

El elipsoide de Monge y las líneas de curvatura*

Jorge Sotomayor**

1. El Elipsoide

Esta historia se inicia en una calurosa noche de octubre de 1970 en Río de Janeiro. Víctima del insomnio, decidí figonear los libros que mi esposa había acomodado cuidadosamente en nuestro estante. Recientemente ella había colocado allí un buen número de libros suyos.

Mi cándida y reposada actitud contrastaba con una extraña tensión que emanaba del estante, inundando la sala. Intrigado me vi impelido a averiguar la causa. Arrinconado en una esquina, envuelto por una elegante pasta verde, pulsaba inquieto el libro de Struik "*Lecciones de Geometría Diferencial Clásica*", Aguilar 1955.

Mi natural atracción por la Geometría y por la lengua de Cervantes me impulsaron, ingenuamente, a abrirlo. Y lo hice justamente en una página de la cual, como si hubiera estado al acecho, surgió la figura del elipsoide triaxial que ilustra esta página.

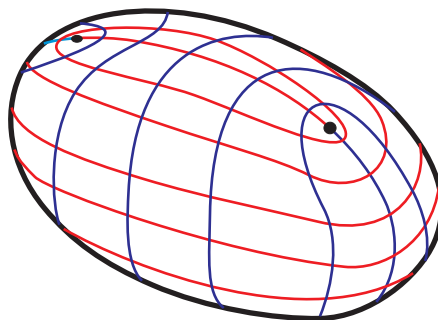


Figura 1: El Elipsoide de Monge

*Traducción libre, adaptación y actualización del artículo publicado en Portugués en *Matemática Universitária*, SBM, 15, 1993.

**El autor contó con el apoyo parcial del CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), Brasil.

La Fig. 1 muestra el elipsoide de ejes distintos

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, a > b > c > 0,$$

sus líneas de curvatura principal y puntos umbílicos. Las separatrices son las líneas que conectan dichos puntos.

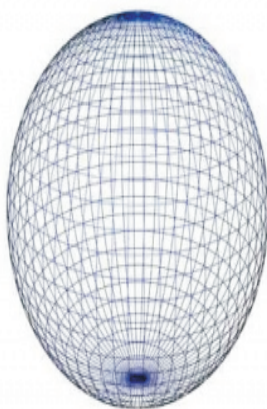


Figura 2: Elipsoide de Revolución

La Fig. 2 ilustra las Líneas Principales en el Elipsoide de Revolución. En la Esfera todos los puntos son umbílicos.

Súbitamente me asaltó la sensación de estar cayendo en una celada. Había transcurrido más de siglo y medio desde que el ilustre matemático francés Gaspard Monge¹ lo concibió, calculándole sus líneas de curvatura principal, y localizándole sus cuatro puntos umbílicos. En ese lapso, el Elipsoide recorrió millares de kilómetros, transpuso montañas y cruzó anchos mares, impreso en libros, restringido a una asfixiante existencia bidimensional, para que en esa noche tropical nos enfrentásemos.

Ya en 1961 había yo hojeado la edición original inglesa del Struik, pero no me percaté de esa figura. En aquella época también solía consultar el clásico “*Geometry and the Imagination*” de Hilbert² y Cohn Vossen, no tanto para leerlo como para contemplar sus figuras. De este libro, según anota Struik,

¹<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Monge.html>

²http://pt.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

fue extraída la aludida figura. Seguramente la habría mirado. ¿Cómo podría haberla ignorado?

Había estudiado con minuciosa atención otros dos libros excelentes de nivel comparable al de Struik: el de Willmore “*Introduction to Differential Geometry*”, como estudiante de pregrado en 1961, y el de O’Neill “*Elementary Differential Geometry*”, como joven profesor en 1967. Sin embargo, estos dos austeros modelos de exposición geométrica no contienen ni sombra de la fascinante figura. Cabe anotar que O’Neil propone un ejercicio comentado en el que enseña a localizar los puntos umbílicos del elipsoide.

Fue como un amor a primera vista. La simetría y belleza de sus curvas me conquistaron de inmediato. Nos contemplamos por varios minutos, como midiéndonos. Leí rápidamente el texto adyacente, así como otras secciones pertinentes.

Pero el lector de esa noche singular, después de haber recorrido caminos de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, ya tenía su visión moldeada por la Estabilidad Estructural y las Bifurcaciones³, y ya no era el bisoño estudiante de 1961.

En pocas horas de lectura activa realicé un viaje matemático que, cronológicamente, abarcaba casi dos siglos.

Allí estaban los resultados clásicos relativos a las curvaturas de las superficies. Recordé la Fórmula de Euler que expresa la curvatura normal en términos de las curvaturas y direcciones principales.

Las líneas de curvatura principal son curvas en la superficie a lo largo de cuyas direcciones tangentes (denominadas direcciones principales) ésta se dobla extremalmente en el espacio \mathbb{R}^3 . Las medidas escalares de dichas curvaturas extremales, se llaman curvaturas principales. Una de ellas, la mínima, se denota k_1 ; la otra, la máxima, se designa por k_2 . Sus valores son dados por la curvatura normal (la segunda forma fundamental de la superficie) evaluada en las direcciones principales. Así, $k_1 < k_2$, excepto en los puntos umbílicos, donde $k_1 = k_2$.

Se debe a Euler⁴ (“Recherches sur la courbure des surfaces”, *Mémoires de l’Académie de Sciences de Berlin*, 16, 1760) el primer estudio de estos objetos matemáticos, con el que inaugura el uso del Cálculo Diferencial en la investigación de la geometría de las superficies. Deriva de este trabajo que,

³http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory

⁴http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

en general, las direcciones principales son ortogonales.

En los puntos umbílicos, las curvaturas principales coinciden. Sólo fuera de éstos, las direcciones principales están bien definidas y determinan en la superficie un par de campos de líneas tangentes mutuamente ortogonales, denominados campos de líneas principales; uno de ellos, L_1 , corresponde a la curvatura principal mínima, el otro, L_2 , a la máxima.

La fórmula de Euler establece que la curvatura normal $k_n(\theta)$ en la dirección que forma un ángulo θ con la dirección principal mínima, es dada por

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta).$$

Esta fórmula equivale a la diagonalización de la segunda forma fundamental por medio de una rotación.

Con Struik recordé el Teorema de Dupin⁵ que permite determinar las líneas de curvatura principal de las superficies que pertenecen a una familia triplemente ortogonal. Para esto es suficiente intersectar la superficie en estudio con las de las dos familias ortogonales a ella. En el caso del Elipsoide de Monge, deberán tomarse los hiperboloides de una y dos hojas, los que junto con éste forman el llamado sistema de cuádricas homofocales. Estas cuádricas son también las superficies coordenadas del denominado sistema de coordenadas elipsoidales en \mathbb{R}^3 .

