

Sistemes electorals

Bartolomé Barceló

1 Introducció

Els sistemes electorals o de votacions es poden utilitzar en contextos molt diversos, sent potser el més clar el de les eleccions presidencials o d'una cambra d'un país. D'altra banda també poden ser usats, per exemple, per a triar el representant dels alumnes d'una classe, triar el president d'una associació de veïns o el president d'un club de futbol.

El problema que es tracta en aquest article és el de com interpretar els resultats d'una elecció o, fins i tot abans de tenir cap resultat, el de respondre, si hem de triar d'entre diversos candidats, a ¿com es pot dissenyar un procediment per a escollir “el millor”? Un exemple típic podria ser l'anteriorment citat de triar delegat de curs d'una classe d'estudiants. Suposem que es presenten diversos candidats i que d'entre les vàries possibilitats que es poden considerar com procediments d'elecció, decidim que cada estudiant escriu en una llista cinc noms, pel seu ordre de preferència. Aquesta serà la seva papereta de vot. Una vegada que tots els estudiants d'aquesta classe han votat, tindrem en una caixa, o en una urna, totes les paperetes i aquest és el resultat de la votació. Què es pot fer ara, prenent aquestes dades, per a determinar qui serà el delegat del curs?



Procediments, com veurem, pot haver-n'hi molts. En el cas de l'exemple anterior es poden utilitzar, per exemple, els mètodes ja coneguts de la majoria simple, segona volta, Condorcet o recompte de Borda. Ràpidament un es dóna compte que si utilitzem mètodes diferents poden aparèixer resultats distints. Aquest fet és en principi sorprenent, ja que el resultat d'una elecció no dependrà tant dels vots emesos, sinó que en gran mesura del procediment d'elecció utilitzat. És a dir, que amb unes mateixes dades de votació pot sortir guanyador un candidat o un altre depenent del mètode d'elecció o de recompte de vots. Una vegada observat aquest comportament, apareix de forma natural la pregunta de si és possible, d'entre els varis mètodes considerats, trobar d'alguna manera el que sigui millor o, almenys, el menys dolent. La resposta és complexa i això fa que l'estudi dels sistemes electorals sigui interessant i apropiat per a la matemàtica. Poden aparèixer diverses paradoxes, algunes de les quals duen noms curiosos, com la paradoxa d'Alabama o la paradoxa de la població de les quals es parlarà més endavant.

2 Un exemple de les eleccions de Catalunya

En la taula següent es poden veure els resultats dels partits que van obtenir algun escó en les últimes eleccions al Parlament de Catalunya, de l'1 de novembre de 2006:

Nom del partit	Vots	%	Diputats
Convergència i Unió	935.756	31,52	48
PSC–Ciutadans pel Canvi	796.173	26,82	37
Esquerra Republicana de Catalunya	416.355	14,03	21
Partit Popular	316.222	10,65	14
Iniciativa per Catalunya Verds–EUIA	282.693	9,52	12
Ciutadans–Partit de la Ciutadania	89.840	3,03	3
Totals	2.837.039		135

D'acord amb el que estableix la llei de Règim Electoral, pel repartiment s'ha utilitzat l'anomenada llei D'Hont. No s'inclouen els partits o coalicions que no superen el 3% dels vots, tals com Els Verds–Ecologistes i Verds de Catalunya, amb 17.900 vots, el 0,60% , ja que la llei Electoral estableix que per a poder optar a escó es necessita superar aquest percentatge del 3%.

Si el resultat fos proporcional, d'acord amb les dades de la taula, Convergència i Unió va obtenir un percentatge¹ sobre el total de vots de

$$935.756 / 2.837.039 = 0,3298 = 32,98 \%$$

Com el total de la cambra és de 135 diputats, a Convergència i Unió li correspondrien per tant la mateixa proporció de diputats que de vots obtinguts, això és

$$0,3298 \times 135 = 44,53 \text{ escons.}$$

Si fem el mateix compte per a Iniciativa per Catalunya Verds–EUIA el percentatge seria

$$282.693 / 2.837.039 = 0,096 = 9,6 \%$$

i li correspondrien

$$0,0996 \times 135 = 13,45 \text{ escons.}$$

El primer va obtenir en realitat 48 escons, més dels que la seva proporció semblaria indicar. Mentre que el segon va obtenir 12, menys dels que corresponen a la seva proporció. Aquesta és una de les conseqüències de la llei D'Hont, que afavoreix als partits més votats. Pot semblar injust, però és un efecte de vegades buscat en aquest mètode, amb l'argument que afavoreix les coalicions i per tant l'estabilitat política. En realitat la llei D'Hont no s'aplica directament als resultats globals de vots de Catalunya, sinó a cadascuna de les quatre circumscripcions electorals de Catalunya, a saber Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona. Per tant per a reflectir amb exactitud la realitat caldria haver estudiat les proporcions en cada circumscripció, però el comportament seria similar.

Encara que s'intentés que cada partit tingués tants representants com la seva proporció en vots, el repartiment no hauria estat fàcil ja que en el resultat final han d'aparèixer nombres sencers. No podem triar una fracció decimal de diputat. Repartir adequadament les parts decimals que apareixen és de fet impossible, si el que es busca és un mètode que no presenti certes

¹En la taula apareix un percentatge del 31,52% (diferent del que es calcula), però això és perquè està calculat sobre el total de 2.968.534 vots vàlids i en els càlculs, per a major simplicitat, s'han considerat només les dades mostrades. La diferència correspon als vots destinats a partits amb menys del 3%. Aquest petit canvi no afecta a l'argument que estem considerant.

anomalies no desitjades com per exemple l'anomenada paradoxa d'Alabama, ja esmentada, o unes altres que veurem més endavant.

