

Problemes Variats

1. [LVIII 5] Determineu tots els nombres primers $p \geq 3$ tals que $(p+1)/2$ i $(p^2+1)/2$ són quadrats perfectes.
2. [LV 7] Proveu que en tot triangle ABC es compleix que

$$\frac{a}{a+b+c} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9} \sin(A)$$

3. [LV 8] Sigui $f(n)$ la suma dels n primers termes de la successió

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots$$

- a) Doneu la fórmula de $f(n)$.
 - b) Demostreu que $f(s+t) - f(s-t) = st$, si s, t són enters positius amb $s > t$.
4. [LIV 4] Siguin a, b, c tres nombres reals tals que $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ per a tot $x \in [-1, 1]$. Proveu que $|a| + |b| + |c| \leq 4$.
 5. [LIX 4] Un tauler 2022×2022 s'ha de recobrir completament amb peces que són triangles rectangles isòsceles amb catets de longitud igual a cada casella del tauler (que són totes quadrades). Hi ha triangles blancs i negres. Un recobriment és bo si dos triangles que es toquen per un costat tenen colors diferents. Quants recobriments bons diferents es poden fer d'aquest tauler?
 6. [LIX 5] Considerem un polinomi quadràtic $p(x) = ax^2 + bx + c$ amb coeficients reals. Suposem que per tot nombre natural $N > 0$ existeix un nombre racional r tal que $p(r) = 1/N$.
 - (a) Demostreu que a, b, c són racionals.
 - (b) Demostreu que, de fet, $a = 0$.
 7. [LVII 3] Trobeu totes les parelles d'enters positius (x, y) que són solucions de l'equació

$$\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y} = x + y.$$

8. [LVI 3] Trobeu els valors del nombre enter positiu n per els quals l'equació

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$$

té solució entera.

9. [LV 4] Proveu que per a tot nombre real α es verifica que
$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1$$
10. [LII 2] Es considera el polinomi $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 1$. Determineu els valors del nombre real a per als quals $P(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Determineu també els valors de a per als quals $(x-1)^3$ divideix el polinomi $P(x) - P(2-x)$.
11. [LI 3] Per a cada enter positiu $n \geq 1$ denotem $a_n = n^4 + n^2 + 1$. Calculeu el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1} en funció de n .
12. [Bonus] Suposem que una recta està pintada de colors Groc i Blau. Demostreu que hi ha tres punts equiespaiats del mateix color.