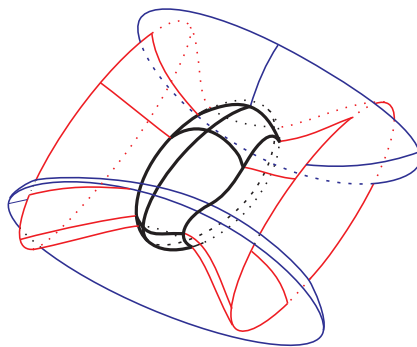


Figura 3: Teorema de Dupin

La Fig. 3 ilustra el Teorema de Dupin para las familias de superficies cuádricas homofocales: Elipsoides e Hiperboloides de una y dos hojas.

⁵http://fr.wikipedia.org/wiki/Charles_Dupin

Estaba extasiado y gratificado. La lectura me había permitido atestiguar un notable salto cualitativo triple en la evolución de las ideas matemáticas.

En efecto, en un primer tiempo, Euler estableció las definiciones y conceptos básicos. El segundo paso fue dado por Monge, calculando el ejemplo clave. Finalmente, Dupin demostró un teorema general que unifica los casos particulares conocidos.

En el instante en que admiraba la foto del Struik que ilustra con una maqueta de yeso el Teorema de Dupin, noté que el elipsoide y el libro pulsaban en forma desincronizada. El primero aceleraba en relación al segundo, debatiéndose como si estuviera irritado.

Curiosamente, me pareció ser esta una reacción de protesta perfectamente normal, partiendo de quien se le hubiese descubierto algún secreto íntimo.

De hecho, su Configuración Principal, análoga para las superficies al Retrato de Fase, síntesis cualitativa de trayectorias y puntos singulares de las ecuaciones diferenciales, descubierta por Monge por métodos artesanales, había sido reducida a una explicación de carácter sintético y elemental por su discípulo Dupin, aunque varios lustros después.

De pronto, el elipsoide se separó del papel, irguiéndose recobró su maravillosa plenitud espacial. Giró alrededor de sus ejes evidenciando sus simetrías y mostrando sus bellas y cerradas curvas principales, enseñando impudicamente sus cuatro puntos umbílicos, cada uno de los cuales perforado por un par de separatrices, que los conectaban dos a dos. Paulatinamente, comenzó a alterar su eje principal menor, aumentándolo y manteniendo fijos los otros dos. Sin embargo, este caprichoso ejercicio de exhibicionismo no afectaba cualitativamente su configuración principal; solamente los puntos umbílicos apareados, se aproximaban, lenta e inexorablemente a los polos. En el instante en que el eje menor coincidió con el intermedio, los puntos umbílicos apareados colidieron en los polos y las separatrices desaparecieron. Fue fugaz el instante en que se presentó como un elipsoide de revolución, con su configuración principal invariante por rotaciones en torno del eje mayor. Después, a medida que el eje que había sido menor se tomaba intermedio, los puntos umbílicos se separaron nuevamente para desplazarse en el plano ortogonal al que anteriormente se encontraban. Ahora, en este plano también



G. Monge

se habían localizado las nuevas separatrices.

En seguida, el elipsoide retrocedió en su deformación hasta recuperar su forma de superficie de revolución. En esta simétrica posición ensayó otras deformaciones, variando las longitudes del eje común y del eje mayor. Sin embargo, nada de esencial sucedía con su configuración principal hasta que los tres ejes coincidieron. Fue entonces que todas las líneas de curvatura se esfumaron para dar lugar a una bola repleta de puntos umbílicos.

Experimentó repetidamente estas y otras deformaciones, permutando los ejes sujetos a variación. Parecía un espectáculo con pocas novedades, que ya corría el riesgo de tomarse monótono.

Inesperadamente, comenzó a dilatar nerviosamente su eje mayor, ocupando un enorme espacio diagonal en la sala, amenazando romper la ventana y liberarse de la humillante condición de compacidad.

¿Pretendía transformarse en un hiperboloide?

Yo ya empezaba a ponerme nervioso ante esa situación que escapaba totalmente a mi control.

¡Craack!...Finalmente, la ventana estalló. Ese preciso instante coincidió con el del ruido que el Struik, resbalándose de mi mano, hizo al estrellarse con el suelo.

Recobraba yo la consciencia, despertando después de una distraída dormitada.

Dos referencias del Struik atrajeron mi atención. Una era a una nota en el famoso tratado clásico de Gaston Darboux⁶ “*Leçons de la Théorie des Surfaces*”, y la otra a un artículo en *Acta Mathematica* (1904), de Allvar Gullstrand⁷. Ambas eran relativas a las configuraciones posibles de las líneas de curvatura principal en la vecindad de un punto umbílico. Las anoté.

Estaba satisfecho, a partir del Teorema de Dupin, el elipsoide con su danza onírica me había ayudado a demostrar lo siguiente:

Consideremos el espacio \mathcal{Q} de superficies cuádricas compactas. Este, topologizado por los coeficientes, tiene dimensión 9.

Las superficies cuyas configuraciones principales son Estructuralmente Estables (o sea, que no se alteran topológicamente por pequeñas perturbaciones de sus coeficientes), son precisamente los elipsoides cuyos tres ejes son distintos, los de Monge). Denotemos esta clase por \mathcal{E}_3 , la que constituye

⁶<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Darboux.html>

⁷http://pt.wikipedia.org/wiki/Allvar_Gullstrand

un abierto y denso en \mathcal{Q} .

Dentro de $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{E}_3$, aquellas cuyas configuraciones principales son Estructuralmente Estables de Primer Orden (o sea, que no se alteran por pequeñas perturbaciones dentro de \mathcal{Q}_1), son los elipsoides de revolución no esféricos; estos forman una subvariedad \mathcal{E}_2 , de codimensión 2 en \mathcal{Q} .

También pueden formularse resultados análogos para las cuádricas no compactas.

¿Cómo serán las configuraciones principales estructuralmente estables de las superficies diferenciables compactas en general, no necesariamente cuadráticas o algebraicas? Indagué conmigo mismo.

En ese momento, ya entrada la alta noche, me invadió el cansancio y me retiré a reposar.

2. El problema fundamental

A primera hora de la mañana siguiente me dirigí a la biblioteca del “Instituto de Matemática Pura e Aplicada” (IMPA) y retiré para consultar el Darboux y el Gullstrand.

