

Una mina d'or

Antonio Garijo

1 Introducció

L'or és un element metàl·lic de nombre atòmic 79, pes atòmic 196.967 i símbol Au. Es tracta d'un metall escàs en l'escorça terrestre, que es troba nadiu i molt dispers. De color groc brillant i inalterable per gairebé tots els reactius químics, és el més dúctil i malleable dels metalls, molt bon conductor de la calor i l'electricitat i un dels més pesants. S'usa com metall preciós en joieria, en la fabricació de monedes i en odontologia.

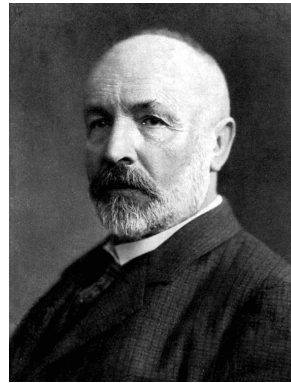


Les principals mines d'or es troben a Sud-àfrica, Estats Units, Austràlia i Perú. El procés habitual per extreure l'or de la mina s'anomena lixiviació. Aquest procés es basa en el fet que l'or nadiu és soluble en solucions de cianur diluït en aigua. El material extret d'un jaciment inicia el seu camí de preparació amb la seva fragmentació per a obtenir dimensions molt més petites del que abans eren grans trossos de roques, amb l'objecte que el procés de separació del mineral valuós sigui més eficient i ràpid. Es formen piles amb el material mòlt que s'acumula sobre una membrana impermeable en piles d'algunes tones. Posteriorment es regana aquestes piles amb una solució de cianur dissolt en aigua. La solució líquida té la propietat de dissoldre el mineral i d'aquesta manera flueix amb el líquid cap al sistema de drenatge. A aquesta solució se li extreu l'oxigen dissolt, mitjançant una columna de desoxigenació. La solució filtrada i desoxigenada es posa en contacte amb pols de zinc i, per un procés redox, l'or es diposita sobre les partícules de zinc. Mitjançant un filtratge es recuperen les partícules de zinc i, finalment, es fon el producte per obtenir l'or.

En el context d'aquest article es presenta un altre tipus de mina de d'or. En aquest cas el paper de l'or el farà un grapat de conjunts del pla, que aniran apareixent al llarg d'aquest treball, com ara el conjunt de Cantor, el collaret de Cantor, el conjunt de Cantor de cercles, el triangle de Sierpiński i la catifa de Sierpiński. De forma similar a l'or, aquests conjunts tenen una serie de propietats que els fan atractius des d'un punt de vista estètic i topològic ja que es tracta de conjunts fractals i autosimilars. El paper de la mina el farà un sistema dinàmic complex on hi trobarem l'or en forma d'exemples de tots aquests conjunts en un dels seus àmbits naturals. De fet, per ser més precisos, el que trobarem seran còpies homeomorfes d'aquests objectes fractals.



W. Sierpiński (1882-1969)



G. Cantor (1845-1918)

El sistema dinàmic que farà el paper de mina serà el sistema dinàmic discret generat per la iteració a l'esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, de la família de funcions

$$f_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n},$$

on λ és un paràmetre complex i $n \geq 2$. La dinàmica complexa és el nom que rep l'estudi de la iteració de funcions holomorfes d'una variable complexa i l'espai natural, o espai dinàmic, és l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Per a una introducció sobre la iteració de funcions racionals podeu consultar les referències bibliogràfiques següents: [1, 2, 15, 19]. En dinàmica complexa, l'objecte més important a l'espai dinàmic és el conjunt de Julia que és el conjunt de punts amb un comportament dinàmic caòtic.

Aquesta mina d'or va ser descoberta l'any 1988 per C. McMullen ([14]), trobant el primer exemple d'una funció racional amb un conjunt de Julia homeomorf a un conjunt de Cantor de cercles, i va atreure ràpidament l'atenció dels cercadors d'or/especialistes en sistemes dinàmics. Per una banda, aquesta família de funcions té un espai de paràmetres de dimensió complexa

igual a 1. Per altra banda, exhibeix conjunts de Julia d'una gran riquesa topològica incloent entre d'altres conjunts de Cantor, conjunts de Cantor de cercles o catifes de Sierpiński. La família de funcions $f_{\lambda,n}$ s'acostuma a anomenar *família de McMullen* i ha sigut objecte de recerca durant els darrers anys ([3, 5, 16, 17, 20]).

Tot i que entre els objectius d'aquest treball no es contempla una aproximació exhaustiva dels conjunts fractals cal fer esment que va ser Benoît Mandelbrot, l'any 1975 ([12, 13]), qui va introduir el mot "fractal" per qualificar objectes amb estructures complicades tant a la natura com a les matemàtiques. Alguns d'aquests exemples de geometria fractal a la natura són: la línia de la costa, d'una muntanya, d'un núvol, una coliflor o un floc de neu. Aquests objectes tenen una estructura que sembla independent de l'escala d'observació. Matemàticament un conjunt és fractal quan la seva dimensió de Hausdorff és estrictament més gran que la seva dimensió topològica. Hi han estudis per avaluar la longitud de la costa anglesa i estimar la seva dimensió de Hausdorff provant així que la línia de la costa anglesa té una estructura fractal.



Detall de la costa de Noruega. La fractalitat no té nacionalitat

L'organització d'aquest treball és senzilla: primer es presenta l'or i després la mina on trobar-lo. A la secció 2 trobareu les definicions i algunes propietats bàsiques dels conjunts fractals que són els models topològics d'alguns conjunts de Julia. Entre ells hi ha els conjunts famosos que ja s'han esmentat abans. A la secció 3 es veuen les definicions bàsiques del conjunt de Julia i Fatou d'una funció racional i alguns resultats sobre el conjunt de Julia d'alguns membres de la família de McMullen.

2 L'or

En aquesta secció apareixen els fractals clàssics del pla que ja s'han mencionat: el conjunt de Cantor, el conjunt de Cantor de cercles, el collaret de Cantor i el triangle i la catifa de Sierpiński. Com veurem en la secció següent tots aquests conjunts s'obtidran com a conjunts de Julia d'una certa família de funcions racionals.