Un altre exemple de resultat en principi no esperat que presenten els sistemes electorals majoritaris es va donar també en les eleccions pel Parlament de Catalunya del 16 de Novembre de 2003, on el Partit del Socialistes de Catalunya (PSC) va aconseguir el major nombre de vots, però va quedar darrere de Convergència i Unió (CIU) en termes d'escons. El PSC amb 1.026.030 vots, el 31,17% dels vàlids, va guanyar a CIU (amb 1.018.115 vots, o el 30,93% dels vàlids). Però el PSC va aconseguir 42 escons enfront dels 46 de CIU. Aquest fet “paradoxal” ja s'havia donat en les eleccions anteriors de 1999, on el PSC havia obtingut amb 1.183.299 vots (el 37,85 %) 50 escons, mentre que CIU va obtenir sis escons més, 56, amb només 1.178.420 vots (el 37,69 %). Llavors, encara que havia obtingut menys vots que el PSC, CIU va formar un govern minoritari que es va mantenir durant tota la legislatura.

3 Història dels mètodes electorals

La història del mètodes electorals va bastant parella a la de la democràcia. La paraula “democràcia”, ve del grec δημοκρατία i combina dues paraules *demos* (“poble”) i *kratos* (“força, poder”). Va ser un sistema inventat pels atenencs per a millorar el seu sistema de govern al voltant del 508 AC. En una de les seves primeres formes, introduïda per Cleistenes, era una manera més aviat negativa d'elecció ja que cada any es demanava als votants que emetessin un vot pel polític a qui desitjaven desterrar per un període de deu anys.

La teoria dels mètodes electorals va ser estudiada pels membres de l'Acadèmia de Ciències de Paris en temps de la Revolució Francesa. En particular, Jean-Charles Borda va proposar el “recompte Borda” el 1770 com un mètode per a triar els membres de l'Acadèmia mentre que el marquès de Condorcet, per la seva banda, va proposar un mètode en el qual els candidats s'enfronten de dos en dos.

Els sistemes parlamentaris moderns tenen el seu model en la constitució dels Estats Units de 1789. Allí es van experimentar i es van anar refinant els mètodes més usats actualment. D'aquí els noms tals com *paradoxa d'Alabama*, *mètode de Hamilton* o *mètode de Jefferson*.

És curiós que només molt recentment, en 2001, s'ha observat que tant Ramon Llull (1235-1316) com Nicolau de Cusa (1401-1464) van escriure textos

sobre mètodes electorals. De Ramon Llull es conserven tres textos, *Artifitium electionis personarum* (1270's), el capítol 24 de la seva novel·la *Blanquerna* (1283) quan la protagonista Nathana és triada superiora del seu convent i *D'art electionis* (1299). No deixa de ser curiós que el mètode introduït per Llull sigui ara l'important i conegut mètode de Condorcet.



Thomas Le Myésier: Breviculum ex artibus Raimundi Lulli (1336)

4 El problema del repartiment

La constitució dels Estats Units de 1787 estableix que la legislatura federal estigui formada per dos cambres: el Senat amb dos senadors per estat i la Cambra de Representants, els “escons de les quals seran assignats entre els varis estats dintre d’aquesta unió segons els seus nombres respectius. . .” (Article I, Secció 2).

La majoria de les nostres democràcies segueixen un esquema similar. La constitució espanyola estableix per exemple que els escons de la cambra s’assignen per circumscripcions electorals (províncies) “en proporció a la població

respectiva". El problema d'un mètode de repartiment és saber com s'aconsegueix aquesta proporció.

Per exemple, segons les dades del cens electoral de 1790, l'estat de Carolina del Nord tenia una població de 353.523 persones amb dret a vot, mentre que en tot EUA hi havia 3.615.920, per tant la *proporció representativa* de Carolina del Nord era

$$\frac{353523}{3615920} \simeq 0,0977 \simeq 9,77\%$$

Com la cambra constava llavors de 105 membres, a Carolina del Nord li corresponia una *quota* de

$$105 \times 0,0977 \simeq 10,265 \text{ escons}$$

que no és un nombre sencer. Com es reparteix una proporció semblant? En els Estats Units, per a conèixer el nombre de representants en la Cambra que corresponen a cadascun dels estats de la unió, s'han usat diversos mètodes. Aquests s'han anat canviant a mesura que s'han conegut millor les seves virtuts i els seus problemes, ja que com veurem cap d'ells és matemàticament perfecte i la seva aplicació depèn en gran mesura d'una decisió política. Entre els més usats i importants estan els mètodes de Alexander Hamilton, Thomas Jefferson, Daniel Webster i l'actual, anomenat de Hill-Huntington.

Abans de passar a descriure'ls és convenient precisar algunes definicions. Sigui n és el nombre d'estats (o províncies) que formen la unió (o el país). Sigui p la població total de la unió amb dret a vot. Siguin p_1, p_2, \dots, p_n el cens electoral dels respectius estats i sigui e el nombre total d'escons a repartir.

Definició.

Es diu *proporció representativa* de l'estat i a la proporció entre la població d'aquest estat i la total, això és,

$$\frac{p_i}{p}$$

Definició.

Es diu *quota* de l'estat i a la proporció d'escons corresponents a aquest estat, és a dir:

$$q_i = \frac{p_i}{p} e$$

Recordem que cada nombre té una part sencera i una part decimal, així per exemple la part sencera de 10,265 és $[10,265] = 10$, mentre que la seva part decimal és 0,265. La quota és, en general, un nombre amb una part sencera i una part decimal, a la seva part sencera se l'anomena *quota inferior*, mentre que la seva part sencera més un és la *quota superior*.