Interpreté que lo que el primero hacía era una descripción de los tres casos de puntos umbílicos genéricos, caracterizados por condiciones algebraicas en las terceras derivadas de la superficie, representada por una función en coordenadas de Monge centradas en el punto umbílico. Todo indicaba que las configuraciones principales de estos tipos también resultaban ser estructuralmente estables, localmente. Como era usual en trabajos de 1886, se trataba de objetos analíticos; superficies en nuestro caso.

Como era normal para mí en estas circunstancias no esperaba asimilar en las primeras lecturas los detalles de las demostraciones.

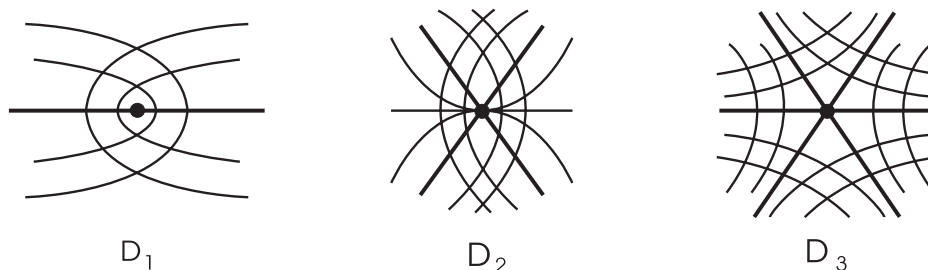


Figura 4: Puntos umbílicos de Darboux .

La Fig. 4 ilustra los puntos umbílicos de Darboux para una superficie en la forma de Monge:

$$z = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3 + O[(x^2 + y^2)^2],$$

en la cual el coeficiente del término x^2y ha sido eliminado por medio de una rotación. Con esta expresión las condiciones de Darboux se escriben:

(T) Condición de Transversalidad: $b(b - a) \neq 0$;

(D) Condición Discriminante:

$$D_1: \frac{a}{b} > \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2;$$

$$D_2: \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1; a \neq 2b;$$

$$D_3: \frac{a}{b} < 1.$$

Estas expresiones aparecen en nuestros trabajos, citados al final de la sección 7. Las de Darboux son algo más complicadas.

A partir de las figuras y fórmulas, ya que no podía leer el texto en alemán, se me antojó entender del trabajo de Gullstrand que, después de repasar la contribución de Darboux, él proponía una descripción de los casos no genéricos iniciales, para los cuales no se aplicaba la teoría desarrollada por el geómetra francés.

Aquello parecía una especie de protocolo para iniciar una investigación de las bifurcaciones de los puntos umbílicos. Me entusiasmé pues, de hecho, en esa época me interesaban enormemente los problemas sobre bifurcaciones de las ecuaciones diferenciales.

Mi imaginario geométrico se había enriquecido notablemente con relación a la noche anterior. De regreso a casa, intenté organizar en forma coherente los nuevos datos con los ya adquiridos, pero estaba extenuado. Me retiré a descansar más temprano que lo usual.

Desperté en la madrugada. Sin vacilar, y con la certeza de estar contribuyendo para el cuarto tiempo del salto cualitativo múltiple que la lectura del Struik me había permitido atestiguar la noche anterior, escribí:

El Problema Fundamental para las Configuraciones Principales de las superficies diferenciables compactas y orientadas, consiste en demostrar los dos teoremas siguientes:

1.- Las condiciones necesarias y suficientes para que una superficie tenga su Configuración Principal Estructuralmente Estable, por deformaciones C^3 pequeñas, son las siguientes:

- a) Los puntos umbílicos deben ser todos como los de Darboux.
- b) Las líneas de curvatura periódicas (ciclos principales) deben ser todas hiperbólicas. Esto es, su Transformación de Poincaré, o de Primer Retorno, debe tener derivada distinta de 1.
- c) No debe admitir conexiones de separatrices umbílicas.
- d) Los conjuntos límites de toda línea de curvatura no periódica deben ser puntos umbílicos o ciclos principales.

2.- Dentro del espacio de las superficies compactas orientadas, provisto de la topología C^3 , las superficies que satisfacen las condiciones (1.a) a (1.d) forman un conjunto que es

- a) abierto y
- b) denso.

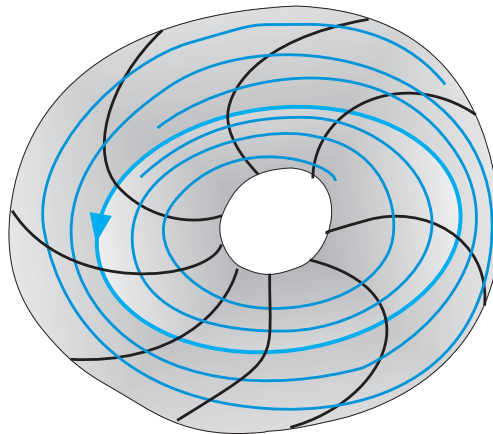


Figura 5: Línea de curvatura periódica hiperbólica .

En la Fig. 5 se ilustran las líneas de curvatura vecinas de una periódica hiperbólica, con derivada menor que 1. Las flechas están colocadas para indicar una orientación convencional local; las líneas de curvatura, en general, no son orientables globalmente. Considere, por ejemplo, una vecindad de un punto umbílico de Darboux, Fig. 4.

Retrospectivamente, sería justo decir que el Problema Fundamental era el quinto tiempo del salto cualitativo, ya que el cuarto —el caso local para las

singularidades— habría sido ejecutado por Darboux, de hecho sin él saberlo.

3. En compás de espera

Trabajé con ansiedad intentando organizar un esquema de demostración. La parte (2.a), así como la suficiencia de las condiciones (1.a) a (1.d), parecían factibles.

Detecté serias dificultades para establecer los aspectos globales de las condiciones necesarias y, sobre todo, la densidad (parte 2.b) de las condiciones (1.b), (1.c) y (1.d).

Me encontré utilizando toda la experiencia que había adquirido con la metodología establecida por Peixoto en su famoso trabajo⁸ sobre la genericidad de los campos de vectores Estructuralmente Estables en variedades bidimensionales publicado en *Structural Stability on two-dimensional Manifolds*, Topology, 1962.

En ese momento tomé conciencia de la influencia que ese trabajo tenía en la formulación que le había dado al Problema Fundamental.

Constaté con preocupación que ignoraba cualquier ejemplo de superficie compacta del tipo que había definido por imposición de las condiciones (1.a) a (1.d). ¿Cómo, entonces, podría demostrar que estas fuesen densas?

Perplejo, salí para ir directamente a la biblioteca, en busca de ejemplos. Esta tarea me tomó varios días.

