

## PROBLEMES ARITMÈTICA

1. [LVII 4] Determineu tots els enters positius  $n$  tals que la fracció

$$\frac{8n - 3}{17n - 9}$$

és irreductible.

2. [LVI 6] Sigui  $m$  un nombre enter positiu. Demostreu que el polinomi

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3mx + 3m + 1$$

no té zeros enters i calculeu el màxim comú divisor dels nombres  $P(m)$  i  $P(m) + 3$ .

3. [LIV 6] Sigui  $a$  un nombre enter i  $p \geq 3$  un nombre primer. Demostreu que el número

$$a^p + (a + 1)^p + \dots + (a + p - 1)^p$$

és múltiple de  $p^2$ .

4. [L 4] Busqueu els nombres enters positius  $n$  menors de 201314 tals que en dividir  $3^n$  i  $5^n$  per 13 donin residus 3 i 5 respectivament. Quins són els primer i l'últim?

Quants n'hi ha en total?

5. [LV 2] Trobeu tots els números enters positius amb xifra inicial 6, tals que el número enter que s'obté en esborrar aquest 6 és igual a  $1/25$  del número inicial. Demostreu que no existeix cap número enter que comenci en 6 i tal que en esborrar aquest 6 s'obtingui un número igual a  $1/35$  del número inicial.

6. [LVI 2] Sigui  $n = 2^k$  un nombre enter positiu. Es diu que un subconjunt  $A$  de  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  és bescanoní si compleix que

1) El nombre 1 pertany a  $A$ .

2) Si un nombre  $x$  pertany a  $A$ , llavors  $2x$  no hi pertany.

Es demana

a) Trobar un conjunt bescanoní amb el nombre màxim d'elements quan  $n = 2^5$ .

b) Calcular el nombre màxim de d'elements que pot tenir un conjunt bescanoní en funció de  $k$ .

7. [LVI 3] Trobeu els valors del nombre enter positiu  $n$  per els quals l'equació

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$

té solució entera.

8. [LV 6] Proveu que no existeix cap nombre primer que es pugui escriure de dues formes diferents com a suma de dos parells diferents de quadrats d'enters positius.