MAT^2

MATerials MATemàtics

Versió per a e-book del

treball no. 2 del volum 2011

www.mat.uab.cat/matmat

Quant mesuren les columnes de la UAB?

Carmen Safont

En l'àmbit científic i en el tecnològic és imprescindible mesurar magnituds. Per a físics, químics i professionals de diverses enginyeries, la pràctica de mesurar és connatural a la seva professió. Per a molts matemàtics no és habitual haver de prendre mesures. Tanmateix, també n'hi ha molts interessats en problemes que involucren mesures, i així ha estat al llarg de la història. Quan se'ns dóna una mesura, és natural preguntar-nos per la qualitat d'aquesta mesura. Aquesta és la qüestió que volem considerar. Pensem que és d'Interès general per als matemàtics.

La capacitat de mesurar una magnitud determinada depèn dels instruments de mesura disponibles. Hi ha magnituds que es pot mesurar directament, mentre que altres han de ser mesurades de manera indirecta, mitjançant fórmules de càlcul. Habitualment rebem el resultat de mesurar una magnitud real com un nombre que, degut a múltiples limitacions del procés de mesurament, només pot ser una aproximació del valor real de la magnitud mesurada. La diferència entre la magnitud mesurada i la mesura donada és l'error de mesura. Fer una estimació acurada d'aquest error de mesura és, a cert nivell, molt important.

A vegades es dóna un valor només com a primera aproximació de la mesura. Per exemple, diem que la velocitat de la llum en el buit és de 300.000 km/s. Mesures científiques acurades li calculen una velocitat de $299\,793 \pm 0.5$ km/s. Un valor acurat de la velocitat de la llum és, doncs, 299 793 km/s. Quina informació addicional aporta el ± 0.5? En primer lloc, ens indica que el valor de la velocitat de la llum no es pot determinar exactament. En segon lloc, ens indica de quin ordre és la diferència entre el valor veritable i el valor calculat. Aquest marge d'error de 0.5 km/s (1800 km/h) és molt gran comparat amb les velocitats a que ens movem nosaltres, però representa només un 0.0017 % de la magnitud mesurada. Això indica que, si l'estimació de l'error és correcta, la qualitat d'aquesta mesura és molt bona.

Ara bé, estimar l'error de mesura és difícil. A [4] (1962), per exemple, s'analitza aquest problema recollint 24 determinacions de la velocitat de la llum amb les corresponents estimacions de l'error de mesura, realitzades per 24 laboratoris d'investigació i mètodes reconeguts. Els valors de la velocitat de la llum donats pels diferents laboratoris varien en un rang d'uns 3 km/s. Uns donen una estimació de l'error de mesura de l'ordre de 0.1 km/s, mentre que altres l'estimen en uns 2.5 km/s! Aquesta disparitat de resultats dóna idea de la dificultat del problema d'estimar l'error de mesura.

L'exemple de la mesura de la velocitat de la llum pot semblar-nos, d'entrada, un problema que no ens afecta gaire. Però la nostra vida quotidiana, la nostra salut, el nostre oci, grans projectes científics, econòmics, militars, depenen d'instruments amb una tecnologia extremadament precisa. Tecnologia construïda sobre mesures acuradíssimes del temps, el GPS per exemple, que descansen sobre ciència d'alt nivell. La tecnologia ha fet un gran esforç per crear aparells que l'usuari pot fer servir prement botons, sense entendre ni remotament els principis i estructures que els fan funcionar. Aquesta és una de les raons per les quals no molta gent té necessitat de saber què vol dir exactament una expressió del tipus 299793 ± 0.5 km/s. Poques vegades veiem expressat explícitament en les mesures el marge d'error, i sovint l'única informació sobre el mateix està continguda en la darrera xifra significativa amb la qual s'expressa la mesura. Ara bé, si llegim que l'índex de refracció de l'aire és 1.0002926, i del quars 1.544, què sabem dir sobre l'error de mesura?

El problema d'objectivar la qualitat dels mesuraments té una importància capital. Sense una indicació objectiva de la qualitat d'un mesurament, cóm pot confiar en ell un usuari potencial? cóm pot comparar-se amb altres mesuraments de la mateixa magnitud o cóm es pot establir un valor de referència? Les primícies de la preocupació per aquestes qüestions provenen del camp de l'astronomia. Ja els astrònoms grecs, però sobre tot els europeus, des de Galileu i Kepler, investigaven la manera de reduir els errors i combinar els diversos mesuraments per obtenir la millor estimació del valor real que volien mesurar. El treball de Gauss *Theoria motus corporum coelestium in sec-*

tionibus conicis solem ambientium, on desenvolupava el mètode d'estimació mínims quadrats, va marcar les pautes en la manera de mesurar al llarg de tot el segle XIX (cf. [7]). L'establiment d'una metodologia general per a l'aplicació dels principis teòrics ha arribat molt més tard. El pròleg de [2] comença així: "En 1977, reconeixent la falta de consens internacional sobre l'expressió de la incertesa en els mesuraments, la màxima autoritat mundial en metrologia, el Comitè Internacional de Pesos i Mesures (CIMP) va encomanar al Bureau International des Poids et Mesures la solució d'aquest problema en coordinació amb els laboratoris d'estàndards nacionals .... Després de diverses recomanacions realitzades per successius Grups de Treball, el CIMP va encarregar a la Organització Internacional per a la Estandarització (ISO) l'elaboració d'una guia detallada que recollís les recomanacions dels Grups de Treball, considerant que era la ISO qui millor podia reflectir les necessitats emergents dels amplis interessos de la indústria i el comerç". El resultat es va publicar en 1993 com a "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" (cf. [2]). Aquesta guia estableix regles generals per avaluar i expressar l'error de mesura, regles aplicables a quasi tot tipus de mesuraments i a diversos nivells de precisió, des de mesuraments elementals a recerca fonamental. Avui es segueix les directrius establertes en aquest document a l'hora de fer comparacions internacionals de resultats de mesuraments, certificació de materials de referència estàndard i generació de dades de referència estàndard.

Aquest treball està pensat per a presentar els elements essencials del mètode científic de mesura sobre un exemple singular. La idea de mesurar l'alçada d'un arbre o un edifici de manera indirecta, usant la mesura de l'ombra i un resultat tan bàsic com el teorema de Tales, pot ser un bon pretexte per apropar el mètode científic de mesura als estudiants dels primers cursos dels graus. Tales de Milet (635 a. C. - 545 a. C.) va usar aquesta tècnica per a calcular l'alçada de les grans piràmides d'Egipte. Enmig del campus de la UAB, té certa gràcia escollir una de les quatre columnes obra de M. Alfaro, per a mesurar-ne acuradament l'alçada. Ho hem fet implicant els estudiants de pràctiques d'un curs de Mètodes Estadístics. Cada estudiant del curs havia de mesurar amb una cinta mètrica l'alçada i l'ombra d'un objecte de referència i l'ombra de la columna, i calcular amb això l'alçada de la mateixa. Fèiem una primera estimació de l'error de mesura, seguint les indicacions de [2], a partir de cada mesura individual. A més, hem fet servir el mètode estadístic per a obtenir una mesura més precisa de l'alçada de la columna usant les dades recollides per tots els estudiants, i també per a revisar les estimacions dels errors de mesura realitzades prèviament. El mètode i els instruments de mesura són rudimentaris, però tenen la virtut de permetre experimentar i comprendre la complexitat d'un procés de mesura, així com, finalment, reflexionar sobre la qualitat del resultat de les mesures realitzades.