Clarament la suma de les poblacions de cada estat és la població total, això és,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = p$$

El problema del repartiment consisteix a assignar escons a_1, a_2, \dots, a_n a cada estat de tal manera que cada a_i sigui el més proper possible a la quota q_i i que la suma de tots aquests escons sigui $a_1 + a_2 + \dots + a_n = e$.

5 Mètode de Hamilton

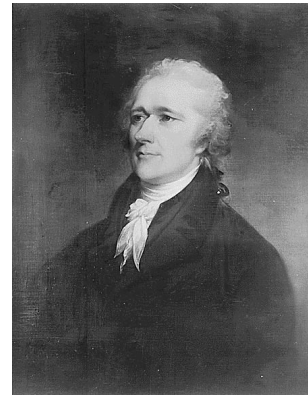
Aquest mètode duu el nom d'Alexander Hamilton, que va ser el primer secretari del tresor i ajudant de George Washington. Per a aconseguir que cada estat rebí un nombre de representants el més proper a la seva quota, Hamilton assigna a cada estat, en una primera aproximació, la part sencera de la seva quota. Després, els escons encara no repartits es reparteixen per ordre de major a menor als quals tenen part decimal més gran.

En l'exemple anterior, Carolina del Nord tenia una quota de 18,31 escons. Un altre estat, Pensilvania, al ser la seva població de 432.879 habitants tindria una quota de

$$\frac{432879}{3615920} \times 105 \simeq 12,57$$

El mètode de Hamilton donaria en primer lloc $[10,265] = 10$ escons a Carolina del Nord i $[12,57] = 12$ escons a Pensilvania. Si hi hagués un escó més a repartir entre aquests dos s'assignaria a Pensilvania, ja que la seva part decimal 0,57 és major.

El mètode de Hamilton s'estava usant per a repartir la Cambra de Representants en 1880, quan va aparèixer una circumstància curiosa. Per a modificar el nombre d'escons de la cambra amb vistes a futures eleccions, es va fer un estudi de repartiments amb una cambra de diferents grandàries,



Alexander Hamilton
(1755-1824)

que abastaven des de 270 a 350 membres. Llavors es va observar que Alabama tenia dret a 8 representants si la grandària de la cambra era de 299, però disminuïa a 7 representants si la grandària de la cambra era de 300. El congrés va decidir llavors una grandària de 325 escons, ja que llavors aquest nombre semblava no presentar problemes.

Aquest fet es coneix amb el nom de *paradoxa d'Alabama* i es diu que el mètode de Hamilton *no és monòton*, ja que si s'augmenta el nombre d'escons a repartir, i encara que les dades de població no canviïn, pot ser que hi hagi estats pels quals, sorprenentment, disminueixi el seu nombre de representants.

6 Els mètodes del divisor

6.1 Mètode de Jefferson

El primer mètode de repartiment que es va adoptar pel Congrés en els Estats Units (1792) va ser el de Hamilton, però no va arribar a usar-se llavors perquè George Washington, en el primer veto presidencial de la història dels Estats Units, va rebutjar el projecte de llei insistint que el repartiment resultant havia de ser més proporcional a la població. En els Estats Units cada estat es divideix en circumscripcions electorals, cadascuna de les quals ha de triar el seu representant per majoria relativa (és a dir, guanya el que més vots té). El nombre de circumscripcions d'un estat és per tant igual al nombre d'escons que té.

Thomas Jefferson, que era secretari d'estat amb Washington, va proposar llavors un mètode que consistia a triar un divisor d que fos aproximadament la grandària mitjana dels districtes als quals correspon un congressista i després dividir la població de cada estat per d . El nombre de representants era llavors la part sencera d'aquest quocient, eliminant simplement la part decimal.

Per exemple, l'estat Virginia, d'on era original Jefferson, tenia una població de 630.560 habitants i el valor d era 33.000. Al ser

$$\frac{630560}{33000} \simeq 19,108$$



Thomas Jefferson (1743-1826)

Jefferson elimina la part fraccionària 0,108 d'aquest quocient i assigna 19 escons a Virginia.

Si es decideix utilitzar aquest mètode, es decideix un divisor d i la grandària de la cambra queda determinat per aquest divisor, sent el nombre total de representants

$$\left[\frac{p_1}{d}\right] + \left[\frac{p_2}{d}\right] + \dots + \left[\frac{p_n}{d}\right]$$

Com es pot observar, quant major sigui el divisor, menor serà el nombre total de membres de la cambra.

Per una altra part, si es triés en primer lloc la grandària de la cambra, s'ajustaria el divisor d fins a obtenir el nombre correcte de membres.

Quan el nombre total d'escons de la cambra està ja fixat, per a saber quants escons corresponen a cada estat en particular podem procedir de la següent manera: comencem amb un divisor $d = p_1$ on p_1 és la població de l'estat més gran. El quocient entre p_1 i aquest divisor és 1, així que l'estat amb major població rep el primer representant i els quocients de les poblacions dels altres estats pel divisor d són menors que 1. D'aquesta manera, de moment, només s'ha repartit 1 escó. Ara anem disminuint el divisor. L'estat de major població rebrà un segon escó quan $p_1/d = 2$ (això és, si aïllem d , quan $d = p_1/2$), mentre que els altres estats hauran rebut un escó si en el seu cas ha estat $p_i/d > 1$. Continuant amb aquest procés l'estat i rebrà el seu escó $n + 1$ quan per a un cert d




$$\frac{p_i}{d} = n + 1$$

el que succeeix quan, aïllant d d'aquesta última relació, $d = \frac{p_i}{n + 1}$.