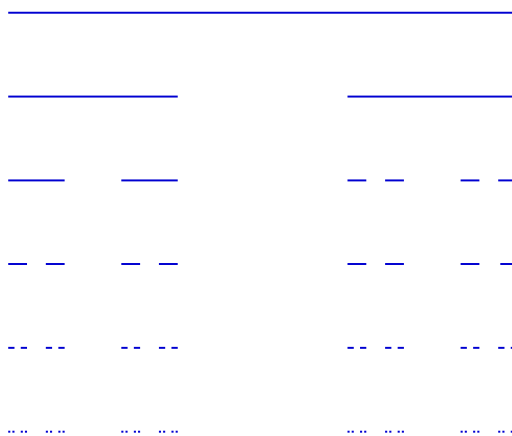


Figura 1: Primeres etapes de la construcció del conjunt de Cantor C .

El conjunt de Cantor més conegut és un subconjunt de l'interval $[0, 1]$ construït mitjançant un procés recursiu d'eliminació del terç mitjà que denotarem per C . Com a punt de partida considerem l'interval tancat $[0, 1]$. En una primera iteració dividim aquest interval en tres parts iguals i treiem el terç mitjà. El resultat ens dona el conjunt $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. En la segona iteració tallem cada un d'aquests dos intervals en tres parts iguals i eliminem l'interval obert del mig, obtenint així $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. En etapes successives tallem cada un dels intervals en tres parts iguals i sempre treiem la part oberta del mig. El conjunt de Cantor és el resultat de repetir aquest procés infinites vegades, és a dir, són els punts que no hem eliminat. L'expressió explícita d'aquest conjunt de Cantor en notació de conjunts és

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right).$$

En la figura 1 es mostren les primeres iteracions d'aquest procés recursiu per *fabricar* aquest conjunt de Cantor. Una definició alternativa d'aquest conjunt de Cantor és la que dona C com els punts de l'interval $[0, 1]$ tals que en la seva expressió en base 3 no apareix el dígit 1. El procés recursiu que

hem vist abans eliminava justament tots els nombres de l'interval $[0, 1]$ amb un 1 en la seva expressió en base 3 i deixa únicament els punts amb dígit 0 i 2 en aquesta expressió. Tres de les propietats bàsiques del conjunt C són: es tracta d'un conjunt tancat, totalment disconnex i perfecte. Aquestes són les tres propietats que caracteritzen a tot conjunt de Cantor.

Direm que un subconjunt del pla és un **conjunt de Cantor** si és un conjunt *tancat*, *totalment disconnex* (les components connexes del conjunt són punts) i és *perfecte* (no té punts aïllats).

Un cop conegut el conjunt de Cantor més famós, veiem tot seguit alguns exemples de conjunts que no ho són:

- El conjunt dels nombres enters és un conjunt tancat i totalment disconnex però en canvi no és perfecte perquè tots els seus punts són aïllats.
- El conjunt dels nombres racionals és totalment disconnex i és perfecte, però en canvi no és tancat.
- Finalment, el conjunt dels nombres reals és tancat i perfecte, però en canvi no és totalment disconnex.

Intuïtivament, un conjunt de Cantor és un conjunt tancat de punts on tots els seus elements són punts d'acumulació d'altres punts del mateix conjunt.

Utilitzant el conjunt de Cantor C podem construir altres exemples de conjunts que, tot i no ser conjunts de Cantor d'acord amb el criteri anterior, hereten algunes de les propietats del conjunt original.

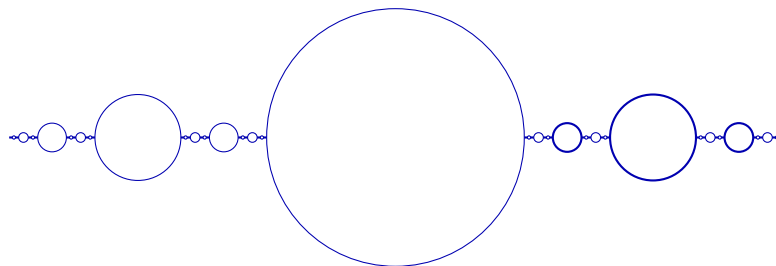


Figura 2: Collaret de Cantor.

El primer d'aquests exemples és l'anomenat **collaret de Cantor**. Aquest conjunt es construeix en un procés recursiu similar a l'anterior. En la primera etapa, i després d'eliminar un interval obert de mida $1/3$ afegim un cercle de diàmetre $1/3$ centrat en el punt mig de l'interval eliminat. D'aquesta manera

aquest cercle talla el conjunt de Cantor en els dos punts extrems de l'interval eliminat. A continuació, en cada etapa del procés de construcció del conjunt de Cantor, quan eliminem un interval de mida $1/3^n$, afegim un cercle de diàmetre $1/3^n$ centrat en el punt mig d'aquest interval. A la figura 2 es veu el conjunt obtingut després de les primeres iteracions d'aquest procés recursiu per obtenir un collaret de Cantor. A diferència del conjunt de Cantor, el collaret de Cantor és un conjunt connex.

El segon conjunt derivat del conjunt de Cantor és l'anomenat **conjunt de Cantor de cercles**. Aquest conjunt consisteix a afegir un cercle centrat en el punt $1/2$ i que passi per cada un dels punts del conjunt de Cantor. En la figura 3 es mostra un esquema d'un conjunt de Cantor de cercles.

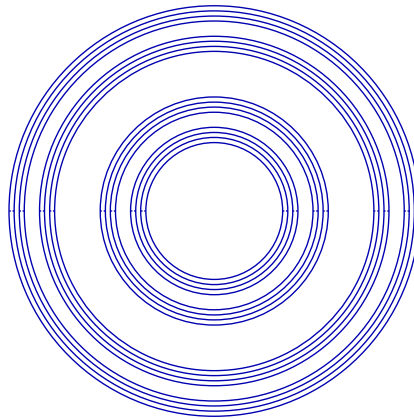


Figura 3: Conjunt de Cantor de cercles.

Els dos conjunts que apareixen a continuació també són fractals i auto-similars però, a diferència del conjunt de Cantor C , són conjunts connexos. El primer és el **triangle de Sierpiński**. En aquest cas iniciem el procés iteratiu amb un triangle equilàter i en el primer iterat traurem el triangle amb vèrtexs en el punt mig de cada un dels tres costats del triangle equilàter inicial tal i com es pot veure en la figura 4. El resultat d'aquesta primera etapa són tres triangles equilàters (connectats per un vèrtex). En la segona etapa fem el mateix procés en cada un d'aquests tres triangles, és a dir, traïem el triangle central obert amb vèrtexs en el punt mig de cada costat. Es repeteix aquest procés infinitament¹ i el triangle de Sierpiński és el conjunt de punts que no s'han eliminat del triangle equilàter inicial (la figura 6 (a) representa un estadi més avançat d'aquesta construcció).