1 "Diuen que la columna fa 30 m d'alçada"

Les columnes de la UAB, construcció emblemàtica de la nostra universitat, obra de l'arquitecte Manuel Alfaro, estan ubicades en una esplanada al sud-est del campus, vora l'autopista AP-7, sentit Tarragona. Cada una d'elles està construïda amb una sèrie de peces de pedra rosada tallades en forma de prisma quadrangular que, en apilar-se, van girant i fent que la columna adopti aspecte helicoïdal. Ens proposem mesurar d'una manera acurada l'alçada de les columnes.

Per trobar informació detallada sobre el conjunt arquitectònic es pot consultar el monogràfic[1] [6] penjat al lloc web de la UAB.

Una manera de calcular aproximadament l'alçada de les columnes és la següent: cada pedra de les que componen les columnes fa mig metre d'alçada. Comptant el nombre de pedres, s'obté que la columna més alta fa uns 40 metres. Les altres tenen una alçada de 35, 30 i 25 metres. Aquesta és l'alçada que es dóna al document citat, i no hem trobat cap mesura més precisa. Escollirem una de les columnes per mesurar-ne l'alçada. Per raons pràctiques a l'hora de mesurar, hem escollit la de 30 metres. A la fotografia següent es veu a la dreta, com aïllada de les altres, amb l'autopista al fons. D'ara endavant ens referirem a ella com a columna C.

Figura 1: la columna C, a la dreta

2 Mètode de mesura de l'alçada de la columna

Per mesurar una magnitud, cal establir el mètode i els instruments a utilitzar. Una manera de mesurar l'alçada de la columna és considerar un objecte de referència, mesurar l'ombra de l'objecte i l'ombra de la columna en el mateix moment d'un dia assolellat i després aplicar la proporcionalitat associada a la parella de triangles semblants que es mostra a la figura 2. La trajectòria de la llum del sol, i de l'ombra, podem considerar-la rectilínia i amb direcció fixa.

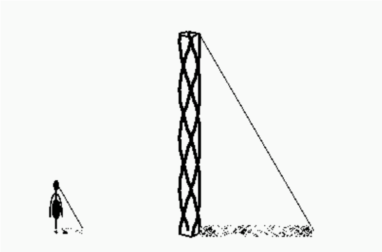

Figura 2: Semblança de triangles

Els triangles són semblants perquè els costats s'aparellen de manera que costats aparellats són paral·lels. Com a conseqüència, les longituds de costats aparellats són proporcionals. Suposem que disposem d'un objecte conegut R de referència, del qual podem mesurar l'alçada. La relació entre l'alçada de R i l'ombra de R coincideix amb la relació entre l'alçada de la columna i la longitud de la seva ombra. És a dir, si anomenem H l'alçada de la columna, S l'ombra de la columna, A l'alçada de R i O l'ombra de R,

$$\frac{H}{S} = \frac{A}{O}$$

$$H = \frac{A}{O} S \tag{1}$$

Totes les magnituds del segon membre de la igualtat (1) les podem mesurar directament amb una cinta mètrica. L'alçada de la columna s'obté com mesura indirecta.

3 Terminologia

La Metrologia és la ciència que s'ocupa de tot lo relatiu a la teoria i pràctica de mesurar. En particular, s'ocupa d'establir el significat específic dels termes rellevants a la disciplina. Les definicions dels termes metrològics es recullen al "International vocabulary of basic and general terms in metrology" (abreviat VIM). A continuació aclarim, basant-nos en aquesta font, només alguns termes, aquells que pensem que podrien resultar confusos en la nostra exposició (cf. [2], anex B).

1. **mesurament**: conjunt d'operacions encaminades a determinar el valor d'una quantitat, el mesurand.

2. **resultat d'un mesurament**: valor atribuït a un mesurand, obtingut per mesurament.

3. **exactitud de mesurament**: proximitat de

la coincidència entre el resultat d'un mesurament i el veritable valor del mesurand.

4. **error de mesurament**: resultat del mesurament menys el veritable valor del mesurand.

5. **incertesa de mesurament**: paràmetre, associat al resultat d'un mesurament, que caracteritza la dispersió dels valors que podrien ser atribuïts al mesurand.

6. **error sistemàtic**: mitjana que resultaria d'un nombre infinit de mesuraments del mateix mesurand realitzades en les mateixes condicions de repetibilitat menys el veritable valor del mesurand.

7. **error aleatori**: resultat d'un mesurament menys la mitjana que resultaria d'un nombre infinit de mesuraments del mateix mesu-

rand realitzades en les mateixes condicions de repetibilitat menys el veritable valor del mesurand.

Probablement la definició del terme *incertesa de mesurament* és l'única que resulta inesperada per a la majoria dels lectors. En sentit ampli, incertesa de mesurament significa dubte sobre la validesa del resultat d'un mesurament. Però ha calgut mesurar quantitativament aquest concepte, i sembla que no s'ha trobat paraules diferents per a distingir el concepte general de les mesures quantitatives d'aquest concepte. La definició anterior posa de manifest l'adopció d'un punt de vista estadístic en l'anàlisi dels errors de mesurament.

4 La mesura de qualsevol magnitud física com a variable aleatòria

La mesura de qualsevol magnitud física sempre està afectada per un error. Si fixem la magnitud a mesurar, aquesta té un valor, desconegut per a nosaltres, que és un número real únic i denotarem μ. Cada vegada que mesurem la magnitud, fixat el mètode i els instruments de mesura, obtindrem un valor lleugerament diferent, degut a que hi ha molts factors que introdueixen error en la mesura. Així, associada al mètode i instruments de mesura, tenim una població de valors d'una variable estadística que anomenarem X, els resultats de mesuraments de μ. En Estadística és habitual denotar amb x minúscula un valor genèric de la variable X. Amb aquesta notació, cada vegada que mesurem μ donarem com a mesura un valor x. La diferència $x - \mu$ és l'error de mesurament.

L'expressió utilitzada habitualment és la següent (cf. [5], 1.3.2):

$$X = \mu + \epsilon \tag{2}$$

Atès que μ és una constant, l'error de mesura ϵ és una altra variable. Dir que X o ϵ són variables aleatòries significa que s'assumeix una hipotètica distribució de probabilitats per a tots els possibles mesuraments de la magnitud μ (cf. [5] , 4.4). En el cas que considerem, X és una variable contínua, és a dir, pot prendre qualsevol valor entre dos valors assolits. La representació gràfica d'una mostra gran de resultats de mesuraments $x_1, \ldots, x_n$ mitjançant un histograma detallat permet comprendre aproximadament la distribució de probabilitat de X, associada a una corba de densitat de probabilitats, model dels contorns de tots els possibles histogrames. Coneguda la funció de densitat $f(x)$, es pot calcular la probabilitat que X prengui valors en un rang determinat:

$$p(x < X < x + dx) = f(x)dx,$$

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Tanmateix, aquesta no és l'única manera d'accedir a la distribució de probabilitats de X; a vegades s'assumeix un model de probabilitats per a X en base a consideracions teòriques.