Sin embargo, no encontré un solo ciclo principal aislado, mucho menos hiperbólico. Nada hallé sobre superficies con líneas de curvatura recurrentes, esto es que violaran la condición (1.d), como lo hacen las curvas integrales de los campos irracionales en la superficie del Toro de revolución.

La problemática fundada por Poincaré⁹, casi 100 años antes, estudiada por la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales y por un sector de los Sistemas Dinámicos, no había penetrado este aspecto de la Geometría Diferencial Clásica. En esto contrastaba con el progreso que ideas dinámicas habían aportado al estudio de las geodésicas. Me invadió un sentimiento de profunda soledad.

Comencé a hacer cálculos, reactivando mis conocimientos de Geometría Diferencial, latente desde el tiempo de Willmore y el O'Neil, complementada ahora por mi descubrimiento explícito del Struik.

⁸<http://cienciahoje.uol.com.br/view/1595>

⁹http://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_poincare

Discutí mi proyecto con varios colegas, especialistas en Sistemas Dinámicos y Geometría Diferencial. Lamenté que Peixoto¹⁰ estuviera viajando, fuera de Río de Janeiro, todo ese semestre.

Sentí que consideraban mi proyecto con interés y simpatía. Sin embargo, ninguno arriesgó una corazonada esclarecedora. Quise ver en esa actitud una punta de saludable escepticismo.

Blaine Lawson, de visita al IMPA, se mostró muy receptivo e hizo un pronunciamiento francamente positivo, que mucho me estimuló:

“Si funciona lo que propones, estarás abriendo una nueva área.”

4. São Paulo, Salvador, ICTP, IHES

Los cálculos me condujeron a una fórmula para la derivada de la transformación de Poincaré, en términos de la Curvatura Media ($H = (k_1 + k_2)/2$) y de los Símbolos de Christoffel. En ese momento, a pesar de ser obvio el carácter intrínseco de la derivada en cuestión, no conseguía librarme de las coordenadas locales en las que estos símbolos se escribían.

Acumulé una colección enorme de datos bibliográficos sobre las líneas de curvatura y puntos umbílicos, la mayoría de ellos en alemán, ninguno concluyente. Entre estos estaban los trabajos relativos a la sorprendente Conjetura de Carathéodory¹¹:

Toda superficie convexa y compacta posee por lo menos dos puntos umbílicos.

Curiosamente, para ésta no encontré ningún registro escrito de su proposición por el autor. Supuse que fue hecha oralmente en seminarios con sus discípulos¹².

Años más tarde me informé que esta conjetura era considerada demostrada para el caso de superficies analíticas, aunque yo nunca tuve la felicidad de entender con plenitud ninguna de las demostraciones ya publicadas. Más aún, todos los especialistas que pude interrogar sobre esta materia, estaban en la misma situación que yo.

La conjetura está francamente abierta para superficies C^∞ . Sin embargo, para el caso genérico es trivial. De hecho, por tener los puntos Darbouxianos

¹⁰<http://www.abc.org.br/sjbic/curriculo.asp?consulta=peixoto>

¹¹<http://en.wikipedia.org/wiki/Caratheodory>

¹²Verifiqué que la reciente biografía, por Maria Georgiadou, Springer, 2004, tampoco dilucida el origen de esta conjetura.

Índice $\pm 1/2$, deben haber por lo menos cuatro de éstos para poder sumar la Característica de Euler de la superficie (en este caso igual a 2).

Me intrigó enterarme que Gullstrand, el autor para mí inicialmente desconocido, había sido nada menos que el Premio Nobel de Medicina de 1911, laureado por su contribución a la Oftalmología. El trabajo que yo había consultado era la parte matemática de aquel que lo hiciera merecedor al premio.

Por los fragmentos de que disponía, me parecía que estaba en el buen camino, sin embargo no conseguía llegar a un resultado matemático redondo sobre el proyecto que me había propuesto con el Problema Fundamental.

Pasé el mes de marzo de 1971 en São Paulo. Mi colega Edgard Harle, geómetra y germanista, me ayudó a traducir partes de varios textos alemanes de los años 30. En el artículo de J. Fischer (*Deutsche Math.*, 1935), redactado en gótico, encontramos evidencia numérica de la existencia de puntos umbílicos espirales, de los cuales las líneas de curvatura se aproximan rodeándolo, sin ser asintóticas a ninguna dirección definida.

Discuté el Problema Fundamental con Waldyr Oliva y otros colegas de la Universidad de São Paulo. Me solicitaron que hiciera una presentación para, al menos, plantear los problemas que había encontrado.

Organicé el material de que disponía para hablar de los antecedentes clásicos: Euler, Monge, Dupin; de las transformaciones geométricas que preservan las configuraciones principales: los movimientos rígidos, los pequeños desplazamientos paralelos a lo largo de las normales, las inversiones, etc. Para establecer alguna contribución personal, planeaba demostrar la fórmula para la derivada de la transformación de retorno que había encontrado.

A mi retorno a Río de Janeiro concluí que, aunque no hubiera hecho ningún progreso concreto en la solución del Problema Fundamental, la visita a São Paulo y la atención que Harle y Oliva me dieron, así como la preparación para la presentación, me estimularon y ayudaron a reforzar la convicción de que estaba caminando en el rumbo correcto.

Sobre todo, lo que Harle me ayudó a entender del artículo de Fischer me proporcionó ejemplos de configuraciones principales no-integrables. Esto es, que no poseen una integral primera. Pues así serían las superficies que verificasen las condiciones (1.b) y (1.d).

Nótese que en el caso de las cuádricas, superficies de revolución y todos los otros ejemplos calculados en la Geometría Diferencial Clásica, por el mismo hecho de derivar de un cálculo, hay siempre una integral primera.

Los puntos enunciados en el proyecto se imponían ante mi espíritu con la fuerza de axiomas, pero no vislumbraba una forma de producir una demos-

tración matemáticamente convincente.

Sin embargo, yo continuaba trabajando con tenacidad y entusiasmo.

Llegó el Coloquio Internacional de Sistemas Dinámicos de Salvador, en julio de 1971. Allí conocí al famoso matemático francés René Thom¹³ con quien discutí El Problema Fundamental.

Fue un interesante diálogo entre representantes de culturas distintas. Para él, los umbilicos representaban catástrofes¹⁴, dentro del conjunto focal o cáustica (envolvente de la familia de rectas normales a la superficie¹⁵). Cuando yo preguntaba algo sobre las separatrices umbílicas asociadas a los puntos de Darboux, él me hablaba de las “cordilleras” (“ridges”) asociadas a los umbílicos (focales) hiperbólicos y elípticos de las superficies genéricas. Yo mencionaba las redes de líneas de curvatura principal en las superficies, él me respondía con el conjunto focal en el espacio ambiente.