¹Clicant sobre la figura 4 accedireu a una animació dels primers estadis d'aquesta construcció.

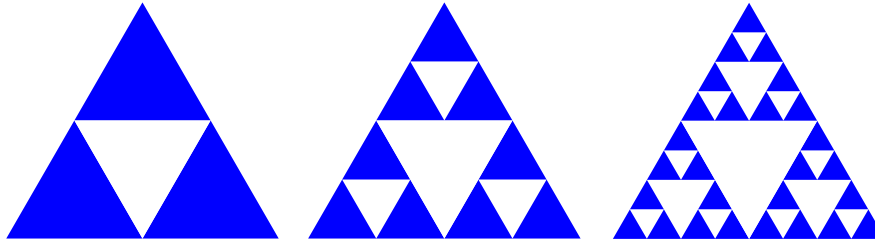


Figura 4: Primeres etapes en la construcció del triangle de Sierpiński.

El darrer fractal que veurem serà la **catifa de Sierpiński**, que potser és el més interessant de tots ells. En aquest cas, el procés s'inicia amb un quadrat. Subdividim aquest quadrat en 9 quadrats iguals semblants al primer i eliminem el quadrat central. El resultat en aquesta etapa són 8 quadrats de costat un terç de la mida de l'inicial formant un anell. En la segona etapa, repetim el mateix procés 8 vegades (subdivisió d'un quadrat en 9 quadrats semblants i eliminació del quadrat central) en cada un dels 8 quadrats. En la figura 5 es veuen aquestes dues fases.

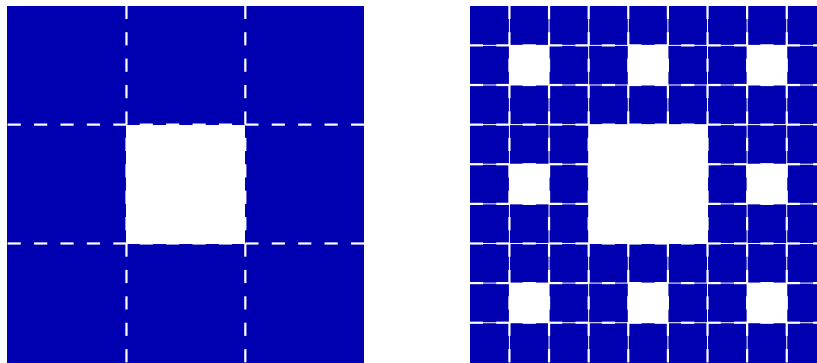


Figura 5: Fases inicials en la construcció de la catifa de Sierpiński

Com en les construccions anteriors, repetim aquest procés infinitament i la catifa de Sierpiński és el conjunt que conté tots els punts del quadrat inicial que no desapareixen en el procés. En la figura 6 (b) es veuen el resultat després de les primeres etapes de la construcció de la catifa de Sierpiński.

El resultat següent, provat per W. Sierpiński ([18]), ens mostra la riquesa topològica d'aquest conjunt.

La catifa de Sierpiński conté una còpia homeomorfa de qualsevol conjunt compacte, connex i 1 dimensional del pla. D'aquesta

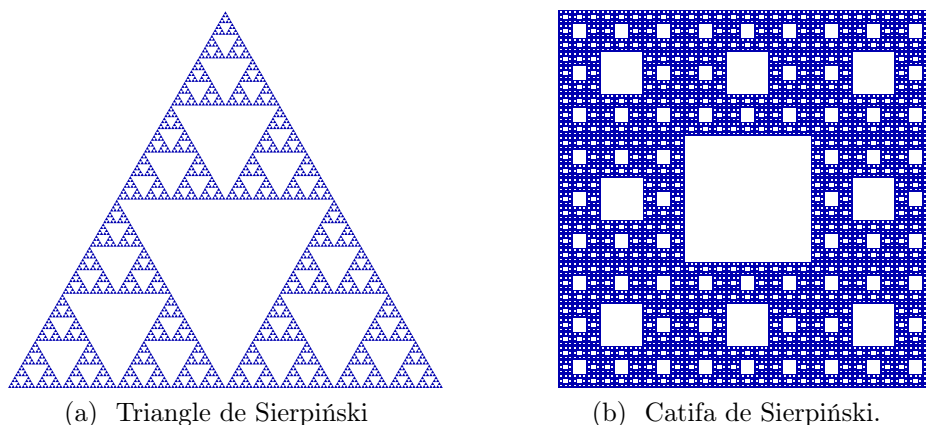


Figura 6: Alguns exemples de conjunts fractals al pla.

forma, qualsevol corba compacta del pla es pot manipular (topològicament) i ficar-la dins de la catifa. En altres paraules, la catifa de Sierpiński és una immensa biblioteca que conté una còpia de tots els conjunts compactes, conexas i 1 dimensionals del pla.

Per exemplificar aquest resultat farem servir un conjunt del pla A que és compacte, connex i 1 dimensional, però que no és localment connex. Considerem

$$A = \overline{\{(x, \sin(1/x)), x \in (0, 0.2)\}},$$

és fàcil comprovar que A és un conjunt del pla compacte, connex i 1 dimensional i podem veure que no és localment connex. Per això, sigui p un punt qualsevol del segment vertical $\{(0, y), -1 \leq y \leq 1\}$ i U un entorn obert prou petit de p , llavors $U \cap A$ no és connex. En la figura 7 és mostra el conjunt A (figura 7 (a)), una còpia homeomorfa del conjunt A (figura 7 (b)) i finalment com podem “ficar” el conjunt A dins de la catifa de Sierpiński (figura 7 (c)).

Donat que el collaret de Cantor és també un conjunt compacte, connex i 1 dimensional del pla, llavors també hi ha una còpia homeomorfa del collaret de Cantor continguda dins de la catifa de Sierpiński. En aquest cas, simplement hem de transformar els cercles en quadrats i apareix una còpia homeomorfa al collaret de Cantor dins de la catifa de forma bastant òbvia (figura 7 (d)). De fet la intersecció de la catifa de Sierpiński amb un segment que divideixi el quadrat en dos rectangles iguals és el conjunt de Cantor de la recta que consistia en treure el terç central de tots els segments.