La variable ϵ de l'expressió (2) difereix de X només en una translació, així que conèixer la distribució de probabilitats de X és equivalent a conèixer la de ϵ.

Havent associat al mètode de mesura un model estadístic X, podem incorporar qualsevol concepte estadístic als processos de mesura. La distribució de probabilitat de X té associades una mitjana o valor esperat $E(X)$ i una variància $V(X)$. Es defineix $E(X) = \int xf(x)$, integral sobre l'interval de variació dels possibles valors de X, paràmetre que representa un promig ponderat dels valors de X. Es defineix $V(X) = \int (x - E(X))^2 f(x)$, paràmetre que representa un promig de les desviacions dels valors de X respecte de la mitjana $E(X)$.

Sembla que es deu a C. F. Gauss (1777-1855) el descobriment del fet que els errors de mesura ϵ segueixen, quasi sempre, una distribució normal de mitjana zero. La distribució normal, anomenada indistintament Gaussiana en honor a Gauss, és la distribució de probabilitats associada a la funció de densitat

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

on θ, σ són paràmetres que, a posteriori, resulten ser el valor esperat i variància de la distribució, respectivament (cf. [5], 5.4). La gràfica següent indica com la probabilitat dels valors de X disminueix a mesura que aquests valors s'allunyen del valor esperat μ.

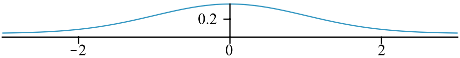

Figura 3: Distribució normal o Gaussiana típica, per a $\theta = 0, \sigma = 1$

Gauss va deduir la distribució normal dels errors de mesura quan la mitjana és el valor més probable. Que els errors de mesura es distribueixen moltes vegades de manera aproximadament normal és un fet empíric, que se sol justificar en virtut del Teorema Central del Límit (cf. [5] , 5.5; [3], 8.4.1), ja que els errors de mesura són combinació additiva de petites contribucions. El projecte de mesurar l'alçada de la columna entre tots els estudiants del curs va estar en un principi motivat pel desig de comprovar i fer veure que les mesures de l'alçada de la columna es distribueixen segons una llei normal. Si els errors de mesura segueixen una distribució normal, es diu que X segueix el **model normal de mesurament**. Aleshores, $E(\epsilon) = 0$ i $E(X) = \mu$.

En la pràctica, es fa un nombre finit de mesuraments, que serà una mostra aleatòria $x_1, \ldots, x_n$ de la distribució de X. A partir de la mostra, es pot fer **estimacions**, càlcul de valors aproximats, de paràmetres associats a X. En la majoria dels casos, la millor estimació, en sentit estadístic (cf. [5], cap. 7), del valor esperat $E(X)$ és la mitjana mostral $\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_n)$, i la millor estimació de la variància $V(X)$ és la variància mostral $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Anem a introduir una **notació específica per als mesuraments** (cf. [2], 4.1.1), que difereix lleugerament del que és habitual en Estadística. Si $\mu = E(X)$ i es fa n mesuraments independents

$x_1, \ldots, x_n$, es denotarà x la millor estimació de μ, i aquest valor és el que es donarà com a *resultat de mesurament*. Així, en la majoria dels casos, x seria la mitjana mostral $\bar{x}$. En el cas que la mesura d'una magnitud física Y depengui de la mesura d'altres magnituds $X_1, \ldots, X_n$, posem

$$Y = f(X_1, \ldots, X_n),$$

denotem igual les magnituds que les variables aleatòries associades a la mesura d'aquestes. A partir de cada resultat de mesuraments $x_1, \ldots, x_n$ de les mesures $X_1, \ldots, X_n$ de magnituds $\mu_1, \ldots, \mu_n$ s'obté un valor $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Entendrem que x_i és la millor estimació de μ_i, obtinguda potser amb més d'un mesurament; y serà l'estimació de la magnitud $f(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ que es vol mesurar.

5 Tipus d'errors

Suposem que la variable aleatòria X modela els nostres mesuraments. La **exactitud** del mètode de mesura té a veure amb el valor esperat $E(X)$, mentre que la **precisió** té a veure amb la variància $V(X)$. El mètode és tant més exacte quan $E(X)$ més s'apropi a μ (desconegut). El mètode és tant més precís quan menor sigui $V(X)$. Observant l'expressió (2), això és el mateix que dir que el mètode és tant més exacte quan el valor esperat dels errors ϵ més s'apropa a 0, ja que $E(X) = \mu + E(\epsilon)$, i tant més precís quan menor és la variància d'ϵ, ja que $V(X) = V(\epsilon)$.

Cap mètode de mesura és exacte. Cada mesurament dóna lloc a un *resultat de mesurament* x i un *error de mesurament* $\mu - x$. Tradicionalment s'ha considerat que aquest error té dues components, una anomenada *error sistemàtic* i l'altra anomenada *error aleatori*. Usarem la definició d'aquests termes donada en la secció 3. L'error sistemàtic quedaria incorporat a μ en l'expressió (2). Una manera de fer-lo explícit és escriure

$$X = \mu + \beta + \epsilon$$

on β s'anomena *biaix*, associat als errors sistemàtics, que afectaria sempre les mesures de la magnitud μ. Aleshores, ϵ seria l'error aleatori. Això és, de fet, el que expressa la definició de la secció 3.

Avui es parla d'*efectes* sistemàtics i *efectes* aleatoris. Els efectes sistemàtics estan relacionats normalment amb els mètodes i amb la qualitat dels instruments de mesura, afecten sobre tot l'exactitud de les mesures i romandran de manera constant en repetir les mesures en les mateixes condicions. Han de ser estimats a partir d'una anàlisi curosa dels instruments i les condicions experimentals i minimitzar-los forma part principal del disseny de l'experiment. Els efectes aleatoris responen a fluctuacions que donen lloc a resultats diferents cada vegada que l'experiment es repeteix en les mateixes condicions i mai es poden eliminar (vegeu [3], 4.1; [1], 1.1). Per a cada efecte sistemàtic es calcula una correcció, però sempre resta incertesa, degut a que les correccions són estimades, i els errors aleatoris no es poden eliminar.

Tindrem cura de distingir entre els termes incertesa i error. Pel terme error entendrem sempre l'error de mesurament. En canvi, a vegades usarem la paraula incertesa en el seu sentit general. Així, direm que entre els factors que introdueixen incertesa en la mesura destaquen (cf. [2], 3.3.2) les següents:

1. la definició del mesurand

2. la mostra de mesures no representa bé el mesurand

3. manca de control de les condicions ambientals en el mesurament

4. biaix personal en la lectura de l'instrument de mesura

5. resolució finita de l'instrument de mesura

6. valors inexactes de mesuraments estàndards de materials de referència, constants i paràmetres obtinguts de fonts externes i usats en l'algorisme de mesura.