Sin embargo, las líneas de curvatura y los puntos umbílicos continuaban latentes en mi pensamiento.

Antes de viajar a Trieste, al “International Centre for Theoretical Physics” (ICTP), y a París, al “Institut de Hautes Etudes Scientifiques” (IHES), en julio de ese año, Carlos Gutiérrez, candidato al doctorado en el IMPA, me solicitó que le propusiera un problema de tesis. Sin pensarlo dos veces, saqué de mi maletín una copia del artículo de Darboux (que siempre me acompañaba) y le sugerí:

“Haga una demostración moderna de este teorema, de modo que los mortales puedan entenderla. Pruebe que son genéricas las condiciones (1.a) a (1.d) del Problema Fundamental. Atención con la última.”

En ese viaje llevé conmigo buena parte del material bibliográfico pertinente para el caso que tuviera que escribirme con Gutiérrez. Conocí varios matemáticos suecos en Trieste. A todos les hablé de Gullstrand. Preguntaba por la revista médica en la que había publicado su contribución a la Oftalmología. Más de uno me prometió mandarme una copia. Felizmente, esta nunca llegó a mis manos. ¿Qué hubiera hecho con otro artículo en alemán, ahora sobre Las Aberraciones de la Visión Humana?

Hacia fines de noviembre, ya en el IHES, recibí una carta de Gutiérrez. Él había decidido considerar una forma más general de Campos de Líneas en variedades bidimensionales. En ese contexto, ya tenía una teoría coherente

¹³<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thom.html>

¹⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Catastrophe_theory

¹⁵[http://en.wikipedia.org/wiki/Caustic_\(optics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Caustic_(optics))

de Genericidad y Estabilidad Estructural. Esa teoría general, sin embargo, no aportaba nada que fuera esclarecedor sobre la genericidad de los campos de líneas principales y sus singularidades (los umbílicos), dentro de las condiciones (1.a) a (1.d) del Problema Fundamental.

Lo estimulé a continuar en el camino que se había trazado, que también me parecía interesante. En éste convergió más tarde para redactar su Tesis de Doctorado.

Al reencontrarnos en enero de 1973, discutimos rápidamente de las dificultades encontradas al atacar el problema sugerido y pasamos a considerar su enfoque más abstracto y general.

De las líneas de curvatura y los puntos umbílicos de Darboux, no volvimos a hablar durante varios años.

5. Dijon, Beaune

El segundo semestre de 1975 visité Dijon por primera vez. Después de recorrer varios hoteles, llegué a hospedarme en el pequeño Hotel Monge, localizado en la calle del mismo nombre, en el corazón del fascinante barrio llamado “Dijon Historique”. Allí me quedé durante una semana.

Mi amigo Robert Roussarie de la Universidad de Dijon, me llevó a conocer las famosas viñas de la “Côte d’Or”. En esa y en posteriores visitas a Dijon, comprendí que la visita a las viñas constituía, para los dijoneses, un ritual tan obligatorio como la de restos arqueológicos incaicos para los peruanos o la del “Pão de Açucar” para los cariocas.

Prolongamos la visita hasta la histórica Beaune. Allí, después de recorrer impresionantes construcciones medievales, me vi cara a cara con una estatua de Monge¹⁶, quien fuera originario de esa ciudad. Mi mente evocó la figura del elipsoide con su danza onírica en aquella inolvidable noche carioca de 1970. Compré algunos vinos, especialidad de la región, y retornamos a Dijon.

El paseo había excitado mi pensamiento. Me intrigaba la coincidencia de mi encuentro con la estatua y con el nombre del hotel. Afloró el recuerdo del problema latente. Desprovisto del material bibliográfico pertinente, me limité a saborear uno de los vinos y fui a dormir.

Esa noche tuve el más fantástico de los sueños. Monge se me aparecía y me preguntaba en tono de censura:

¹⁶La imagen de esta estatua (fig. 6) se ha obtenido en http://perso.orange.fr/jean-paul.davalan/liens/liens_mathhist.html



Figura 6: Estatua de Monge en Beaune

“¿Qué hiciste con mi elipsoide?. ¿Qué estás esperando, hombre?”

Sorprendido y tímido me retraje, preventivamente. Aunque me había tuteado, yo no sabía como tratarlo. Reaccionando, repliqué:

“El elipsoide es muy bonito, pero... ¿qué me dice Ud. de las otras superficies no cuadráticas, las cúbicas, por ejemplo; ha meditado ya sobre el caso genérico y la caracterización de la estabilidad estructural en esa clase o en la clase más amplia de superficies C^∞ ?”

“Y las líneas de curvatura recurrentes, por ventura existen, ¿conoce Ud. ejemplos concretos?”

Fue él quien entonces se retrajo. El multifacético genio de la Escuela de Ingeniería Militar de Mézières, inventor de la Geometría Descriptiva y, al decir de Struik, pionero entre los geómetras de primera magnitud a dominar el Análisis, se sonrojó perplejo.

Como representante europeo de las Matemáticas del siglo XVIII, no podía

él entender mi jergonza y problemática, típicas de un anónimo reducto tropical de los años 60, en el siglo XX. Además, a pesar de haber escogido el trato cortés, el ritmo con que formulara mis preguntas había sido vertiginoso y sumamente severo.

Confieso que me conmovió ver confuso, aunque por un fugaz instante, a ese gigante de las Matemáticas de antaño (y de siempre). Se rehizo, rápidamente, replicando:

“¿De qué diablos estás hablando?”

Fue así como yo, un oscuro desconocido, le explicó al gran Monge toda la problemática de la Estabilidad Estructural de las Ecuaciones Diferenciales, las recurrencias y el difícil problema del “Closing Lemma” (que plantea deformar ligeramente la ecuación a fin de que las órbitas recurrentes se tornen periódicas). Asuntos que lo superaban en casi 150 años. Me vi extrayendo y adaptando ejemplos de sus propios trabajos. El entendía todo con una rapidez increíble, cual esponja matemática, absorbía las (para él) novedades.

Monge no era hombre de evadir desafíos, como ya lo había demostrado en la campaña Napoleónica de Egipto.

