

Problemes Geometria

1. [LXI.3] Sigui ABC un triangle amb $AC > BC$ i ω la seva circumferència inscrita. Sigui D el punt de tangència de ω amb el costat BC ; E el punt sobre el segment AC tal que $CE = CB$; i F el punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle $\hat{C}$ amb el costat AB . Si EB i CF es tallen en G , demostreu que DG i EF es tallen sobre ω .
2. [LVI 5] Sigui Γ la circumferència circumscrita al triangle ABC . Sigui D el punt mitjà de l'arc AB que conté C i sigui M un punt qualsevol del costat AC . El punt N sobre el costat BC és tal que $AM = BN$. Demostreu que el quadrilàter $CDNM$ és cíclic (els vèrtexs estan sobre una circumferència).
3. [LVIII 3] Sigui ABC un triangle acutangle amb altures AA_1 , BB_1 , CC_1 . Siguin M , N les projeccions de C_1 sobre els costats AC i BC , respectivament. Demostreu que el segment MN talla el segment B_1C_1 en el seu punt mig.
4. [LX 3] Sigui ABC un triangle acutangle, i siguin D , E i F els peus de les altures del triangle sobre els costats BC , CA i AB , respectivament. Demostreu que el perímetre del triangle $\triangle DEF$ és igual a $2S/R$, on S és l'àrea del triangle $\triangle ABC$, i R és el radi de la circumferència que passa pels vèrtexs A , B , C .
5. [LIX 2] Fixat un segment $\overline{AB}$, considerem tots els punts X tals que en el triangle AXB el punt mig M del segment $\overline{AX}$ compleix $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$.

Demostreu que tots aquests punts X estan sobre una mateixa circumferència.

6. [LVII 6] Sigui Γ una circumferència centrada en O i siguin A i B dos punts sobre Γ . Siguin C i D dos punts en els segments OA i OB , respectivament, tals que $OC = OD$. Anomenem r a la recta perpendicular a OA que passa per C i s a la recta perpendicular a OB que passa per D . Suposem que l'angle AOB és prou petit com perquè r i s no intersequin l'arc $\widehat{AB}$. En aquest cas, siguin P_r , Q_r i P_s , Q_s les interseccions de r i s amb Γ , respectivament, de manera que P_r , P_s , A , B , Q_r i Q_s segueixen aquest ordre en Γ . Demostreu que l'àrea delimitada per r , s i l'arc $\widehat{P_rP_s}$ és menor o igual a la delimitada pels segments OA , OB i l'arc $\widehat{AB}$.
7. [LIX 6] Considerem un triangle ABC amb un punt P interior tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^\circ$. Demostreu que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3} (\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}).$$