Podem afirmar llavors que es van assignant els escons seguint un ordre de prioritats per mitjà de la *funció de classificació* $R_i = \frac{p_i}{n + 1}$.

Aquesta funció de classificació dona un procediment més senzill per a fer el repartiment. Vegem com fer-ho amb un exemple pres de les eleccions generals de 1996 en la província de Burgos. En aquest exemple, en comptes de repartir el total d'escons de la Cambra de Representants per estat, repartirem els 4 escons que corresponen a Burgos entre els partits polítics diferents segons el seu nombre de vots. És a dir, substituïrem “nombre de representants de la Cambra” per “nombre d'escons a repartir en els resultats electorals d'aquesta província”, substituïrem “estat” per “partit polític” i “nombre d'habitants” per “nombre de vots”.

Exemple: Resultats electorals de les eleccions generals de 1996 a la província de Burgos. Es reparteix un total de 4 escons. A la primera fila col·loquem els vots dels partits que han aconseguit més del 3% del total. Després, a les successives columnes cap a baix dividim els vots per 1, 2, 3, . . . anem assignant els escons per prioritats en ordre decreixent, és a dir, el primer escó se'l enduu en aquest cas el PP per tenir 126.837 vots, el nombre més alt de la taula. El segon escó s'assigna al PSOE ja que li correspon el segon nombre més alt, 71.804, de la taula, i així successivament.

			
Vots	126.837	71.804	25.880
Vots/1	126837 ¹	71804 ²	25880
Vots/2	63419 ³	35902	
Vots/3	42279 ⁴		
Repartiment	3	1	0

En les nostres democràcies occidentals el *mètode de Jefferson* es diu *mètode dels divisors naturals* o també *regla D'Hondt*, nom que prové del matemàtic belga Victor D'Hondt. A Espanya utilitzem la regla D'Hondt, per exemple, per a repartir els escons als diferents partits segons els resultats electorals.

Calculem la quota dels diferents partits de l'exemple anterior de la província de Burgos. La suma total de vots és

$$126837 + 71804 + 25880 = 224521$$

Per tant

$$\text{Quota (PP)} = \frac{126837}{224521} \times 4 \simeq 2,26$$

$$\text{Quota (PSOE)} = \frac{71804}{224521} \times 4 \simeq 1,28$$

$$\text{Quota (IU)} = \frac{25880}{224521} \times 4 \simeq 0,46$$

Observem que la quota del PP és 2,26, la seva quota inferior és 2 i la seva quota superior 3. Amb la regla D'Hondt el PP ha obtingut 3 escons, això és, un nombre d'escons igual a la seva quota superior. El mateix ha passat amb



Louisiana va ser explorada pels espanyols en el s. XVI i es va convertir en colònia francesa a la fi del s. XVII. El 1762 França va cedir a Espanya els territoris de l'oest del Mississipi i un any més tard, els situats a l'est del riu van passar al Regne Unit pel tractat de Paris. Pel tractat secret de San Ildefons, Napoleó va aconseguir de Carlos IV la devolució de la Louisiana (1802) i la va vendre als Estats Units el 1803. El president era llavors Thomas Jefferson.

els altres partits PSOE i IU, han obtingut un nombre d'escons igual o bé la seva quota inferior o bé la seva quota superior.

Això no sempre succeeix amb la regla D'Hondt, de vegades hi ha partits que obtenen més escons que el que indica la seva quota superior, la qual cosa no sembla molt equitatiu. Es diu per això que aquest mètode *no satisfà la condició de la quota*. Aquesta anomalia va aparèixer, per exemple, en les eleccions generals de 2004 en la circumscripció de Madrid: es repartien 35 diputats i el PP amb un 45,02% dels vots va obtenir 17 diputats amb una quota de 15,76.

Podem observar també en els resultats de la taula anterior, relatius a la província de Burgos en les eleccions de 1996, que el PP no va aconseguir més del doble dels vots que el PSOE, i no obstant això va obtenir més del doble en escons. Aquest és un fet general amb la regla D'Hondt i per això es diu que és un mètode que té un *biaix* cap als partits majoritaris. En el cas espanyol és un fet políticament desitjat, ja que això afavoreix les coalicions i

per tant evita la atomització en molts partits. Aquest fet sembla donar més estabilitat al sistema i evita el que succeeix per exemple a Itàlia, on hi ha una gran quantitat de partits.




6.2 Altres mètodes del divisor

S'han utilitzat altres mètodes del divisor, que es poden definir per les seves diferents funcions de classificació. A més del de Jefferson cal destacar els mètodes de Webster, de Hill-Huntington, de Dean i d'Adams, les funcions de classificació dels quals són




Jefferson	$R_i = \frac{p_i}{n_i + 1}$
Webster	$R_i = \frac{p_i}{2n_i + 1}$
Hill-Huntington	$R_i = \frac{p_i}{\sqrt{n_i(n_i + 1)}}$
Dean	$R_i = \frac{p_i(2n_i + 1)}{2n_i(n_i + 1)}$
Adams	$R_i = \frac{p_i}{n_i + 1}$
Repartiment	$R_i = \frac{p_i}{n_i}$

Tots ells s'han usat en algun moment pel Congrés dels Estats Units. Amb els mètodes de Hill-Huntington, de Dean i d'Adams, cada estat comença amb un escó abans de començar el procés, però amb els mètodes de Jefferson i Webster l'assignació inicial de cada estat és 0.