“Déjalo conmigo”, dijo, tomando la página en que había formulado mis problemas relativos a las líneas de curvatura. Se instaló a trabajar en el pequeño escritorio que había en mi habitación. Llenaba páginas y más páginas, las que rápidamente rebasaron el espacio disponible en la mesa, esparciéndose por el suelo. Hacía largos cálculos y bellísimos dibujos (en estos últimos usaba su técnica del “rebatimiento”). Mientras tanto, yo aprovechaba el tiempo para preparar el seminario que debería pronunciar al día siguiente en la Universidad de Dijon. Pasaron horas.

Finalmente, me dijo triunfalmente:

“Resolví tu problema, mira lo tengo aquí...”

En ese instante, cuando me mostraba la primera de las numerosas páginas que había escrito, sonó el despertador que yo mismo, en imperdonable error, colocara en la víspera para madrugar y poder preparar el ya mencionado seminario.

Intenté, sin éxito, dormir nuevamente a fin de conocer el desenlace. Ingenualmente, repetí el rito de beber un vaso de vino, luego otro,... ¡Nada!

La frustración y la soledad me invadieron nuevamente, y también el pesar.

6. Transparencia plástica

En julio de 1976 reencontré a mi amigo Ivan Kupka en la Tercera Escuela Latino Americana de Matemáticas, en Río de Janeiro. Él me tradujo porciones sustanciales del Gullstrand y me ayudó a interpretar sus resultados. Quedó claro para mí que el interés fundamental de este autor se dirigía al conjunto focal y sus cordilleras (“ridges”). Me sorprendió saber que él ya tuviera en su texto la descripción de los umbílicos hiperbólicos y elípticos, del conjunto focal. Sin embargo, no aclaraba en nada los fundamentos para justificar las figuras de Darboux y, mucho menos, las otras más degeneradas que él consideraba en su trabajo. En lo relativo a las ecuaciones diferenciales, unicidad de las separatrices umbílicas, por ejemplo, estaba muy lejos del modelo de rigor matemático actual.

Continué manteniendo un gran interés en el asunto. Coloqué el material bibliográfico básico y mis anotaciones en una bolsa plástica. La llevaba de arriba para abajo conmigo. Por largas temporadas, cuando mi maletín estaba demasiado pesado, la dejaba en casa, para retomarla meses después y volver a transportarla.

La transparencia del plástico me obligaba a ubicar y a tener siempre presente al Problema Fundamental. El extraño ceremonial de transportarlo me daba la sensación de poseerlo, de estar trabajando en él, secretamente.

En efecto, de vez en cuando me limitaba a algún ejercicio contemplativo más prolongado pero sin atar ni desatar las dificultades matemáticas fundamentales.

7. Colaboración

A inicios de 1980 nos llegó una directiva de la Administración Central del CNPq: Los investigadores deberían organizarse en equipos, como en el fútbol, y presentar proyectos conjuntos.

Esta ingenua medida administrativa terminó siendo beneficiosa para mí, para Gutiérrez y también para el Problema Fundamental de las Líneas de Curvatura. Pues en esa época los problemas matemáticos tenían vida propia, como las personas.

Comprometí a Gutiérrez a unir fuerzas conmigo para trabajar en el Problema. Ya habíamos desarrollado anteriormente una extensión para Variedades con Singularidades de algunos resultados sobre Estabilidad Estructural

debidos a Peixoto (*Proceedings of the London Mathematical Soc. (1982)*). Esta extensión, sin embargo, más parecía un ejercicio comparado con la magnitud que había adquirido la actual, para líneas de curvatura.

El progreso fue sorprendentemente rápido, teniendo en cuenta que cada uno de nosotros trabajaba simultáneamente en proyectos individuales.

Los tres habíamos madurado, nosotros dos y el Problema también. Desenterré la fórmula para la derivada, T' , de transformación de retorno, T , de una línea de curvatura periódica γ . Conseguimos librarnos de los incómodos símbolos de Cristoffel.

En términos de las curvaturas Media H y Gaussiana K , obtuvimos la bellísima fórmula siguiente:

$$\log(T') = \pm \int_{\gamma} dH / (H^2 - K)^{1/2}.$$

Equivalentemente, en términos de las curvaturas principales $k_1 < k_2$, ya que $H = (k_1 + k_2)/2$ y $K = k_1 k_2$, también se puede escribir:

$$\log(T') = \pm \int_{\gamma} dk_2 / (k_2 - k_1).$$

De esta expresión derivamos un método de perturbación para convertir en hiperbólicas las líneas de curvatura periódicas.

Usando un método muy próximo al de la resolución (“blowing up”) tradicional, usado para reducir el estudio de puntos singulares complicados a otros más simples, justificamos completamente las figuras de Darboux para las superficies de clase C^4 . Esto ya constituía una novedad con relación al caso analítico considerado por el maestro francés, cuya demostración, como ya mencioné, no había entendido con plenitud.

Sobre las líneas de curvatura recurrentes, Gutiérrez, en tono de sentencia, diagnosticó:

Es posible conseguir una aproximación en clase C^2 que las destruya. El paso a C^3 será muy difícil.

Construimos el ejemplo de un Toro en \mathbb{R}^3 sin puntos umbílicos y con líneas de curvatura recurrentes, cuya inmersión resultó bastante distante de la del Toro estándar de revolución.

Las piezas del rompecabezas parecían encajar. ¡Disponíamos de una versión sustentable!

Había llegado la hora de hacer una comunicación amplia de los resultados obtenidos. El Simposio Internacional inaugurando las nuevas instalaciones del IMPA en 1981, constituyó una ocasión propicia.

En sorteo, fui yo el escogido por el azar para ser quien hablara.

8. La conferencia y el retorno del elipsoide

Revisando todo el esquema del trabajo, comencé a prepararme para la conferencia.

Surgieron dudas. En la víspera de la conferencia quedamos hasta tarde discutiendo con Gutiérrez cómo sería la presentación. En ese momento nos concieniamos que no disponíamos de ningún ejemplo de recurrencia distinto de aquel en el Toro ya citado. En particular, no teníamos ninguno en superficies de género cero, o sea en las esferas inmersas, provistas necesariamente de puntos umbilicos. Y para empeorar el cuadro, el ejemplo del Toro era demasiado técnico para que yo pudiera explicarlo en forma geométrica durante la conferencia.

Estábamos en la incómoda posición de ser capaces de eliminar todas las líneas de curvaturas recurrentes, sustituyéndolas después de una aproximación C^2 , por líneas de curvatura periódicas o, en algunos casos, por conexiones de separatrices umbílicas. Sin embargo, en concreto sólo conocíamos el ejemplo del Toro.

¿Y si alguien, indagando por ejemplos, hiciera la pregunta? Peor todavía, ¿Y si no existieran más ejemplos de recurrencias que aquel del Toro?

En ese caso, nuestros resultados quedarían bastante debilitados. Comencé a ponerme nervioso.

