Problemes Aritmètica II

1. [XLIII 4] Sigui
$$S=\frac{1\cdot(n-2)}{n(n-1)(n-2)}+\frac{2(n-3)}{n(n-1)(n-2)}+\cdots\frac{(n-2)\cdot 1}{n(n-1)(n-2)}=\sum_{j=2}^{n}\frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}.$$
Demostreu que $S=\frac{1}{6}$.
2. [XLII 5] Trobeu una fórmula per calcular la suma
$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n.$$
3. [LIV 3] Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió escrictament creixent d'enters positius tals que per a tot $n\geq 2017$ es compleix que a_n divideix $(a_1+a_2+...+a_{n-1})$. Proveu que existeix un enter positiu N tal que $a_n=a_1+a_2+...+a_{n-1}$ per a tot $n>N$.
4. [L 1] Sigui $A=\{1,2,\dots,n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n, el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.
5. [XXXII] Calculeu el màxim comú divisor de
$$\binom{n}{k},\quad\binom{n+1}{k},\dots,\quad\binom{n+k}{k}$$
on $n\geq k$ són nombres naturals.

Problemes Aritmètica II

1. [XLIII 4] Sigui
$$S=\frac{1\cdot(n-2)}{n(n-1)(n-2)}+\frac{2(n-3)}{n(n-1)(n-2)}+\cdots\frac{(n-2)\cdot 1}{n(n-1)(n-2)}=\sum_{j=2}^{n}\frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}.$$
Demostreu que $S=\frac{1}{6}$.
2. [XLII 5] Trobeu una fórmula per calcular la suma
$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n.$$
3. [LIV 3] Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió escrictament creixent d'enters positius tals que per a tot $n\geq 2017$ es compleix que a_n divideix $(a_1+a_2+...+a_{n-1})$. Proveu que existeix un enter positiu N tal que $a_n=a_1+a_2+...+a_{n-1}$ per a tot $n>N$.
4. [L 1] Sigui $A=\{1,2,\dots,n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n, el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.
5. [XXXII] Calculeu el màxim comú divisor de
$$\binom{n}{k},\quad\binom{n+1}{k},\dots,\quad\binom{n+k}{k}$$
on $n\geq k$ són nombres naturals.