El mètode de Webster, que duu el nom de l'home d'estat i orador Daniel Webster (1782-1852), també es diu dels divisors imparells o de Sainte-Laguë als països escandinaus. Vegem com seria el repartiment d'escons per Webster amb les dades anteriors de la província de Burgos

			
Vots	126.837	71.804	25.880
Vots/1	126837 ¹	71804 ²	25880 ⁴
Vots/3	42279 ³	23935	
Vots/5	25367		
Repartiment	2	1	1

El mètode de Hill-Huntington duu el nom de Joseph A. Hill, de l'Oficina del Cens dels EUA, i d'Edward V. Huntington, professor de mecànica i matemàtiques de la Universitat de Harvard. També es diu el mètode de la mitjana geomètrica i és el que s'usa des de 1941 per a repartir la Cambra dels Estats Units. Els divisors successius de Hill-Huntington són $\sqrt{1 \times (1 + 1)} = \sqrt{2} \simeq 1,41$, $\sqrt{2 \times (2 + 1)} = \sqrt{6} \simeq 2,45$, $\sqrt{3 \times (3 + 1)} = \sqrt{12} \simeq 3,46$, $\sqrt{5 \times (4 + 1)} = \sqrt{20} \simeq 4,47$, $\sqrt{5 \times (5 + 1)} = \sqrt{30} \simeq 5,48, \dots$ Aplicat aquest mètode a l'exemple anterior de la província de Burgos seria:

			
Vots	126.837	71.804	25.880
Vots/1.41	89955 ¹	50925 ³	18355
Vots/2.45	51770 ²	29308	
Vots/3.46	36658 ⁴		
Repartiment	3	1	0

6.3 Quin és el millor mètode del divisor?

Tal com hem dit abans, la regla D'Hondt afavoreix lleugerament als partits més grans. Si es van augmentant els divisors a l'aplicar un mètode del divisor, s'observa que progressivament va augmentant el cost de cada escó. Després es redueix l'avantatge dels grans partits. Això es pot comprovar comparant els dos exemples que hem tractat abans en la província de Burgos quan s'usaven la regla D'Hondt i el mètode de Webster.

Una variant d'aquests mètodes és la modificació del mètode de Sainte-Laguë que s'usa a Suècia des de 1952. Es van prenent els divisors successius 1,41, 3, 5, 7, ... Augmentant el primer divisor es persegueix dificultar l'obtenció d'escons per part dels partits petits mentre que després, elevant la distància entre els membres de la sèrie, es redueix l'avantatge dels partits més grans.

Es pot mesurar matemàticament la *injustícia* en el repartiment. Hi ha diverses definicions d'injustícia, però una de les més usades va ser introduïda per Huntington i defineix la injustícia entre dos partits i, j com la diferència

$$\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j}$$

on a_i és l'el nombre d'escons del partit i , p_i el nombre de vots del partit i i el mateix pel partit j . D'entre tots els mètodes del divisor possibles, el mètode de Webster minimitza la injustícia o, en altres paraules, que si es transfereixen escons d'un partit a un altre d'una manera diferent a com ho fa Webster, augmentaria la injustícia.

Proposició: *El mètode de Webster minimitza la injustícia.*

Demostració. Suposem que dos partits P_1 i P_2 competeixen pel següent escó. Siguin p_1 el nombre de vots del partit P_1 i n_1 el nombre d'escons que ja ha obtingut. Anàlogament siguin p_2 el nombre de vots del partit P_2 i n_2 el seu nombre d'escons ja adjudicats.

El mètode de Webster donarà el següent escó a P_1 si es verifica

$$\frac{p_2}{2n_2 + 1} < \frac{p_1}{2n_1 + 1} \quad (1)$$

Llavors la diferència de proporció representativa entre P_1 i P_2 seria

$$D_{12} = \frac{n_1 + 1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2}$$

Si l'escó l'hagués rebut P_2 en comptes de P_1 , la diferència de proporció representativa seria

$$D_{21} = \frac{n_2 + 1}{p_2} - \frac{n_1}{p_1}$$

La injustícia de la qual hauria estat més gran, ja que, com podem comprovar, es té $D_{12} < D_{21}$. En efecte, la relació $D_{12} < D_{21}$ és

$$\frac{n_1 + 1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} < \frac{n_2 + 1}{p_2} - \frac{n_1}{p_1}$$

i si passem a l'esquerra tots els termes de P_1 i a la dreta els de P_2 , queda

$$\frac{n_1 + 1}{p_1} + \frac{n_1}{p_1} < \frac{n_2 + 1}{p_2} + \frac{n_2}{p_2}$$

i això és el mateix que

$$\frac{2n_1 + 1}{p_1} < \frac{2n_2 + 1}{p_2}$$

que és certa perquè és equivalent (multiplicant en creu) a l'assignació que havia fet Webster en (1).

7 No existeix un mètode matemàticament perfecte

Els mètodes vists fins ara presenten problemes, ja que amb el de Hamilton pot aparèixer la paradoxa d'Alabama i amb els mètodes del divisor no se satisfà la condició de la quota. En els anys 70, dos matemàtics, Michel L. Balinski i H. Peyton Young es van proposar trobar un mètode que satisfés alhora la condició de la quota i que sigui monòton. Van trobar un nou mètode, anomenat el mètode de la quota. Aquest nou mètode va presentar no obstant això un problema indesitjable: *la paradoxa de la població*.