7. aproximacions i assumpcions incorporades al mètode de mesura

8. variacions en observacions repetides del mesurand, en condicions aparentment idèntiques

Per exemple, en la mesura de l'alçada de la columna pel procediment que hem descrit s'ha de mesurar directament tres longituds. L'instrument de mesura serà una cinta mètrica amb apreciació de 1 mm. No es pot pretendre més exactitud en les mesures directes. Potser la cinta ha estat calibrada en unes condicions ambientals que difereixen de les condicions en el moment del mesurament, i això introduirà un petit error sistemàtic en la mesura. D'altra banda, les magnituds a mesurar directament tenen un problema de definició: on comencen i on acaben. Cada una d'aquestes mesures directes està subjecta a un error, que es propagarà al calcular amb la fórmula (1) l'alçada de la columna.

Apart, en tota recollida de dades hi ha uns errors anomenats errors crassos, que són aquells no associats pròpiament a les mesures, sinó a equivocacions humanes. Per exemple, donar un valor de la mesura en altres unitats que les establertes seria un error cras que es faria evident en un conjunt de mesures. Són els errors que primer s'ha de detectar i corregir, en el procés que s'anomena validació de dades. L'estudi que estem fent no es refereix a aquests errors.

6 Avaluació de la incertesa de mesurament

A partir d'un mesurament o una sèrie de mesuraments, el resultat de mesurament x serà la millor estimació de μ que es pot obtenir d'aquests. Donarem la mesura de μ com

$$x \pm e_x$$

on e_x denota una estimació de l'error de mesurament $\mu - x$. Amb e_x expressarem, de manera quantitativa i el més precisament possible, les limitacions que el nostre procés de mesurament introdueix en la determinació de la magnitud mesurada.

L'error de mesurament $\mu - x$ és desconegut, perquè μ és desconegut. A més, és una variable, la que hem anomenat ϵ en l'expressió (2). El problema de estimar l'error de mesurament és, des d'aquest punt de vista, el de trobar un paràmetre representatiu de la dispersió d'aquesta variable. S'anomena *incertesa de mesurament* qualsevol paràmetre associat a la dispersió d'aquesta variable (cf. secció 3). Doncs bé, al llarg del procés que ha conduït a la normalització del mètode per avaluar i expressar la incertesa de mesurament, els grups de treball han reafirmat l'elecció de la desviació tipus de ϵ, o de X, com a paràmetre clau per a expressar la dispersió de les mesures de μ. S'anomena **incertesa estàndard** del mètode de mesura X a una estimació $u(X)$ de la desviació tipus de X, arrel quadrada de $V(X)$. Per a especialistes en Estadística, això no és res més que el que s'anomena *error tipus*. Tanmateix, en l'àmbit de la metrologia és el terme incertesa estàndard el que es fa servir.

Amb aquesta elecció, el consens ha optat per una estimació *realista* de l'error de mesurament, superant el criteri d'una estimació conservadora. Els mètodes numèrics clàssics d'estimació dels errors, pensats fonamentalment per a tractar els errors d'arrodoniment, donaven la mateixa consideració a tots els possibles valors de X entre el mínim i el màxim, i escollien com a incertesa de mesurament el màxim valor de $\mu - x$. D'aquesta manera, optaven per una estimació *segura.* En el model normal de mesurament, que és molt comú, no tots els valors de X són igualment probables.

Aquesta elecció representa també superar la distinció clàssica entre errors sistemàtics i aleatoris. La correcció de cada efecte sistemàtic s'estima amb la corresponent incertesa estàndard. Aquesta incertesa contribueix a la incertesa estàndard de tot ϵ.

Finalment, aquesta elecció és consistent a l'hora de calcular la incertesa d'una variable Y que es calcula com una funció $f(X_1, \ldots, X_N)$ de diverses mesures, pretenent no subestimar ni sobreestimar-la. El càlcul clàssic de l'error en $f(X_1, \ldots, X_N)$ cercava determinar aproximadament els valors mínim i màxim de f, cosa que condueix a sobreestimar l'error resultant. La nova aproximació proposa calcular la incertesa estàndard de $f(X_1, \ldots, X_N)$ conegudes les incerteses estàndard de $X_1, \ldots, X_N$ usant l'anomenada fórmula de propagació quadràtica dels errors, que explicarem en la secció següent.

Ens proposem ara explicar la metodologia proposada per [2] per avaluar en la pràctica la incertesa estàndard u d'una variable X associada a la mesura d'una magnitud μ. Segons el mètode usat, l'avaluació de u es tipifica en una de les dues categories següents:

- Avaluació Tipus A: mètode d'avaluació de la incertesa estàndard per l'anàlisi estadística d'una sèrie d'observacions.

- Avaluació Tipus B: mètode d'avaluació de la incertesa estàndard per altres mitjans.

El principal exemple d'una incertesa estàndard obtinguda per avaluació de tipus A és té en cas de disposar de n mesures $x_1, \ldots, x_n$ de $E(X) = \mu$ obtingudes independentment. Aleshores es dóna $\bar{x}$ com a resultat de mesurament de μ. La incertesa estàndard del mesurament és aleshores $\frac{s}{\sqrt{n}}$, on s és l'arrel quadrada de

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Un altre exemple d'avaluació de tipus A seria, en la mesura del pendent α d'una recta de regressió, estimada a partir de n punts $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, obtenir el pendent de la recta mínims quadrats, i la incertesa estàndard del coeficient mitjançant la fórmula $u = s_y\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$.

Quan només es fa un mesurament x de $\mu = E(X)$, s'ha de fer una avaluació de tipus B de la incertesa estàndard de x. Aquest tipus d'avaluació recorre en general a una distribució de probabilitat a priori per a X.

L'avaluació de la incertesa estàndard d'una mesura directa sol ser de tipus B. A vegades, l'única font d'error en el mesurament és l'apreciació de l'instrument de mesura. Per exemple, suposem que volem mesurar una massa en grams i amb una bàscula digital obtenim el valor $x = 35.234$ g. Les especificacions del fabricant alerten que la tercera xifra decimal no és fiable. La manera més exacta de donar la massa és arrodonint a 35.23 g, amb incertesa estàndard 0.003. Aquesta avaluació de la incertesa estàndard és de tipus B. L'hem obtinguda sabent que els errors d'arrodoniment segueixen una distribució uniforme. La desviació estàndard de la distribució uniforme entre -0.5 i 0.5 és $\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.2887$.

Suposem, per exemple, que hem de donar un número irracional amb un cert nombre de xifres decimals. L'error de mesura és només l'error d'arrodoniment, amb distribució de probabilitat uniforme, de la qual sabem calcular la variància. Si volem donar dues xifres decimals exactes de $\sqrt{3}$, donarem 1.732 amb incertesa estàndard 0.0003, i l'avaluació d'aquesta incertesa és de tipus B.

