positius, i siguin x, y nombres reals positius tals que $0 < x \leq c$, i $0 < y \leq d$. Trobeu els valors de x, y que fan mínima l'expressió

$$\sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d-y)^2}.$$

7. [XLIII.8] Sigui $a_1, a_2, \dots, a_n$ una successió finita de nombres reals no tots negatius, i sigui m un nombre enter $0 < m \leq n$. Direm que un terme de la successió, a_k , és un m -líder si existeix un enter positiu p ($1 \leq p \leq m$), tal que

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0.$$

Demostreu que la suma de tots els m -líders és sempre no negativa.