Hi ha diverses definicions d'aquesta paradoxa. En la seva forma més elemental, es pot descriure de la següent manera: Suposem que hi ha dues eleccions consecutives i un partit obté x escons en la primera elecció i augmenta el nombre de vots en la segona. Si els altres partits obtenen igual nombre de vots en ambdues eleccions, és lògic pensar que el partit que ha augmentat en vots no disminueix el seu nombre d'escons obtinguts en la primera elecció. No obstant, pot ser que això succeeixi. Una altra definició una mica més realista de la mateixa paradoxa és la següent:

La paradoxa de la població: Suposem que la grandària de la Cambra i el nombre d'estats és fix, però canvia el nombre d'habitants. Llavors un estat pot perdre un representant en favor d'un altre estat, fins i tot si la població del primer estat creix més que la del segon.

Vegem aquesta paradoxa amb un exemple prenent dades similars als de les eleccions espanyoles de 1989 a la província de Badajoz, on s'assignaven 6 escons, i substituint “representants d'un estat” per “diputats d'un partit polític”. Designem per A, B, C, D els partits que van obtenir més del 3 % de vots i usarem el mètode de Hamilton.

Hamilton	A	B	C	D
Vots	208.560	82.000	38.000	30.000
Quota	3,49	1,37	0,64	0,50
Escons	3	1	0 + 1	0 + 1

No obstant això, amb dades electorals una mica diferents²

Hamilton	A	B	C	D
Vots	206.600	72.000	38.000	32.000
Quota	3,56	1,24	0,65	0,55
Escons	3 + 1	1	0 + 1	0

Observem d'aquestes dades que el partit A ha perdut uns 2.000 vots i el partit D els ha guanyat. No obstant això A gana un escó i D ho perd.

Hi ha alguna esperança de trobar un mètode millor? La resposta és negativa. Balinski i Young van demostrar el 1982 que tots els mètodes de repartiment, excepte els mètodes del divisor, presenten la paradoxa de la població.

Així que estem en un carreró sense sortida. El mètode de Hamilton pot presentar les paradoxes d'Alabama i de la població i els mètodes del divisor no satisfan en general la condició de la quota. I qualsevol mètode que es pugui inventar presentarà algun d'aquests problemes. No hi ha cap mètode matemàticament perfecte. Per tant l'elecció d'un mètode o un altre ha de ser una decisió política. Es considera que la paradoxa de la població i la d'Alabama són més nocives que la violació ocasional de la condició de la quota, pel que normalment es decideix usar els mètodes del divisor.

8 Sistemes de vot preferent

Una manera diferent de dissenyar mètodes electorals que intenta evitar els problemes que apareixen en les seccions anteriors és usar els anomenats *sistemes de vot preferent*.

Per a simplificar l'exposició, suposem que cal triar només una persona o un partit d'entre diversos candidats possibles en una circumscripció electoral

²Els escons es reparteixen primer per la part sencera de la quota i els restants per l'ordre de la part decimal. D'aquesta manera, en el primer cas el partit A rep 3 escons per la part sencera i cap per la part decimal, mentre que en el segon torna a rebre 3 escons per la part sencera i un més per la part decimal.

i suposem també que cada elector fa una llista on col·loca els noms dels candidats pel seu ordre de preferència. Aquesta situació pot presentar-se per exemple quan es tria delegat de curs en una classe, quan una comunitat de veïns tria al seu president o quan una societat o empresa tria al seu director.

A continuació veurem un exemple hipotètic, on aplicarem quatre mètodes diferents. Suposem que en unes eleccions cada votant ha de triar tres partits per ordre de preferència i que, una vegada comptabilitzats els vots, els resultats són com segueix:

6 milions de votants trien per ordre de preferència PP, IU, PSOE.

5 milions de votants trien per ordre de preferència PSOE, IU, PP.

4 milions trien IU, PSOE, PP.

Ja es tenen els resultats. Per a manejar-los més fàcilment es poden col·locar en forma de taula

	6	5	4
1 ^a	PP	PSOE	IU
2 ^a	IU	IU	PSOE
3 ^a	PSOE	PP	PP

Qui és el guanyador?

1. **Majoria simple o relativa.** Guanya el candidat que més vots té.

En aquest cas guanya el PP (6 vots) enfront del PSOE (5 vots) i IU (4 vots). Malgrat això 9 milions de votants, això és, el 60 % del total, no l'han votat. De fet és possible que aquests votants prefereixin una altra alternativa a tenir aquest guanyador. És just això?

2. **Segona volta.** En el primer recompte de vots, la primera volta, eliminem tots els candidats excepte els dos que tenen més vots. Després en la segona volta s'enfronten aquests dos i guanya el que té més vots.

En l'exemple, eliminem primer a IU perquè només té 4 vots. Ara, en la segona volta, competeixen únicament PP i PSOE. Si ratllem IU de la taula de preferències anterior, el PP obté 6 milions de vots i el PSOE $5 + 4 = 9$ milions. Guanya el PSOE per 9 a 6.

Observem que ara apareix un guanyador diferent al del mètode anterior. Observem també que, encara que hagi guanyat el PSOE, $6 + 4 = 10$ milions de votants preferien a IU enfront del PSOE.

Una variant d'aquest mètode, quan hi ha més contendents, es diu **eliminació del perdedor**. En aquest nou mètode es van donant successives voltes en el recompte i s'elimina en cadascuna d'elles al candidat menys votat.

Una altra variant és la que s'usa a França, on la primera volta és per majoria absoluta, és a dir, guanya un partit si obté un resultat major que la meitat més un dels vots. Si no hi ha guanyador en aquesta primera volta, es realitza una segona votació on no es poden presentar els partits més minoritaris i en la que es decideix el guanyador per majoria relativa. Moltes vegades es produeixen coalicions entre una i una altra volta.