La búsqueda de un ejemplo de recurrencia en una superficie de género cero se prolongó durante varias horas. Para despejar un poco las ideas y poder proseguir posteriormente con la discusión, fuimos a cenar juntos.

Fue entonces que el Elipsoide resurgió, esta vez más flexible que nunca. Permitted deformaciones y contorsiones más osadas, inclusive las no analíticas, y con soporte arbitrario. Así, doblándolo aquí, rotándolo allá llegamos a un ejemplo.

¡La conferencia estaba lista! Debía ser a primera hora de la mañana siguiente.

Comencé proyectando el Elipsoide de Monge (Fig.1). Después recordaba cómo obtenerlo y explicarlo, usando el Teorema de Dupin (Fig. 2). Comentaba la ausencia de ejemplos de Configuraciones Principales Globales, fuera de aquél. Luego, proponía el problema de reconocer las configuraciones principales globales genéricas. Después enunciaba nuestro resultado, insistiendo en la limitación en la clase C^2 para la aproximación. Terminaba convocando a los oyentes para elevar esta clase para C^3 , resolviendo así el único problema que quedaba abierto con relación al programa inicial (encontrándose en esta situación hasta ahora).

Curiosamente, ninguno de los expertos en Sistemas Dinámicos y recurrencias allí presentes preguntó por ejemplos. Comenzaba a sentirme decepcionado, cuando Daniel Henry (1944–2002), especialista en Ecuaciones Diferenciales en Dimensión Infinita, formuló la esperada pregunta:

“No sé porque haces la hipótesis (1.d), no conozco ninguna superficie que no la satisfaga”.

Dibujé un elipsoide de revolución (Fig. 2). Lo deformé ligeramente para que en ambos casquetes polares fuera como uno de Monge, con sus ejes distintos, mientras que en torno del ecuador continuase fijo siendo siempre uno de revolución.

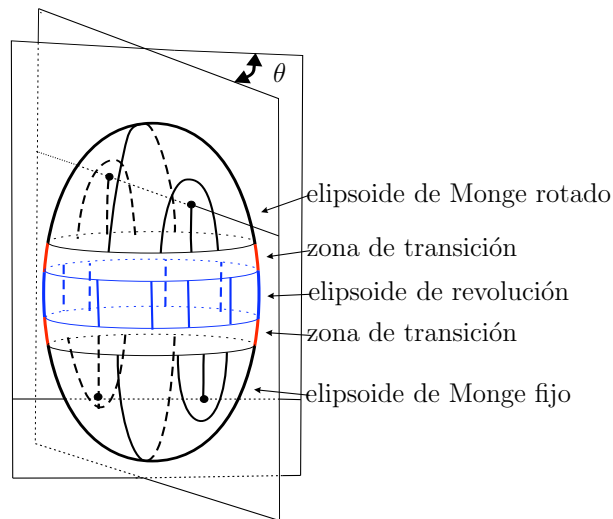


Figura 7: Superficie Elipsoidal E_θ con recurrencias oscilatorias.

Acto seguido, hice rotar en torno del eje mayor solamente el hemisferio

superior de mi superficie. Por causa de su simetría rotacional ecuatorial, constituía ésta una familia C^∞ de superficies E_θ , dependientes del parámetro θ que designa el ángulo de rotación.

Resulta evidente que las líneas de curvatura de E_θ definen en su segundo retorno al círculo ecuatorial una rotación de ángulo 2θ . Así, para los ángulos incommensurables con respecto a 2π , las líneas de curvatura resultaban todas densas en E_θ . Ver Fig. 7.

Hubo una reacción de interés y simpatía proveniente de numerosos participantes del Simposio. Por mi parte, me sentí ampliamente recompensado al constatar que el Elipsoide, después de casi doce años de compañía, había respondido a la altura de las exigencias.

Debido a su extensión, dividimos en dos partes la redacción final del trabajo. La primera, estableciendo que las condiciones (1.a) a (1.d) implican Estabilidad Estructural fue publicada en *Asterisque*, Vol. 98-99. La segunda, de Aproximación, donde se demuestra que toda superficie compacta y orientada puede ser arbitrariamente aproximada, en clase C^2 , por una que verifica las cuatro condiciones ya citadas, apareció en *Springer Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1007.

9. Un precursor de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales

En el primer semestre de 1990, con ocasión del “l'Année Spéciale de Systèmes Dynamique” patrocinado por el CNRS (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas) de Francia, dicté en la Universidad de Dijon un cursillo sobre los Puntos Umbílicos y Líneas de Curvatura.

Fue así como volví a visitar las obligatorias viñas, bebí nuevamente el vino de Borgoña y me hospedé en el Hotel Monge. Fue allí donde preparé las cuatro conferencias que pronuncié en esa oportunidad. Surgió entonces la idea de escribir un libro expositivo que contase con más calma y cuidado la teoría que intentaba resumir en el cursillo.

¿Sería la influencia del viejo Monge actuando también en este caso?

En cierto modo sí. En esa época tuve acceso al trabajo original de Monge, titulado *Sur les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoide*, publicado en el *Journal de l'Ecole Polytechnique.*, II cah, 1796.

La contemplación de las figuras originales de Monge, complementada por

algunas reflexiones y lecturas adicionales, me condujeron a hacer explícita una observación sobre la historia de las ideas matemáticas, la cual, en forma embrionaria, ya estaba presente en mi motivación inicial, al primer contacto con el Elipsoide y la subsecuente formulación del Problema Fundamental.

No hay registro bibliográfico de que Euler, responsable por la conceptualización de las curvaturas y campos de líneas principales, los hubiese integrado, visualizando la Configuración Principal.

Monge fue el primero en reconocer la importancia de esta estructura, proporcionando el primer ejemplo no banal, por integración global de las ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura (o sea, de los campos de líneas L_1 y L_2) en el caso del Elipsoide. Indaguemos:

¿Qué lo habría llevado a establecer un resultado de esta naturaleza, que en nuestros días se encuadra perfectamente dentro de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, considerando que ello ocurriría casi cien años antes que Poincaré la fundara y definiera sus objetivos?

La motivación de Monge provenía de una compleja interacción de consideraciones estéticas y prácticas, y de la explícita voluntad de aplicar los resultados de su investigación matemática. En el tiempo de Monge era más tenue la artificial separación entre matemática y aplicaciones. Las líneas de curvatura las descubrió estudiando el problema del transporte del desmonte en la construcción de los terraplenes y fortificaciones (denominado del “deblais et remblais”). Su figura del elipsoide la propuso en el proyecto arquitectónico de la edificación de la bóveda de la Asamblea Legislativa sobre un terreno elíptico: las líneas de curvatura serían las guías para la colocación de las piedras, los puntos umbílicos servirían de puntos de soporte de los que penderían las fuentes de iluminación, bajo uno de los cuales sería colocada la tribuna de los oradores.

