Problemes Geometria

Els següents problemes es poden fer fent servir:

(1) Teorema de Pitàgores,
(2) Àrea del triangle,
(3) Teorema de Tales,
(4) Semblança de triangles,
(5) Angles inscrits,
(6) Punts notables,
(7) Teorema del sinus i del cosinus

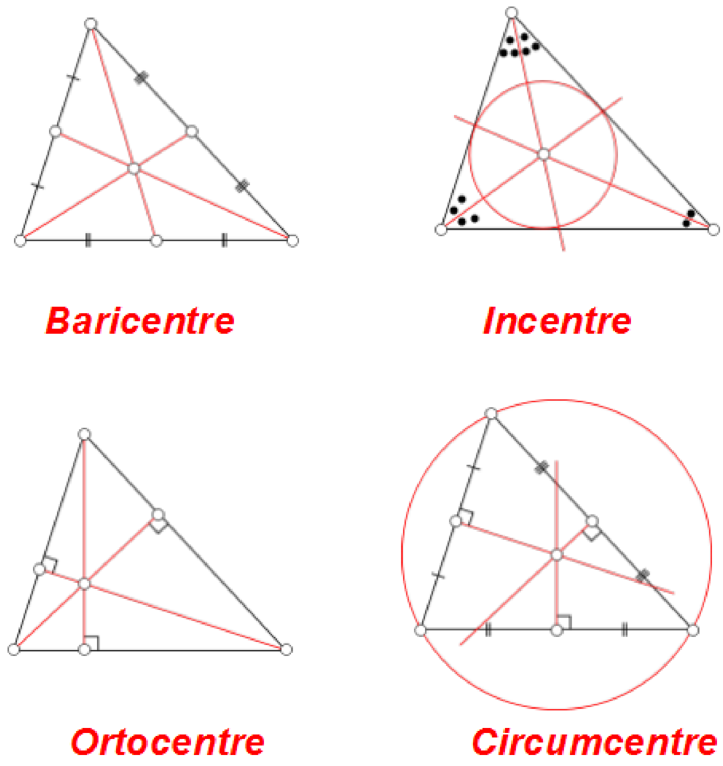

FIGURA 1. Font: `https://dibuixaresdivertit.blogspot.com`

1. [LVIII 4] Tres cercles són tangents entre ells dos a dos, i són també tots tres tangents a una mateixa recta. Si denotem per $R_1 > R_2 > r$ els radis d'aquests tres cercles, demostreu que
$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$
2. [LIII 3] Donat un triangle $\triangle ABC$ considerem un punt D del segment AC tal que $DC = 2AD$. Sigui I el centre de la circumferència inscrita al triangle $\triangle BDC$ i sigui E el punt de tangència d'aquesta circumferència amb el costat BD. Si $BD = BC$, demostreu que les rectes AE i DI són paral·leles.
3. [LVI 1] Sigui Γ una circumferència i siguin P, P_1, P_2, P_3, P_4 cinc punts sobre ella. Demostreu que el producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_2 i P_3P_4 és igual al producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_3 i P_2P_4.
4. [LX 5] Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb mitjanes de longitud m_a, m_b, m_c. Sigui $\triangle PQR$ un triangle que té per costats m_a, m_b, m_c, i siguin d_a, d_b, d_c les distancies del baricentre d'aquest triangle al seus vèrtexs. Demostreu que
   (a) $d_a + d_b + d_c = s$
   (b) $[PQR] = \frac{3}{4}[ABC]$
   on s és el semiperímetre de $\triangle ABC$, i $[PQR]$ i $[ABC]$ són les àrees dels triangles $\triangle PQR$ i $\triangle ABC$.
5. [LIII 5] Siguin OA, OB dos radis d'una circumferència de centre O. Des d'un punt P d'aquesta circumferència es tracen perpendiculars a les rectes OA i OB. Siguin R, S els peus d'aquestes perpendiculars. Demostreu que la distància RS no depèn de la posició del punt P sobre la circumferència.