3. **Recompte Borda**. Aquest nom ve del francès Jean-Charles de Borda (1770). **Es puntuen els candidats per ordre de preferència i guanya el que més punts té.**

En l'exemple, si donem 3 punts al primer de la llista, 2 al segon i 1 al tercer, el resultat queda com segueix:

$$PP = 6 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 1 = 27 \text{ punts}$$

$$PSOE = 6 \times 1 + 5 \times 3 + 4 \times 2 = 29 \text{ punts}$$

$$IU = 6 \times 2 + 5 \times 2 + 4 \times 3 = 34 \text{ punts}$$

El vencedor és IU.

4. **Mètode Condorcet**. **S'enfronten tots els candidats dos a dos. Guanya el que hagi guanyat a tots els altres.** Va ser introduït pel marquès de Condorcet a França en 1785.

En l'exemple que ens ocupa quan s'enfronten PP amb PSOE, això és, si ratllem IU de la llista de preferències, el PP obté 6 milions de vots mentre que el PSOE obté $5 + 4 = 9$. Guanya el PSOE. Les altres dues parelles d'enfrontaments, PP-IU i PSOE-IU produeixen:

$$PP-IU \quad PP = 6, IU = 5 + 4 = 9. \quad \text{Guanya IU.}$$

$$PSOE-IU \quad PSOE = 5, IU = 6 + 4 = 10. \quad \text{Guanya IU.}$$

Per tant el guanyador Condorcet és IU ja que ha guanyat als altres quan s'enfronten cara a cara.

No sempre hi ha guanyador Condorcet. Consideri's per exemple una elecció on 5 milions de votants trien per aquest ordre PP-PSOE-IU. Altres 5 milions trien PSOE-IU-PP i 5 milions IU-PP-PSOE. No hi ha cap que guanyi a tots els altres.

Hi ha altres mètodes de votació que tenen en compte l'ordre de preferència. Entre ells estan

1. **Vot transferible**. Va ser introduït per Thomas Hare a Anglaterra el 1850. Té en compte l'ordre de preferència en cada papereta d'una manera una mica més complicada a les anteriors. S'usa a Irlanda i Austràlia.
2. **"Approval voting"**. Cada votant escriu els noms dels candidats als quals dona el vist i plau. Guanya el que més vots té. Aquest sistema evita que guanyi algú a qui la majoria s'oposa.

D'entre tots els mètodes de votació d'aquest tipus no hi ha cap que sigui completament satisfactori. Kenneth J. Arrow va demostrar el 1951 que no pot haver-hi cap mètode que satisfaci alhora les tres propietats raonables que hauria de tenir qualsevol sistema de votació, a saber:

- *Condició de Pareto*: Si tots els votants prefereixen l'alternativa x sobre la y , llavors x queda per sobre de y en la llista de preferències del grup.
- *Monotonía*: Si un mètode dona lloc al fet que x quedi per sobre de y en la llista de preferències del grup i un votant que prefereix y a x canvia la seva preferència, el mètode ha de seguir produint que x quedi per sobre de y en la llista de preferències del grup.
- *Independència de les alternatives irrelevantes (IAI)*: Un mètode d'elecció satisfà IAI si considerades dues alternatives x i y per a les quals el mètode fa que x sigui preferida a y , quan els votants canvien les seves preferències pel que fa a altres alternatives que no siguin x i y , el mètode continua fent que x sigui preferida a y . Per tant, la posició de les alternatives que no siguin x i y en les llistes de preferències dels individus és irrelevant per a decidir l'ordenació de x i y en la llista de preferències del grup.

El *teorema d'impossibilitat d'Arrow* afirma que no pot haver-hi cap mètode d'elecció social que satisfaci alhora aquestes tres condicions. Això va destrossar les esperances de poder trobar alguna vegada mecanismes d'elecció que fossin justos i no manipuladors. Qualsevol mètode que es consideri pot presentar algun tipus de comportament no desitjat. Kenneth J. Arrow, professor d'economia de la Universitat de Stanford va rebre el premi Nobel de Ciències Econòmiques el 1972.

9 El sistema electoral dels Estats Units

En les eleccions dels Estats Units es trien els representants del Congrés, els membres del Senat i els electors presidencials. Alguns estats trien també al seu governador i es consulten a referèndum certes mesures legislatives o d'interès social.

El Congrés dels Estats Units, *the U.S. House of Representatives*, té actualment un total de 435 membres que es reparteixen entre els 50 estats de la unió pel mètode de Hill-Huntington. Després cada estat té les seves circumscripcions electorals. Per exemple Minnesota, a la qual li corresponen 10 representants, té el mateix nombre de circumscripcions. En cada circumscripció els electors trien el nom de la seva elecció de la llista de candidats que es presenten en aquesta circumscripció i guanya el que té més vots. Aquest és el sistema de majoria simple o relativa, anomenat també *first-past-the-post*, és a dir, el primer que passa la meta guanya.

El president dels Estats Units es tria en una assemblea formada per 538 electors. Cada estat contribueix amb un bloc d'aquests delegats o compromissaris, el nombre dels quals és igual a la suma dels seus representants més els seus senadors. Excepte Washington DC, que no té congressistes, però sí tres electors.

En les paperetes cada candidat a president duu adjunt el nom del seu vicepresident juntament amb el partit al que pertany, si és el cas. A cada estat guanya el candidat que té més vots, però aquests vots no trien de moment president, sinó que trien en bloc als compromissaris d'aquesta opció que aniran després al col·legi electoral. Com que hi ha 538 compromissaris en total, un candidat necessita almenys 270 per a ser triat.