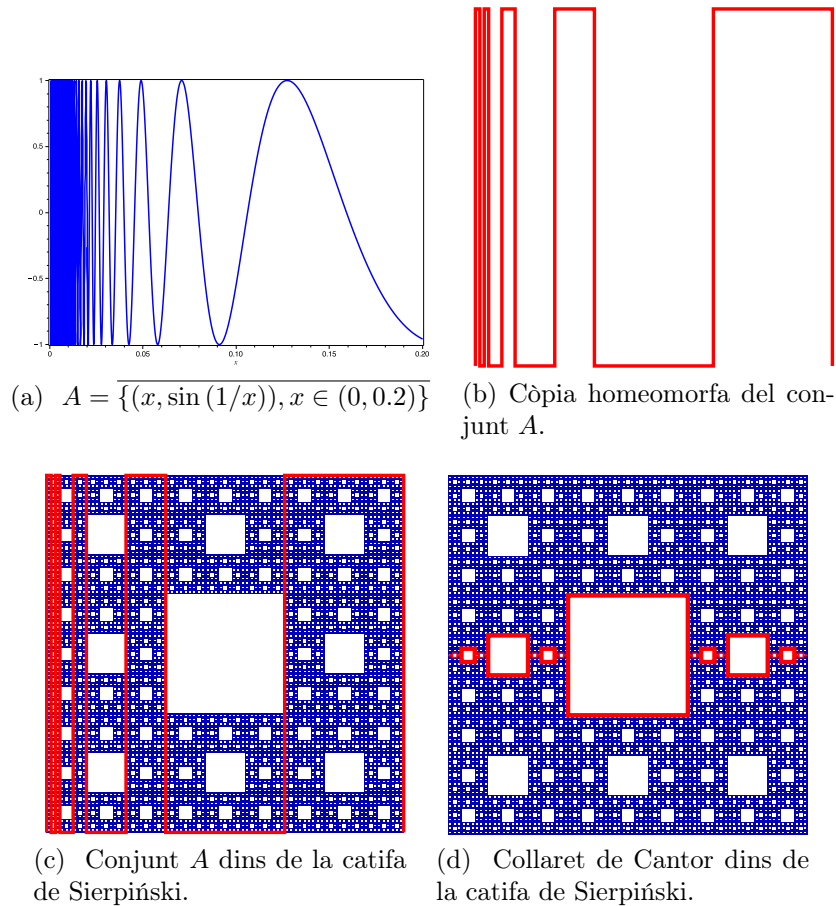


Figura 7: Universalitat de la catifa de Sierpiński.

3 La mina

Els models matemàtics per descriure fenòmens físics, químics o econòmics porten normalment a l'estudi de sistemes dinàmics. El model més senzill de sistema dinàmic suposa que l'estat actual del sistema està determinat únicament pel coneixement de l'estat previ. Els sistemes dinàmics complexos estudien el comportament de la seqüència de nombres complexos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ on el nombre complex z_n depèn de l'anterior z_{n-1} i aquesta dependència ve donada per una funció holomorfa (o meromorfa) $f(z)$. D'aquesta forma, a partir del valor inicial z_0 i el coneixement de la

funció $f(z)$, podem anar generant la successió d'iterats

$$\begin{aligned} z_0 & \\ z_1 &= f(z_0) \\ z_2 &= f(z_1) = f^2(z_0) \\ z_3 &= f(z_2) = f^3(z_0) \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \\ z_n &= f(z_{n-1}) = f^n(z_0). \end{aligned}$$

L'estudi d'aquests sistemes es va iniciar a principis del segle XX amb els treballs pioners de Pierre Fatou i de Gaston Julia ([9, 10, 11]). Aquests dos matemàtics francesos van realitzar extensos treballs dedicats a la iteració d'una funció holomorfa a l'esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, o de forma equivalent, funcions racionals $f(z) = p(z)/q(z)$ on p i q són polinomis. Ambdós van trobar que algunes òrbites presenten un comportament estable, mentre que n'hi ha d'altres que tenen un comportament caòtic. En honor a la contribució d'aquests dos matemàtics, el conjunt de punts amb òrbites de comportament estable es denomina conjunt de Fatou (essencialment, les òrbites de punts propers d'aquest conjunt es mantenen *propres* durant tot el seu recorregut), mentre que el seu complementari s'anomena conjunt de Julia i conté els punts amb òrbites de comportament caòtic. Per a donar la definició *formal* d'aquests dos conjunts s'utilitza el concepte de normalitat de la família d'iterats d'una funció holomorfa.

Definició 3.1. *Sigui $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una funció holomorfa. La família d'iterats $\{f^n\}_{n \geq 0}$ és normal en un obert $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$, si tota subsuccessió de $\{f^n\}$ té una parcial uniformement convergent en compactes (de U).*

Utilitzant el concepte de normalitat es pot fer una partició de l'esfera de Riemann. **El conjunt de Fatou** $F(f)$ es defineix com el conjunt de punts z_0 de l'esfera de Riemann tals, que la família d'iterats $\{f^n\}_{n \geq 0}$ és normal en algun entorn de z_0 . **El conjunt de Julia** $J(f)$ és el complementari del conjunt de Fatou, és a dir, el conjunt de Julia $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ conté tots els punts on la família d'iterats de f **no és normal** en qualsevol entorn del punt considerat.

L'objectiu principal de la dinàmica complexa és l'estudi de les propietats dels conjunts de Fatou i de Julia. Per a una introducció sobre la iteració de funcions racionals podeu consultar les referències bibliogràfiques [1, 2, 15, 19]. Després dels treballs de Fatou i Julia, va ser durant el quinquenni 1980–1985 que la dinàmica complexa va tenir un ressorgiment degut per una banda, per la resolució d'una pregunta oberta sobre la no existència de dominis de

Fatou errants per una funció racional ([21]) i per una altra per les imatges d'aquests conjunts realitzades amb l'ajut dels ordinadors que fins llavors no eren factibles. Aquest ressorgiment va atreure l'interès de molts matemàtics de diferents àmbits de coneixement a part dels de sistemes dinàmics: l'anàlisi complex, la geometria diferencial, la geometria hiperbòlica o la topologia...