Suposem que X té una expressió en funció d'una constant física. Prendre, per a la constant física, el valor i la incertesa estàndard citada en una font de referència reconeguda a nivell internacional, i usar-la, juntament amb altres incerteses estàndard, per a calcular la incertesa estàndard $u = u(X)$ fa que l'avaluació de u sigui de tipus B. Tot i que la incertesa estàndard d'aquesta constant hagués estat avaluada en el seu moment per un procediment de tipus A, prendre la incertesa estàndard d'un informe fa que tota avaluació que se'n derivi sigui de tipus B.

En general, no és fàcil fer una avaluació de tipus B d'una incertesa estàndard. A [2], 4.3.1, es diu que es fa amb un judici científic basat en tota la informació a l'abast sobre la variabilitat de X: mesures prèvies, experiència sobre comportament i propietats de materials i instruments rellevants, especificacions de fabricants, dades provinents de certificats i calibracions. L'avaluació de tipus B requereix experiència, però una avaluació de tipus B d'una incertesa estàndard feta per un expert pot ser tan fiable com una avaluació de tipus A, sobre tot si aquesta s'ha obtingut amb poques dades.

En qualsevol cas, si poguéssim fer avaluació d'una incertesa estàndard per ambdós mitjans, tipus A i B, hauria de conduir a valors no gaire discrepants.

7 La incertesa estàndard d'una mesura indirecta

Una magnitud es mesura de manera indirecta si el seu valor s'obté mitjançant una fórmula de càlcul a partir de la mesura d'altres magnituds:

$$Y = f(X_1, \ldots, X_n)$$

Així, a partir de cada valor $(x_1, \ldots, x_n)$ de les mesures $X_1, \ldots, X_n$ de magnituds $\mu_1, \ldots, \mu_n$, amb incerteses estàndard respectives $u_1, \ldots, u_n$, s'obté un valor $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ per a la magnitud $f(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ que es vol mesurar. Cal determinar la incertesa estàndard de Y, que denotarem u_f.

Per a obtenir (aproximadament) la incertesa estàndard de Y farem ús de l'aproximació lineal de la funció f, suposant-la diferenciable, en el punt

$(x_1, \ldots, x_n)$ i de les distribucions de probabilitat dels errors de mesura de $X_1, \ldots, X_n$.

El desenvolupament de Taylor de primer ordre de f en el punt $(x_1, \ldots, x_n)$ garanteix que si Δx_i és una petita pertorbació en el valor x_i,

$$\begin{aligned} & f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + dx_n) \\ & \qquad \approx f(x_1, \ldots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \end{aligned}$$

on $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ denota la derivada parcial de f avaluada en x_i. El desenvolupament de Taylor és una eina molt apropiada per a tractar els errors de mesura, perquè és d'esperar que aquests siguin petits. Així, si x_i és un valor de X_i, un altre valor de X_i (una altra mesura) s'expressarà $x_i + \Delta x_i$, amb Δx_i petit.

Denotant $\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$, l'aproximació anterior dóna

$$\delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{3}$$

Podem pensar $\Delta x_1, \ldots \Delta x_n, \Delta f$ com valors dels errors de mesurament de les magnituds $\mu_1, \ldots, \mu_n$, $f(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, i per extensió, l'expressió (3) com a igualtat aproximada entre variables aleatòries. Expressem-ho

$$\epsilon_f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\epsilon_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\epsilon_n$$

Aleshores, la variància de ϵ_f s'obté, aproximadament, com

$$\sigma^2(\epsilon_f) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(\epsilon_1) + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma^2(\epsilon_n) + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \sigma(\epsilon_i, \epsilon_j) \quad (4)$$

on $\sigma(\epsilon_i, \epsilon_j)$ denota la covariància entre ϵ_i, ϵ_j. En alguns casos, els errors de mesura $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ estan correlacionats, però moltes vegades són independents. Pel cas de mesures $X_1, \ldots, X_n$ amb errors independents, s'obté l'anomenada **fórmula**

de propagació quadràtica dels errors aleatoris i independents:

$$u_f \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (u_1)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (u_n)^2} \quad (5)$$

Els coeficients $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ s'anomenen *coeficients de sensitivitat.* Si hem estat capaços de determinar les incerteses estàndard $u_1, \ldots, u_n$, calcularem amb la fórmula (5) la incertesa estàndard u_f.

8 Expressió de la incertesa d'un mesurament

Si estem mesurant una magnitud μ amb un mètode de mesurament X i hem obtingut com a millor valor x, amb incertesa estàndard u, es pot expressar el resultat de la mesura com

$$x \pm u$$

Tanmateix, en l'àmbit industrial, comercial o de normatives, es demana sovint una mesura de la incertesa que defineixi un interval al voltant de x en el qual es trobi μ amb un cert nivell de confiança. Un interval $(x - U, x + U)$ s'obté aleshores multiplicant u per un coeficient de confiança que depèn de la distribució de probabilitat dels valors de X.

Si X es distribueix normalment, es té confiança aproximadament 95% que μ és major o igual que $x - 2u_x$ i és menor o igual que $x + 2u_x$, i això s'escriu habitualment $\mu = x \pm 2u$. Quan el nombre de mesuraments no és molt gran, per obtenir un interval de confiança més acurat cal calcular el coeficient de confiança amb una distribució T de Student amb un nombre de graus de llibertat que cal determinar.

Si l'interval que es dóna és de la forma $x \pm U$, s'ha de fer explícit que $U = ku$, on u és la incertesa estàndard i k és un coeficient de confiança el valor del qual s'ha de justificar.

No sempre es presenta la informació tan detalladament, i cal indagar a partir de la informació donada qui és u i qui és k. En les especificacions tècniques d'aparells o dispositius, és habitual donar el *valor nominal* x i la *tolerància* de les magnituds d'Interès. La tolerància és entesa com el límit admissible de variació en el valor mesurat, especificat de diverses maneres: com a màxima desviació respecte del valor nominal (simètrica o asimètrica), com a rang explícit de valors permesos o, si la distribució de probabilitat de X és Gaussiana, la tolerància U se considera igual a $3u$, u la incertesa estàndard de X.

El document [2] insisteix en la necessitat d'informar sobre com s'arriba a l'avaluació de la incertesa de mesurament, per tal que l'usuari del mesurament en pugui jutjar la fiabilitat. S'aconsella, en la presentació del resultat, incloure la informació següent:

1. llista de totes les components de la incertesa estàndard u.
2. incertesa estàndard de cada component, graus de llibertat si s'escau, i categoria A o B segons ha estat avaluada.
3. descripció de com ha estat avaluada cada incertesa estàndard.

9 Mesurament de l'alçada de la columna

La fórmula (1) ens diu que l'alçada H de la columna és funció de tres variables

$$H = f(A, O, S) = \frac{A}{O} S$$

on A i O són l'alçada i l'ombra d'un objecte de referència R. Comencem per escollir com a referència una persona. Cada vegada que realitzem un mesurament, obtindrem un valor h a partir de les mesures directes a, o, s. Si μ denota l'alçada de la columna C i assumint que H segueix el model normal de mesurament, $\mu = E(H)$.