10 El sistema electoral espanyol

La Constitució de 1978 ha establert que les Corts Generals estiguin formades pel Congrés dels Diputats i pel Senat. La constitució estableix també que el Congrés comptarà amb un mínim de 300 i un màxim de 400 Diputats, deixant a la llei electoral concretar aquest nombre. La normativa vigent (Llei Orgànica del Règim Electoral General de 19 de Juny de 1985) ha fixat en 350 el nombre de membres de la Cambra. Per a garantir que totes les províncies tinguin Diputats, la llei electoral assigna dos escons a cadascuna d'elles i un a cadascuna de les ciutats de Ceuta i Melilla. Ja que hi ha 50 províncies, es tenen assignats 102 escons. La resta dels escons, és a dir, $350 - 102 = 248$, es distribueixen proporcionalment entre totes les províncies, segons el seu nombre de votants censats, pel mètode de Hamilton. Per altra banda, i tal com ja s'ha comentat abans, s'utilitza la regla D'Hont per a repartir els escons a les diferents formacions polítiques segons els seus resultats electorals a cada circumscripció (província en aquest cas). Entren en el repartiment únicament els partits que han tret més del 3% dels vots.

11 El sistema electoral català

El Parlament de Catalunya consisteix en sola cambra, que es compon de 135 membres elegits de manera directa per sufragi universal per a un termini de quatre anys. Cadascuna de les quatre províncies de Catalunya, Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona, formen una circumscripció. Barcelona tria un diputat per cada 50.000 habitants, fins a un màxim de vuitanta-cinc escons, mentre que Girona, Lleida i Tarragona trien un mínim de sis diputats cadascuna, més un per cada 40.000 habitants. En totes les eleccions celebrades a partir de 1980, els escons parlamentaris s'han repartit de la manera següent:

Província	Escons
Barcelona	85
Girona	17
Lleida	15
Tarragona	18
Total	135

Aquest repartiment afavoreix a les tres províncies menys poblades a costa de Barcelona. Per a l'assignació d'escons, el sistema electoral català és idèntic

al sistema utilitzat per a escollir als membres del Congrés dels Diputats d'Espanya. Això és, s'utilitza la regla D'Hondt entre aquelles llistes que rebin almenys el tres per cent dels vots vàlids emesos en la circumscripció, incloent els vots en blanc.

12 Són realment adequats els sistemes electorals que tenim a l'estat espanyol?

En aquesta exposició hem intentat mostrar que els sistemes electorals són molt més complicats que el que moltes persones podrien en principi suposar i que les matemàtiques ens poden ajudar a entendre el seu funcionament. Hem vist també que no hi ha cap mètode perfecte. Qualsevol mètode d'elecció social possible que es consideri pot presentar en determinades circumstàncies comportaments que semblen injusts i no desitjats.

Sorgeix també de manera natural la pregunta de si el nostre sistema electoral és adequat i de si podria ser millorat d'alguna manera. Referent a això anem a exposar dues consideracions per a convidar a la reflexió:

1. En el sistema actual cada partit presenta una llista llarga de noms en cada papereta. En general el votant coneix només els primers candidats de la llista, però no els altres que apareixen després. Això pot dur a sorpreses, com va ocórrer per exemple en les eleccions de Maig de 2003 a la Comunitat de Madrid quan la deserció dels diputats Eduardo Tamayo i María Teresa Sáez va tenir l'efecte de canviar el possible govern socialista de Rafael Simancas pel popular d'Esperanza Aguirre. En el sistema anglosaxó per districtes, cada districte, és a dir cada zona, barri o petit comptat, tria el seu o els seus candidats. Els electors els coneixen millor i existeix més proximitat amb els seus representants. Té l'inconvenient que pot ser poc proporcional, en el sentit en què si un partit guanya per majoria simple en cada districte tindria la totalitat de la cambra. Però potser es podrien trobar sistemes mixts que intentessin equilibrar tots els factors.
2. En el sistema actual l'elector ha de triar una papereta donant el seu vot per complet a un partit o coalició i en l'ordre en què ha estat fixat i en el qual apareixen els candidats. Les tecnologies actuals permeten sense problema que l'elector doni el seu vot en, diguem per exemple, un

60% a un partit, un 30% a un altre i un restant 10% a un altre. Podria també triar o ratllar els noms d'una llista que consideri més adequats.

Bibliografia

- *Régimen electoral general. Ley orgánica 5/1985 del 19 de Junio*. Instituto Nacional de estadística, 1985.
- *Las elecciones*. F. de Carreras, J. M. Vallés, Ed. Blume 1977.
- *Fair Representation, Meeting the ideal of One Man, One Vote*. M. Balinski, H. Young, Yale University Press, 1982.
- *Un examen en profundidad de los sistemas electorales, todos ellos imperfectos. ¿Resulta posible una adaptación fraudulenta de un sistema?* Ian Stewart, Investigación y Ciencia, mayo 1995.
- *Juegos matemáticos: Matemáticas electorales*. Juan M. R. Parrondo, Investigación y Ciencia, mayo 2004.
- *Las matemáticas en la vida cotidiana*. COMAP, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1999.
- *Democràcia: dels vots als escons*. A. Alabert, [Materials Matemàtics](#), 2006, no. 11.
- *Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting*. D. G. Saari, American Math Society, Providence, 2001.
- En la web: Wikipedia. Por ejemplo, http://en.wikipedia.org/wiki/Voting_system
- Sobre Ramon Llull <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Llull.html>. Sus textos electorales se encuentran en la univ. de Augsburg <http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/llull/>



Departamento de matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
bartolome.barcelo@uam.es

Publicat el 4 de juliol de 2007