P. Fatou (1878–1929)



G. Julia (1893–1978)

Algunes de les propietats que es poden demostrar per als conjunts de Julia i Fatou que són importants per a la seva comprensió són les següents:

- (i) El conjunt de Fatou $F(f)$ d'una funció racional f és un conjunt obert de l'esfera de Riemann i el conjunt de Julia és tancat. Tots dos conjunts són totalment invariants, és a dir, si un punt està en el conjunt de Fatou o Julia llavors totes les seves imatges i preimatges estan en el mateix conjunt, donant així una partició de l'espai dinàmic en dos conjunts totalment invariants.
- (ii) El conjunt de Julia és un conjunt autosimilar, on les preimatges d'un punt del conjunt de Julia són denses en $J(f)$. També són denses en el conjunt de Julia les òrbites periòdiques repulsores. La restricció de f al conjunt de Julia és sensible respecte condicions inicials, és a dir: òrbites que comencen molt a prop, al cap d'uns quants iterats, acaben per separar-se. Respecte del conjunt de Julia també tenim una dicotomia, o bé el conjunt de Julia és tota l'esfera de Riemann, o bé és disseminat (té interior buit). Per últim, f és transitiva en el conjunt de Julia, intuïtivament això significa que f barreja totes les òrbites.
- (iii) Tal com hem comentat, el conjunt de Fatou és un conjunt obert i, en principi, pot tenir varies components connexes. El teorema de Sullivan sobre la no existència de dominis errants per a funcions racionals

([21]) implica que aquestes components han de ser periòdiques o pre-periòdiques (antiimatge de periòdiques). Les components periòdiques del conjunt de Fatou estan classificades i existeix una cota superior per a la quantitat de components periòdiques del conjunt de Fatou d'una funció donada.

- (iv) Els punts crítics d'una funció racional f es defineixen com aquells punts que anul·len la derivada (les solucions de l'equació $f'(z) = 0$). Els punts crítics c són els únics punts on la funció f no és localment bijectiva. Llavors $v = f(c)$ s'anomena un valor crític i és una singularitat de f^{-1} . Donat que f és un quocient de polinomis, f té un nombre finit de punts crítics; per ser més precisos, si d és el grau màxim entre el polinomi del numerador i del denominador de f , llavors el nombre de punts crítics és igual a $2d - 2$. Els punts crítics estan íntimament relacionats amb les components periòdiques del conjunt de Fatou. Bàsicament, cada cicle de components periòdiques de Fatou té almenys un punt crític associat. Aquesta és una de les propietats més importants en la iteració d'una funció racional, ja que controlant els punts crítics podem conèixer les components periòdiques del conjunt de Fatou.

3.1 Or! or!

L'any 1988 C. McMullen ([14]) va introduir la família de funcions

$$f_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n}$$

on λ és un paràmetre complex i $n \geq 2$, aquesta serà la mina on trobarem l'or. Veurem que el conjunt de Julia $J(f_{\lambda,n})$ pot ser un conjunt de Cantor, un conjunt de Cantor de cercles o una catifa de Sierpiński per a certs valors dels paràmetres λ i n .

L'objectiu és entendre que succeeix quan iterem $f_{\lambda,n}$. Denotarem per $f_{\lambda,n}^k$ l'iterat k -èssim de $f_{\lambda,n}$. L'òrbita de $z \in \mathbb{C}$ és la seqüència $\{f_{\lambda,n}^k(z)\}$ on $k = 0, 1, 2, \dots$ i l'objectiu és comprendre el comportament de totes les òrbites de $f_{\lambda,n}$. Hi ha dos tipus molt importants d'òrbites per a les funcions d'aquesta família, les primeres són les òrbites que escapen cap a infinit i les segones són les òrbites periòdiques. D'una banda, si el valor de $|z|$ és prou gran, tenim que $|f_{\lambda,n}(z)| > |z|$ i d'aquesta manera l'òrbita d'aquest punt tendeix cap a ∞ . El conjunt de tots els punts que escapen cap a infinit s'anomena la *conca d'atracció d'infinit*. Per altra banda l'òrbita de z és periòdica si $f_{\lambda,n}^k(z) = z$ per a algun valor $k > 0$. Aquesta òrbita periòdica, o cicle, es diu

- superatractora si $(f_{\lambda,n}^k)'(z) = 0$,

- atractora si $|(f_{\lambda,n}^k)'(z)| < 1$,
- repulsora si $|(f_{\lambda,n}^k)'(z)| > 1$,
- neutra si $|(f_{\lambda,n}^k)'(z)| = 1$.

El nombre complex $(f_{\lambda,n}^k)'(z)$ s'anomena el *multiplicador* de l'òrbita. Si z pertany a una òrbita periòdica atractora o superatractora, les òrbites dels punts propers a z tendiran a l'òrbita de z . De manera similar si z pertany a una òrbita periòdica repulsora, llavors les òrbites dels punts propers s'allunyan d'aquesta òrbita (almenys inicialment). Quan el cicle és neutre el comportament de les òrbites dels punts propers a l'òrbita depèn de l'argument de $(f_{\lambda,n}^k)'(z)$. Tot i que es coneix la dinàmica local al voltant d'aquestes òrbites, en alguns casos és encara un problema obert de la dinàmica complexa explicar el comportament de les òrbites a prop d'un cicle neutre.

Tal com hem comentat abans, els punts crítics són fonamentals per entendre la dinàmica de la família $f_{\lambda,n}$. En el cas d'aquesta família tenim $2n$ punts crítics, les solucions de l'equació $f_{\lambda,n}'(z) = 0$, que venen donats per $c_\lambda = \lambda^{1/2n}$. A banda d'aquests punts crítics tenim també ∞ i 0 , però aquests dos punts crítics tenen la mateixa dinàmica per a tots els elements de la família, donat que el primer és fix superatractor ($f_{\lambda,n}(\infty) = \infty$, $f_{\lambda,n}'(\infty) = 0^2$) i el segon va a infinit en un iterat ($f_{\lambda,n}(0) = \infty$). Els punts crítics c_λ s'anomenen lliures, donat que no tenen una dinàmica predeterminada si no que depèn de l' $f_{\lambda,n}$ corresponent.