El que en principi ens proposàvem era realitzar una sèrie de mesures independents $h_1, \ldots, h_n$ de l'alçada μ, donar la mitjana

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \sum h_i$$

com a resultat de mesurament, i obtenir la incertesa estàndard $u(\bar{H})$ com l' arrel quadrada de

$$u^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum (h_i - \bar{h})^2 \tag{6}$$

Prendrem com a unitat de mesura de les variables que intervenen el metre, encara que mesurarem cada variable fins al centímetre. La manera d'obtenir n mesures de l'alçada de la columna seria que cada alumne d'un curs de pràctiques d'Estadística mesurés l'alçada de la columna C prenent una referència R.

Fer una primera mesura serveix per aproximar-se als problemes potencials del mesurament. El dia 18 de juliol de 2008, a les 14:10, hora local, una mesura realitzada va donar $a = 1.73$, $o = 0.71$ i $s = 11.40$ m; el factor $\frac{a}{o}$ era, per tant, 2.4366, d'on s'obté $h = 27.78$ m.

Com calcular la incertesa associada a aquesta única mesura? En el nostre cas, l'únic instrument de mesura per a fer les mesures directes a, o i s és una cinta mètrica. Hauríem una estimació de tipus B de les incerteses estàndard de a, o i s, basant-nos en la nostra habilitat per fer les mesures amb la cinta mètrica, i calcular després $u(h)$ fent servir la fórmula de propagació quadràtica dels errors. Mai hem fet una estimació de tipus B d'una incertesa estàndard, així que la nostra estimació de $u(H)$ no tindrà la garantia que, diuen, dóna l'experiència. Ens atrevim a fer una estimació per a guanyar experiència, perquè tenim una referència per indagar si ho hem fet bé. Com $u(h)$ es una estimació de la desviació tipus de la variable aleatòria H, serà comparable a la desviació tipus mostral $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(h_i - \bar{h})^2}$ del resultat de realitzar n mesures $h_1, \ldots, h_n$ de l'alçada de la columna. Així podrem revisar aquesta primera estimació $u(h)$ de la incertesa estàndard de H quan portem a terme l'experiment de realitzar un mesurament per cada alumne. Atès que en la pràctica sempre apareixen fonts inesperades d'error, la primera estimació serà presumiblement una subestimació de l'error. En cas de discrepància, escollirem la incertesa estàndard $u(h)$ obtinguda de n mesuraments.

L'apreciació de les cintes mètriques és de 1 mm. Quan prenem una de les mesures directes, aproximem a la unitat més pròxima, en cm., i donem la mesura ± 0.5 cm. En aquest cas, l'error de mesura té dues components independents: una component és l'error d'arrodoniment, amb distribució uniforme; l'altra pot venir d'una lectura no correcta per part de l'observador, si la visual no és ortogonal al pla on es mesura en el punt on s'efectua la mesura. No tenim cap informació sobre la calibració de la cinta mètrica. Suposant que aquesta pot afectar en algun mil·límetre la mesura correcta, ens permetem negligir l'error de calibració, atès que nosaltres prenem mesures fins al cm.

Ens sembla versemblant que els errors de mesura segueixin distribució normal, almenys que els majors errors, per excés o per defecte, siguin menys probables. Així que decidim adoptar el model normal de mesurament per a A, O i S. Aleshores, si decidim quina quantitat no és superada pel 95% dels valors de l'error de mesura, Aquesta quantitat serà $2u$.

Considerem la mesura de l'alçada A d'una persona amb una cinta mètrica. S'ha de posar un extrem de la cinta a terra i fer-la arribar en vertical fins a una línia imaginària ortogonal a la vertical, que passi pel punt més alt del cap, comptant el pel. Com hem explicat, l'error de mesura de a serà la suma d'un error d'arrodoniment i un error de lectura. *Ens sembla versemblant* suposar que el 95% de les potencials mesures de l'alçada de R no diferiran en més de 2 cm (0.02 m). Aleshores

$$\begin{aligned} 4u(A) &\approx 0.02 \\ u(A) &\approx 0.005 \end{aligned}$$

Això és consistent amb el suggeriment de [1], 3.1, que recomana no prendre menys de la meitat de la darrera unitat significativa , en el nostre cas 0.5 cm., com a incertesa estàndard per a aquests tipus de mesures.

La mesura de la longitud de l'ombra de R té un problema més gros de definició: idealment, es tracta de mesurar des del peu de la vertical des del punt més alt del cap fins a l'ombra d'aquest punt. S'ha de localitzar el peu de la vertical des del punt més alt del cap! Hi haurà un error provinent de la mesura del principi de l'ombra i un altre provinent de la mesura de la fi de l'ombra. *La nostra proposta* per estimar la incertesa estàndard $u(s)$ és suposar que el 95% de les potencials mesures de l'ombra de R no diferiran en més de 6 cm (0.06 m). Aleshores

$$
\begin{aligned}
4u(O) &\approx 0.06 \\
u(O) &\approx 0.015
\end{aligned}
$$

La dificultat de mesurar l'ombra de la columna C està, d'una banda en la definició del principi i el final, com en el cas de l'ombra de R, i d'altra banda en que pot ser molt llarga, segons l'època de l'any, i el terra sobre el qual es mesura l'ombra no és del tot pla. Si l'ombra és molt llarga l'hem de mesurar empalmant cintes mètriques, així que la longitud de la línia recta ideal que volem mesurar perd definició. L'ombra S serà més curta cap al migdia i cap a l'estiu. *La nostra proposta* per estimar la incertesa estàndard $u(S)$ és suposar que el 95% de les potencials mesures de l'ombra de R no diferiran en més de 0.5 m. Aleshores

$$4u(S) \approx 0.5$$
$$u(S) \approx 0.125$$

El desenvolupament de Taylor de primer ordre de la funció f és el següent:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a+\Delta a, o+\Delta o, s+\Delta s) - f(a,o,s) \\ &= \frac{s}{o}\Delta a - \frac{a}{o}\frac{s}{o}\Delta o + \frac{a}{o}\Delta s\end{aligned}$$

També *ens sembla versemblant* que els errors de mesura $\Delta a, \Delta o, \Delta s$ són independents. Almenys no es veu cap factor de correlació entre ells. La fórmula (5) es concreta en el nostre cas a

$$u(H) \approx \sqrt{\left(\frac{s}{o}u(A)\right)^2 + \left(-\frac{a}{o}\frac{s}{o}u(O)\right)^2 + \left(\frac{a}{o}u(S)\right)^2} \tag{7}$$

La incertesa estàndard $u(H)$ calculada a partir del mesurament considerat dóna 0.666. La taula següent permet analitzar la contribució de cada component.

font d'incertesa	incertesa estàndard	coef. sensitivitat	contribució a $u^2(H)$
A	0.005 (tipus B)	16.0563	0.00004
O	0.015 (tipus B)	39.1232	0.34439
S	0.125 (tipus B)	2.4366	0.09277
			0.4436

$$u(H) = 0.666$$

Així, donaríem com a resultat del mesurament 27.78 ± 0.67 m, entenent que 0.67 és incertesa estàndard i no indica un interval de confiança per μ.

