Problemes Geometria

1. [LVI 5] Sigui Γ la circumferència circumscrita al triangle ABC. Sigui D el punt mitjà de l'arc AB que conté C i sigui M un punt qualsevol del costat AC. El punt N sobre el costat BC és tal que $AM = BN$. Demostreu que el quadrilàter $CDNM$ és cíclic (els vèrtexs estan sobre una circumferència).
2. [LVIII 3] Sigui ABC un triangle acutangle amb altures AA_1, BB_1, CC_1. Siguin M, N les projeccions de C_1 sobre els costats AC i BC, respectivament. Demostreu que el segment MN talla el segment B_1C_1 en el seu punt mig.
3. [LX 3] Sigui ABC un triangle acutangle, i siguin D, E i F els peus de les altures del triangle sobre els costats BC, CA i AB, respectivament. Demostreu que el perímetre del triangle $\triangle DEF$ és igual a $2S/R$, on S és l'àrea del triangle $\triangle ABC$, i R és el radi de la circumferència que passa pels vèrtexs A, B, C.
4. [LIX 2] Fixat un segment $\overline{AB}$, considerem tots els punts X tals que en el triangle AXB el punt mig M del segment $\overline{AX}$ compleix $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$.

   Demostreu que tots aquests punts X estan sobre una mateixa circumferència.
5. [LVII 6] Sigui Γ una circumferència centrada en O i siguin A i B dos punts sobre Γ. Siguin C i D dos punts en els segments OA i OB, respectivament, tals que $OC = OD$. Anomenem r a la recta perpendicular a OA que passa per C i s a la recta perpendicular a OB que passa per D. Suposem que l'angle AOB és prou petit com perquè r i s no intersequin l'arc $\widehat{AB}$. En aquest cas, siguin P_r, Q_r i P_s, Q_s les interseccions de r i s amb Γ, respectivament, de manera que P_r, P_s, A, B, Q_r i Q_s segueixen aquest ordre en Γ. Demostreu que l'àrea delimitada per r, s i l'arc $\widehat{P_rP_s}$ és menor o igual a la delimitada pels segments OA, OB i l'arc $\widehat{AB}$.
6. [LIX 6] Considerem un triangle ABC amb un punt P interior tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^o$. Demostreu que
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3}\left(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}\right).$$