Aquests punts crítics c_λ estan situats de forma simètrica al voltant de l'origen i la seva imatge $v_\lambda = f_{\lambda,n}(c_\lambda)$ és reduïda a dos valors crítics $\pm 2\sqrt{\lambda}$, de forma que n dels punts crítics tenen per imatge $+2\sqrt{\lambda}$ i els altres n tenen per imatge $-2\sqrt{\lambda}$. A més, si n és un nombre senar, aquests dos valors crítics tenen un comportament simètric ($f_{\lambda,n}^k(2\sqrt{\lambda}) = -f_{\lambda,n}^k(-2\sqrt{\lambda})$) i d'aquesta forma les dues òrbites crítics són simètriques per $z \mapsto -z$. Si per contra n és un nombre parell $f_{\lambda,n}(2\sqrt{\lambda}) = f_{\lambda,n}(-2\sqrt{\lambda})$ i tots els punts crítics comparteixen la mateixa òrbita.

Com que, per a la família $f_{\lambda,n}$, l' ∞ és sempre un punt fix superatractor (multiplicador igual a 0), aquest punt té una *conca immediata d'atracció* que denotarem per B_λ i designa la component connexa de la conca d'atracció que conté ∞ . Donat que $f_{\lambda,n}(0) = \infty$, hi ha un entorn obert de 0 que s'envia per $f_{\lambda,n}$ a B_λ . Aquest conjunt pot ser disjunt o no de B_λ . En el cas que sigui disjunt, el denotarem per T_λ . Donat que l'única preimatge finita de ∞ és el 0 , si un punt z és atret per ∞ però no pertany a la conca immediata d'atracció B_λ , algun dels seus iterats estarà a T_λ . En altres paraules, T_λ és

²Respecte la coordenada natural $w = 1/z$ al voltant de l' ∞ .

com una porta per entrar a B_λ quan s'itera per $f_{\lambda,n}$. Per altra banda es pot comprovar fàcilment que $f_{\lambda,n}(\omega z) = -f_{\lambda,n}(z)$ si ω és una arrel $2n$ -èssima de la unitat. Per aquest motiu els punts crítics lliures es comporten de forma simètrica respecte $z \mapsto \omega z$.

El que ve a continuació és un dels resultat on es mostren els diferents tipus de conjunt de Julia d'aquesta família de funcions, quan les òrbites dels punts crítics tendeixen cap a ∞ .

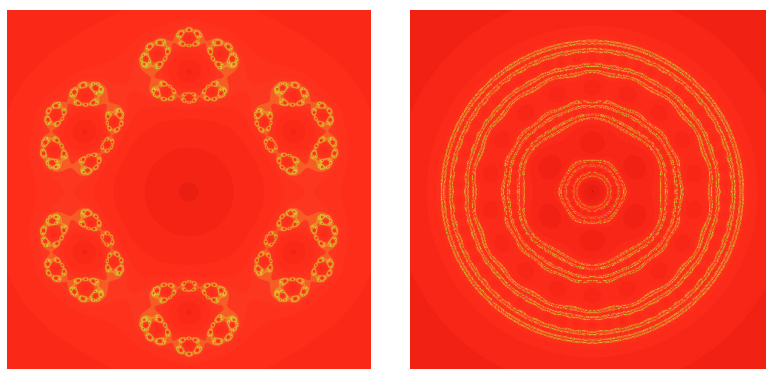
Teorema 3.2 (Tricotomia d'escapament, [5]). *Suposem que les òrbites dels punts crítics tendeixen a ∞ .*

- *Si v_λ pertany a B_λ , llavors $J(f_{\lambda,n})$ és un conjunt de Cantor.*
- *Si v_λ pertany a T_λ , llavors $J(f_{\lambda,n})$ és homeomorf a un conjunt de Cantor de cercles.*
- *Si $f_{\lambda,n}^k(v_\lambda)$ pertany a T_λ per a $k \geq 1$, llavors $J(f_{\lambda,n})$ és homeomorf a una catifa de Sierpiński.*

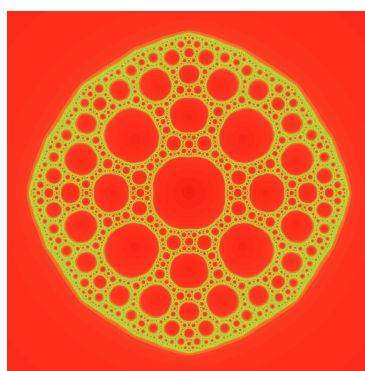
En la figura 8 veiem els tres tipus de conjunts de Julia que podem trobar en la família $f_{\lambda,n}$ quan l'òrbita crítica escapa cap a ∞ . Els punts de color vermell representen els punts que tendeixen cap a ∞ sota iteració. En tots tres casos el conjunt de Fatou està format per la conca d'atracció d' ∞ . En el primer cas, la conca d'atracció d' ∞ és reduïda a una única component connexa completament invariant; en el segon cas, tenim dos components simplement connexes, concretament B_λ i T_λ , i la resta de components són anells (components doblement connexes). Finalment, en el tercer cas, totes les components connexes de la conca d'atracció d' ∞ són simplement connexes. Pel que fa el conjunt de Julia també tenim diferents tipus de components. En el primer cas, i per tractar-se d'un conjunt de Cantor, les components són punts. En el segon cas cada una de les components del conjunt de Julia és un dels cercles (corbes simples tancades) que envolten l'origen. Finalment, en el cas de la catifa de Sierpiński, i a diferència dels dos casos anteriors, el conjunt de Julia és un conjunt connex.

Tot i que la prova completa del teorema de la tricotomia d'escapament es pot trobar al treball [5], veiem tot seguit un esbós de la prova del tercer apartat que es basa en una caracterització topològica de la catifa de Sierpiński d'un treball de G.T. Whyburn ([23] de l'any 1958), on dona quines propietats topològiques tenen els conjunts que són homeomorfs a una catifa de Sierpiński i que es pot enunciar com segueix:

Teorema 3.3. *Qualsevol conjunt del pla que tingui les cinc propietats topològiques següents:*



(a) Conjunt de Cantor si $n = 3$ i $\lambda = 0.25$.
 (b) Conjunt de Cantor de cercles si $n = 3$ i $\lambda = 0.001$.



(c) Catifa de Sierpiński si $n = 2$
 i $\lambda = -0.0625$.

Figura 8: Tres tipus diferents de conjunt de Julia dins de la família $f_{\lambda,n}(z) = z^n + \lambda/z^n$.