Si haguéssim calculat a la manera clàssica errors relatius, que en productes i quocients es propaguen sumant,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{f} &\approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta o}{o} + \frac{\Delta s}{s} \\ &\approx \frac{2}{173} + \frac{4}{71} + \frac{0.5}{11.4} \\ &\approx 0.012 + 0.056 + 0.044 = 0.112\end{aligned}$$

Sobre una alçada aproximada de 30 m, l'error absolut de la mesura calculat seria d'uns 3.36 m. Aquest és un valor a comparar amb $3u(H) = 2.01$ m (per a una distribució normal, un interval al voltant de la mitjana d'amplitud 3 desviacions tipus inclou el 99.7% dels valors).

Cal afegir que les estimacions anteriors de $u(A)$,

$u(O)$, $u(S)$ són ajustades. Si es relaxen una mica, augmentaria el valor estimat $u(H)$. El que més efecte tindria seria un petit augment en $u(O)$, ja que el coeficient de sensitivitat és major.

Ara bé, més important és notar que aquesta estimació $u(H)$ canviaria molt si l'objecte de referència o el moment del mesurament fossin diferents. Per exemple, un mesurament realitzat el dia 8 de març de 2009 a les 12:30, prenent com a referència una persona, va donar $a = 1.78$, $o = 2.09$, $s = 35.5$ m. Les mateixes estimacions de $u(A), u(O), u(S)$ usades amb aquest mesurament donarien $h = 30.23$ i $u(H) = 0.346$, quasi la meitat. Els factors de sensitivitat són diferents: $\frac{a}{o} \approx 0.852, \frac{s}{o} \approx 16.98$. Això ens fa veure que diversos mesuraments de la mateixa magnitud podran tindre variabilitats diferents. En aquest cas, la diferència ve essencialment de la data: el dia 18 de juliol el factor $\frac{a}{o}$ era 2.4366, mentre que el dia 8 de març era 0.852.

10 Un càlcul més afinat

Analitzem la fórmula (7).

$$u(H) \approx \sqrt{\left(\frac{s}{o}u(A)\right)^2 + \left(\frac{a}{o}\frac{s}{o}u(O)\right)^2 + \left(\frac{a}{o}u(S)\right)^2}$$

Experimentalment observem que el factor $\frac{a}{o}$, relació entre l'alçada de R i l'ombra de R (que depèn de l'hora del dia i del dia al llarg de l'any), sol tenir a l'esplanada de les columnes i cap al migdia un valor al voltant de 1 o 2 (es fa màxim al solstici d'estiu). Tanmateix, el factor $\frac{s}{o}$, relació entre l'ombra de la columna i l'ombra de R, pren en general valors més grans (10 o més) quan R és una persona. Per tant, aquest factor magnifica qualsevol error en la mesura de l'alçada de R o en la mesura de l'ombra de R. Concloem que s'ha de vigilar especialment les mesures relatives a la referència R.

El nostre mètode de mesura es basa en el fet que el factor $\frac{a}{o}$ no depèn de R, i també es basa en que l'alçada de R i l'ombra de R es mesuren com a longituds de línies rectes ideals. Quan la referència és una persona es fa molt difícil mesurar bé la longitud d'aquestes rectes ideals. El dia 23 de juliol de 2009 varem utilitzar com a referència R una agulla de longitud 20 cms plantada sobre una plataforma plana de porexpan, i a les 14:00 h. (migdia, comptant la correcció horària estacional) l'ombra de R era de 8.3 cm, i l'ombra de la columna feia 11.80 m. El factor $\frac{a}{o}$ valia, per tant, 2.4096 i $h = 28.78$ m.

Amb el dispositiu de l'agulla, l'alçada i l'ombra de R es poden mesurar amb una precisió de mil·límetres Ara la referència R és un objecte que redueix les incerteses estàndard $u(A)$ i $u(O)$. As-

Figura 4: Agulla perpendicular a una plataforma plana dipositada a terra

segurant que la visual de l'observador es mantingui en front del punt on es llegeix la longitud, l'error de mesura de a i s es distribuirà uniformement entre -0.0005 i 0.0005. Mantindrem la meitat d'aquest interval com a estimacions

$$u(A) \approx 0.0005$$
$$u(O) \approx 0.0005$$

per no subestimar l'error final (així també ens obrim a considerar factors que hauríem de tenir en compte, com la calibració de la cinta mètrica). Les incerteses estàndard associades a les mesures de R es redueixen significativament, per comparació al cas que R sigui una persona. Ara bé, el factor $\frac{s}{o}$ seria aleshores molt gran.

Dels tres sumands que contribueixen a $u(H)^2$, el tercer

$$\left(\frac{a}{o}\right)^2 u(S)^2 \approx 0.09277$$

canviaria poc substituint la referència persona pel dispositiu de l'agulla.

Tanmateix, tot i que el valor de la incertesa es reduís poc, com els valors de a i o serien més exactes prenent com a referència el dispositiu de l'agulla, també el valor calculat per a l'alçada de C hauria de ser més exacte. L'Interès d'usar aquest dispositiu seria en primer lloc millorar l'exactitud.

La taula següent mostra la contribució de cada factor a la incertesa estàndard de h.

font d'incertesa	incertesa estàndard	coef. sensitivitat	contribució a $u^2(H)$
a	0.0005 (tipus B)	142.1687	0.005053
s	0.0005 (tipus B)	342.5751	0.029339
S	0.125 (tipus B)	2.4096	0.090721
			0.125114

$$u(H) = 0.354$$

Sembla, doncs, que també guanyaríem precisió. D'altra banda, es torna a posar de manifest que diferents mesuraments tindran associades variàncies diferents.

11 L'experiment

És bo observar que l'estimació de $\mu = E(X)$, a partir de mesuraments $x_1, \ldots, x_n$, per $\bar{x}$ és òptima en dos sentits. En sentit estadístic, per a una distribució normal, la variable aleatòria mitjana mostral és l'estimador de la mitjana poblacional μ amb totes les propietats desitjables, entre les quals la de *màxima versemblança* (cf. [5], cap. 7). D'altra banda, l'avaluació de la incertesa estàndard de l'estimació és molt senzilla i fiable, de tipus A.

Seria desitjable que tots els mesuraments en els quals es basés la nostra estimació de μ tinguessin la mateixa variància. Si l'estimació es basa en mesuraments $x_1, \ldots, x_n$ on x_i pertany a una població normal de mitjana μ i variància σ_i^2, l'estimador de màxima versemblança de μ no és $\bar{X}$, sinó

$$\frac{1}{\sum \sigma_i^2} \sum_1^n \frac{X_i}{\sigma_i^2}$$

(cf. [1], 4.1), una mitjana on cada observació està ponderada per l'invers de la seva variància. Les estimacions de les seccions anteriors indiquen que per a unificar la variància dels mesuraments convé realitzar-los alhora. Per això vam convocar els estudiants a una sessió de mesures, en presència de les professores de pràctiques. Tot i així, és molt pretensiós esperar que la qualitat de les mesures de tots els estudiants sigui la mateixa; un entrenament suficient requeriria una motivació i un temps no fàcils d'aconseguir.