Por lo que me consta, este proyecto no llegó a ser construido por el Gobierno de la Revolución Francesa, para el que fue elaborado, ni por ningún otro.

Si Poincaré, por el alcance y profundidad de su contribución, es reconocido como el fundador, a Monge le cabe el mérito de ser precursor de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales y por tanto de las Foliaciones con Singularidades en Variedades...

Cabe puntualizar, sin embargo, que la novedad de la Teoría Cualitativa de Poincaré radica en los métodos desarrollados para el estudio del retrato de fase de las ecuaciones diferenciales no-integrables, las que según él estableció para las ecuaciones polinomiales, constituyen el caso genérico. Este

aspecto ciertamente no fue abordado por Monge.

Tuve la curiosidad de comprobar que la conexión, esbozada arriba, entre los trabajos de Monge y de Poincaré no consta en el ingente trabajo histórico de René Taton¹⁷ “*L’Oeuvre Scientifique de Monge*”, Presses Univ. de France, 1951.

10. El libro y algunos datos actuales

En 1991, volví a contar con la colaboración de Gutiérrez para escribir un pequeño libro de vocación didáctica, con ocasión del 18° Coloquio Brasileño de Matemática. Se tituló “*Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces*”. Para darle más divulgación lo redactamos en Inglés, ya que contenía resultados originales, en fondo y forma, con relación a los artículos originales que pretendía explicar. Así, abordamos los resultados de Estabilidad Estructural y de Aproximación contenidos en los dos primeros trabajos, incluyendo más detalles relativos a los fundamentos teóricos y a la motivación. Los ejemplos de las recurrencias fueron perfeccionados y reformulados en bases más conceptuales, especialmente el de las superficies Toroidales.

También dimos una idea de las direcciones de investigación que brotaron de los trabajos iniciales, las que focalizan un campo fértil de interacción entre la Geometría y las Ecuaciones Diferenciales, que está lejos de agotarse.

Un asunto importante que merecería ser incluido es la extensión de las propiedades genéricas de las líneas de curvatura en las variedades tridimensionales inmersas en \mathbb{R}^4 , conseguidas por Ronaldo García en su Tesis (IMPA, 1989). Ver el trabajo “Principal Curvature Lines near Partially Umbilic Points in hypersurfaces immersed in \mathbb{R}^4 ”, *Comp. and Appl. Math.*, 20, 2001.

En los últimos años han surgido varias líneas nuevas de investigación sobre las Ecuaciones Diferenciales de la Geometría Clásica para superficies en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 y sus bifurcaciones.

A partir de la página <http://www.ime.usp.br/~sotp/> un enlace conduce a una muestra de trabajos pertinentes depositados en el Mathematics ArXiv. Entre estos, al lector investigador recomendamos *Historical Comments on Monge’s Ellipsoid and the Configurations of Lines of Curvature on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^3* y los dos problemas propuestos en su última sección.

¹⁷http://fr.wikipedia.org/wiki/René_Taton

Abajo citaré, sin la pretensión de ser completo u organizado, algunos trabajos adicionales que están relacionados con los temas del presente relato, dándoles continuidad o profundizándolos. Los títulos sugestivos permiten, sin embargo, localizar el lugar donde mejor encajan.

B. BRUCE y D. FIDAL, *On binary differential equations and umbilic points*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **111A**, 1989, 147-168.

R. GARCIA y C. GUTIERREZ, *Ovaloids of \mathbb{R}^3 and their umbilics: a differential equation approach*, J. Differential Equations **168**, 2000, no. 1, 200–211.

R. GARCIA y F. SÁNCHEZ-BRINGAS, *Closed principal lines of surfaces immersed in the Euclidean 4-space*, J. Dynam. Control Systems **8**, 2002, no. 2, 153–166.

R. GARCIA y J. SOTOMAYOR, *Lines of Curvature on Algebraic Surfaces*, Bull. Sciences Math. **120**, 1996, 367-395.

R. GARCIA y J. SOTOMAYOR, *Structural stability of parabolic points and periodic asymptotic lines*, Matemática Contemporânea **12**, 1997, 83-102.

R. GARCIA y J. SOTOMAYOR, *Lines of axial curvature on surfaces immersed in \mathbb{R}^4* , Differential Geom. Appl. **12**, 2000, 253–269.

R. GARCIA y J. SOTOMAYOR, *Structurally stable configurations of lines of mean curvature and umbilic points on surfaces immersed in \mathbb{R}^3* , Publ. Matemàtiques. **45**, 2001, 431-466.

R. GARCIA y J. SOTOMAYOR, *Umbilic and tangential singularities on configurations of principal curvature lines*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **74**, 2002, no. 1, 1–17.

R. GARCIA y J. SOTOMAYOR, *Lines of Mean Curvature on surfaces immersed in \mathbb{R}^3* , Qualit. Theory of Dyn. Syst. **5**, 2004, 137-183.

C. GUTIERREZ y J. SOTOMAYOR, *Lines of Curvature, Umbilical Points and Carathéodory Conjecture*, Resenhas IME-USP **03**, 1998, 291-322.

C. GUTIERREZ y J. SOTOMAYOR, *Principal lines on surfaces immersed with constant mean curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **293**, 1986, no. 2, 751–766.

V. V. IVANOV, *An analytic conjecture of Carathéodory*, Siberian Math. J. **43**, 2002, 251–322.

L. F. MELLO, *Mean directionally curved lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^4* , Publ. Mat. **47**, 2003, 415–440.

B. SMYTH, *The nature of elliptic sectors in the principal foliations of surface theory*, EQUADIFF 2003, 957–959, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

B. SMYTH y F. XAVIER, *A sharp geometric estimate for the index of an umbilic on a smooth surface*, Bull. London Math. Soc. **24**, 1992, no. 2, 176–180.

B. SMYTH y F. XAVIER, *Eigenvalue estimates and the index of Hessian fields*, Bull. London Math. Soc. **33**, 2001, no. 1, 109–112.

Agradecimientos. Dejamos constancia de nuestra gratitud a Ronaldo Garcia, Luis Fernando Mello y Tiago de Carvalho por sus observaciones y comentarios al texto actual (los dos primeros) y por su ayuda en la preparación de las figuras (el primero y el último).



Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
sotp@ime.usp.br

Publicat el 24 de gener de 2007