- *compacte*,
- *connex*,
- *localment connex*,
- *disseminat*,
- *si es consideren dos dominis diferents del seu complementari, les fronteres d'aquests dominis són corbes simples tancades sense intersecció entre elles*,

és homeomorfa a una catifa de Sierpiński.

Suposem doncs que l'òrbita crítica escapa a ∞ i que els punts crítics triguen almenys tres iterats per arribar a la conca immediata d' ∞ .

Les quatre primeres propietats es comproven fent servir tècniques generals de dinàmica complexa. El conjunt de Julia sempre és un conjunt tancat (i, per tant, compacte) de l'esfera de Riemann i, donat que l' ∞ és un punt del conjunt de Fatou, podem concloure que el conjunt de Julia és un conjunt compacte del pla. Pel que fa la connectivitat, si l'òrbita crítica tendeix a ∞ però els punts crítics no pertanyen a la conca immediata d'atracció de l' ∞ , tant B_λ com T_λ són discs oberts disjunts, fent servir la fórmula de Riemann-Hurwitz (que podeu trobar, per exemple, a [1, 15]) és fàcil deduir que totes les preimatges de T_λ també són discs oberts. Degut al teorema de Sullivan, de no existència de dominis errants, i donat que tots els punts crítics c_λ pertanyen a la conca d'atracció d' ∞ , el conjunt de Fatou és aquesta conca d'atracció i d'aquesta manera el conjunt de Julia és un conjunt connex. Pel que fa la connectivitat local, s'utilitza un resultat general de dinàmica complexa que diu que, si el conjunt de Julia d'una aplicació racional és connex i l'aplicació és hiperbòlica, el conjunt de Julia és localment connex ([15]). En el nostre cas l'aplicació és hiperbòlica, doncs tots els seus punts crítics tendeixen per iteració a ∞ , que és un punt fix superatractor. Pel que fa la cinquena propietat a comprovar, és crucial que tots els punts crítics pertanyen al conjunt de Fatou. S'utilitza, bàsicament, el fet que, si les fronteres de dos components diferents del conjunt de Fatou tenen intersecció no buida, això implicaria l'existència d'un punt crític al conjunt de Julia. Els detalls complerts d'aquesta prova es poden consultar a [5].

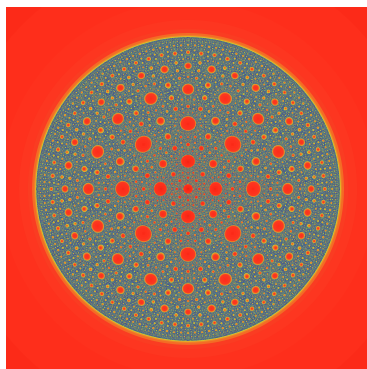
El resultat que acabem de veure sobre l'existència de diferents tipus de conjunts de Julia dins de la família de McMullen és un exemple de la riquesa topològica dels conjunts de Julia que apareixen en aquesta família de funcions racionals. A continuació podeu trobar un repàs breu d'altres resultats que s'han obtingut de la família de funcions $f_{\lambda,n}$.

Potser la primera propietat topològica a estudiar en dinàmica complexa és la connexitat del conjunt de Julia. El teorema sobre la tricotomia d'escapament ens informa parcialment sobre la connectivitat del conjunt de Julia però només quan els punts crítics escapen cap a ∞ . El conjunt de Julia és disconnex si és un conjunt de Cantor o un conjunt de Cantor de cercles, i en canvi és connex si és una catifa de Sierpiński. Què succeeix en la resta de casos? En l'article [8] es demostra que aquests són els únics casos on podem tenir un conjunt de Julia disconnex (conjunt de Cantor i conjunt de Cantor de cercles) i en la resta de casos el conjunt de Julia és connex independentment del comportament dels punts crítics.

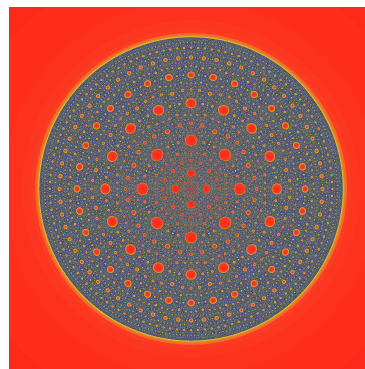
A partir del teorema de la tricotomia d'escapament també podem preguntar-nos, donat un conjunt de Julia d'un determinat tipus (Cantor, Cantor

de cercles o catifa Sierpiński), com és la dinàmica en aquest conjunt. La dinàmica de l'aplicació $f_{\lambda,n}$ restringida al conjunt de Julia en el cas del conjunt de Cantor o el conjunt de Cantor de cercles és coneguda ([5]), però en el cas de la catifa de Sierpiński hi ha resultats parcials on es comprova com damunt un mateix objecte topològic que és una catifa de Sierpiński hi ha diferents dinàmiques no conjugades ([7]).

Un altre resultat, senzill d'enunciar i bastant complicat i tècnic de provar, és la descripció topològica de la frontera de la conca immediata d'atracció d' ∞ (que denotarem per ∂B_λ). En el treball [17] es prova que, si $n \geq 3$, ∂B_λ és una corba simple tancada excepte que ∂B_λ sigui un conjunt de Cantor. En altres paraules, si $n \geq 3$ i els valors crítics $v_\lambda \notin B_\lambda$, llavors ∂B_λ és una corba de Jordan. En el cas $n = 2$, és a dir per a la família $f_{\lambda,2}$, no es coneix en tots els casos com és aquesta frontera. També existeixen estimacions de la dimensió de Hausdorff de ∂B_λ quan $n \geq 3$ ([22]).



(a) Pla dinàmic de la funció $z^2 - 0.001/z^2$.



(b) Pla dinàmic de la funció $z^2 - 0.0001/z^2$.

Figura 9: El conjunt de Julia de $f_{\lambda,2}$ tendeix al disc unitat tancat en la distància de Hausdorff quan $\lambda \rightarrow 0$.

