Problemes Desigualtats

Problemes Preparatoris

1. Demostreu que per a tot nombre real x es té que $x^2 - 4x + 6 \geq 2$.
2. Demostreu la desigualtat
$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100} \leq \frac{1}{10}.$$
3. Demostreu la desigualtat
$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100} \leq \frac{1}{12}.$$
4. Demostreu que si $x + y + z = 6$ llavors $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Problemes d'Olimpíada

1. [XLVI.5] Siguin a, b i c tres nombres reals i positius tals que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9$. Proveu que
$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \leq \sqrt{3}.$$
2. [XXXVI.8]
   i) Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests nombres és mínima quan els nombres són iguals.
   ii) Trobeu el valor mínim de la funció
$$f(x) := \frac{9x^2\sin^2(x) + 4}{x\sin(x)}$$
   a l'interval $0 < x < \pi$.
3. [L.6] Digueu per quins valors de $\gamma \in (0, 1]$ és certa, per a qualsevol parella de nombres reals positius a i b, la desigualtat següent:
$$\gamma\sqrt{ab} + (1-\gamma)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$
4. [LIX.6] Considerem un triangle ABC amb un punt P interior tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^o$. Demostreu que
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3}\left(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}\right).$$
5. [LIII.2] Siguin a, b, c, d nombres reals donats amb c i d positius, i siguin x, y nombres reals positius tals que $0 < x \leq c$, i $0 < y \leq d$. Trobeu els valors de x, y que fan mínima l'expressió
$$\sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d-y)^2}.$$
6. [XLIII.8] Sigui $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una successió finita de nombres reals no tots negatius, i sigui m un nombre enter $0 < m \leq n$. Direm que un terme de la successió, a_k, és un *m-líder* si existeix un enter positiu p $(1 \leq p \leq m)$, tal que
$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0.$$
Demostreu que la suma de tots els *m-líders* és sempre no negativa.