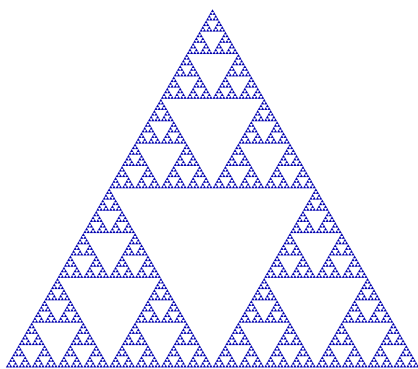
Per últim, també s'ha estudiat què succeeix amb el conjunt de Julia de $f_{\lambda,n}$ quan $\lambda \rightarrow 0$. En el cas límit, quan $\lambda = 0$, obtenim la funció z^n . Aquesta funció té un comportament dinàmic molt senzill: Les òrbites dels punts amb $|z| > 1$ tendeixen cap a ∞ , les òrbites dels punts z amb $|z| < 1$ tendeixen cap a 0, i el cercle unitat, que conté els punts amb mòdul igual a 1, és totalment invariant. De fet, el conjunt de Fatou té dos components totalment invariants, la primera és el disc obert unitat, que és la conca d'atracció de l'origen, i la segona és la conca d' ∞ , que és el complementari del disc unitat tancat. La frontera comú d'aquestes dues conques és el cercle unitat que és, per tant, el conjunt de Julia de la funció z^n . En l'article [4] es demostra que, quan $n = 2$, $J(f_{\lambda,2})$ tendeix al disc unitat tancat en la distància de Hausdorff quan $\lambda \rightarrow 0$.

(la distància de Hausdorff és la distància natural entre conjunts compactes del pla). Aquest resultat és sorprenent tenint en compte que el conjunt de Julia és disseminat (té interior buit). En el mateix treball també es prova que això no succeeix en el cas $n > 3$. En la figura 9 apareix el conjunt de Julia de la funció $f_{\lambda,2}$ per a dos valors petits del paràmetre λ .

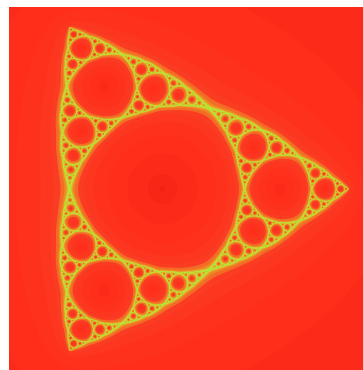
Finalitzarem aquest treball veient un conjunt de Julia homeomorf al triangle de Sierpiński. En aquest cas això succeeix per a alguns paràmetres de la família de funcions

$$g_{\lambda}(z) = z^2 + \frac{\lambda}{z}.$$

Aquesta família de funcions és molt propera a la família de McMullen i manté algunes de les propietats que hem repassat durant aquest treball. Els punts crítics de g_{λ} són les solucions de l'equació $g'_{\lambda}(z) = 0$, que venen donats per $(\lambda/2)^{1/3}$. En aquest cas tenim 3 valors crítics $3(\lambda/2)^{2/3}$ a diferència de la família de McMullen on sempre tenim 2 valors crítics. Tot i això, el conjunt de Julia és simètric sota la rotació d'una arrel cúbica de la unitat. En el treball [6] es donen condicions dinàmiques per assegurar que el conjunt de Julia d'aquesta família de funcions és homeomorf al triangle de Sierpiński (figura 10).



(a) Triangle de Sierpiński



(b) Pla dinàmic de la funció $z^2 - 0.5925/z$.

Figura 10: Exemple d'un conjunt de Julia homeomorf al triangle de Sierpiński.

Agraïments

L'autor d'aquest treball ha estat parcialment finançat pels projectes de recerca següents: 2009 SGR-792 i MTM-2008-01486 Consolider (incloent contribució FEDER).

Referències

- [1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Grad. Texts in Math. 132, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] R. L. Devaney, Singular perturbations of complex polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.* 50(3), 2013, 391-429.
- [4] R. L. Devaney, A. Garijo, Julia sets converging to the unit disk, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136, 2008, 981-988.
- [5] R. L. Devaney, D. M. Look, D. Uminsky, The escape trichotomy for singularly perturbed rational maps, *Indiana Univ. Math. J.* 54(6), 2005, 1621-1634.
- [6] R. L. Devaney, M. Moreno Rocha, S. Siegmund, Rational maps with generalized Sierpiński gasket Julia sets, *Topology and its Appl.*, 154, 2007, 11-27.
- [7] R. L. Devaney, K. Pilgrim, Dynamic classification of escape time Sierpiński curve Julia sets, *Fund. Math.*, 202, 2009, 181-198.
- [8] R. L. Devaney, E. D. Russell Connectivity of Julia sets for singularly perturbed rational maps *Chaos, CNN, Memristors and Beyond*, World Scientific, 2013, 239-245.
- [9] P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 1919-1920 47,161-271 i 48, 33-94, 208-314.
- [10] G. Julia, Memoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pure Appl.*, 1918, 8, 47-245.
- [11] G. Julia, Sur quelques problèmes relatifs a l'itération de fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci.*, 1919, 168, 147-149.
- [12] B. B. Mandelbrot, *Les objets fractals: forme, hasard, et dimension*. Flammarion, Paris, 1975.
- [13] B. B. Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

- [14] C. T. McMullen, Automorphisms of rational maps, in: *Holomorphic functions and moduli I*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 10, Springer-Verlag, New York, 1988, 31-60.
- [15] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Ann. of Math. Stud. 160, Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [16] Qiu W., P. Roesch, Wang X., and Yin Y., Hyperbolic components of McMullen maps, to appear in: *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, arXiv:1207.0266, 2012.
- [17] Qiu W., Wang X., Yin Y., Dynamics of McMullen maps, *Adv. in Math.* 229(4) 2012, 2525-2577.
- [18] W. Sierpiński, Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée, *C. R. Acad. Sci.*, 162, 1916, 629-632.
- [19] N. Steinmetz, *Rational iteration*, de Gruyter Stud. Math. 16, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.
- [20] N. Steinmetz, On the dynamics of the McMullen family $R(z) = z^m + \lambda/z^l$, *Conform. Geom. Dyn.* 10, 2006, 159-183.
- [21] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. Part I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. Math.*, 122, 1985, 401-418.
- [22] X. Wang, F. Yang, Hausdorff dimension of the boundary of the immediate basin of infinity of McMullen maps *Proc. Indian Acad. Sci.*, 124, 2014, 551-562.
- [23] G.T. Whyburn, Topological characterization of the Sierpiński, *Fund. Math.*, 45, 1958, 320-324.



Dep. d'Eng. Informàtica i Matemàtiques
Universitat Rovira i Virgili
Tarragona, Spain
antonio.garijo@urv.cat

Publicat el 2 de desembre de 2015