El dia 19 de maig de 2010 a les 13 h, estudiants de Mètodes Estadístics de la titulació d'Enginyeria Tècnica de Telecomunicacions i professores de pràctiques vam acudir a l'esplanada de les columnes. Feia un sol radiant. Les professores portàvem cintes mètriques de 5 m. Els estudiants anaven per parelles, i portaven bolígraf, calculadora i una graella de recollida de dades on havien d'anotar la seva identificació, l'alçada a i l'ombra o del company, la longitud s de l'ombra de la columna i l'hora del mesurament. Amb la calculadora havien de calcular també el factor $\frac{a}{o}$ i el producte $h = \frac{a}{o}s$.

Cada parella d'estudiants, en presència d'una professora, realitzava les mesures, omplia la graella de dades i la lliurava. Cada parella aportava una mesura de la longitud de l'ombra de la columna.

Paral·lelament, havíem muntat un dispositiu rudimentari però precís, versió millorada del dispositiu de l'agulla. Havíem estabilitzat una taula plana de fusta en posició tangent a la superfície de la terra (una bombolla de nivell romania centrada en totes direccions). Sobre aquesta taula mesuraríem, cada 5 minuts, l'ombra d'un escaire de 25 cm, en la direcció ortogonal, amb un regle que apreciava mm.

Aviat vam poder adonar-nos de la dificultat de mesurar acuradament. Les corbes del cos torçaven les cintes mètriques metàl·liques en mesurar l'alçada del company; l'ombra del company, no estava gens clar on començava , i hi havia un ventall de direccions a seguir fins arribar al tampoc clar final de l'ombra. El factor $\frac{a}{o}$ calculat pels dos membres de la mateixa parella discrepava bastant. En canvi, l'ombra de la columna era un ens molt més senzill a mesurar: no era molt llarga, i els cantons de la pedra final de la columna deixaven una marca clara en l'ombra, a l'herba.

Sortosament, al marge de la febril demanda d'atenció que assetjava les professores de pràctiques, un col·laborador aliè al curs, avesat per forma-

Figura 5: Mesurant

ció i professió a tasques experimentals de precisió, anava mesurant tranquil·lament cada cinc minuts l'ombra de l'escaire de 25 cm sobre la taula de fusta. Entre mesura i mesura ens prenia alguna fotografia i disfrutava de l'animada activitat dels estudiants. El resultat de les seves mesures apareix a la taula següent, la darrera columna de la qual s'ha calculat com a quocient entre l'alçada i longitud de l'ombra de l'escaire en cm.

Hora	o	$25/o$
13:05	10.9	2.294
13:10	10.7	2.336
13:15	10.6	2.358
13:20	10.4	2.404
13:25	10.2	2.451
13:30	10.1	2.475
13:35	10.1	2.475
13:40	9.9	2.525
13:45	9.9	2.525
13:50	9.8	2.551

Taula 1: L'ombra o de l'escaire de 25 cm en funció del temps.

12 Resultats

Amb l'experiment descrit, de fet es posen en pràctica dos submètodes de mesura de l'alçada de la columna.

1. S1: Cada mesurament es fa entre dos companys. Cada membre de la parella mesura l'alçada a i longitud o de l'ombra del company (referència R), i entre els dos mesuren la longitud s de l'ombra de la columna C. Així, cada alumne calcula un valor de $h = \frac{a}{o}s$, i el resultat del mesurament de cada parella és la mitjana dels valors obtinguts pels dos membres de la parella.

2. S2: Cada mesurament fa ús de la mesura $s(t)$ de l'ombra de la columna C presa per una parella d'estudiants en l'instant t. Prenent com a referència R l'escaire de 25 cm,

s'estimarà el factor $\alpha(t) = \frac{a}{o}$ en l'instant t a partir de les mesures de la taula 1 i es calcularà $h = \alpha(t)s(t)$. La variable t és el temps en minuts des de les 13:00 h.

El submètode S2 és un refinament del S1. Té la virtut de fixar-se en un requisit del mètode de mesura basat en la semblança de triangles que justifica la fórmula (1): el costat de l'escaire pres com a referència R és una veritable línia recta, i la seva ombra també. La capacitat de mesurar més exactament aquestes línies rectes que les corresponents línies ideals quan R és una persona ha de conduir a mesures més exactes de l'alçada de la columna. En segon lloc, S2 es fixa també en una propietat del mètode de mesura: el factor $\frac{a}{s}$ no depèn de R, però sí de l'instant en que es prenen les mesures. Finalment, la mostra de mesuraments independents amb S2 prové de les mesures independents de la longitud de l'ombra de la columna C preses pels alumnes, que a posteriori hem vist que són bastant precises.

Comparem els resultats obtinguts amb cada un dels mètodes de mesura.

Anàlisi de les dades amb S1

Tractem les mesures obtingudes per les 29 parelles d'estudiants com mesures independents de l'alçada de la columna C. L'histograma de la figura 6 mostra la distribució dels valors obtinguts.

El valor mitjà d'aquestes 29 mesures va ser 29.54 m, i la desviació estàndard 3.65 m. L'error tipus de la mitjana és, per tant, 0.68 m. Com a resultat dels mesuraments amb el mètode 1, l'alçada de la columna és

$$29.54 \pm 0.68 \text{ m}$$

Resulta decepcionant que l'histograma discrepa d'u-

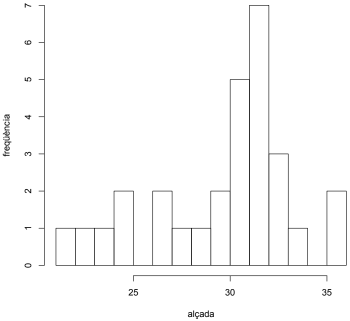

Figura 6: Distribució empírica de les mesures quan R és una persona

na forma de campana de Gauss, i que la desviació estàndard 3.65 m de les mesures és molt superior a la prevista a la secció 9, 0.67 m. Els errors de mesura han superat les previsions.

Anàlisi de les dades amb S2

En primer lloc, obtenim el factor $\alpha(t)$ ajustant els 10 valors de la taula 1 amb un model de regressió polinomial de grau 2, a saber,

$$\alpha(t) = 2.2463 + 0.0093t - 0.00007t^2$$

amb coeficient de determinació $R^2 = 0.9871$, superior al obtingut amb el model de regressió lineal ($R^2 = 0.9661$).

En extreure les variables hora i valor de s de les dades lliurades pels alumnes, es va detectar un valor repetit 5 vegades, cosa que va conduir a descartar 4 mesures. Així, disposàvem de 25 mesures independents $s(t)$. La figura 8 és un histograma

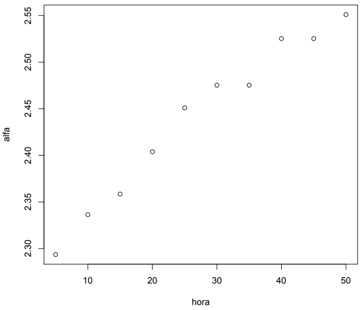

Figura 7: Núvol de punts per a les dades de la taula 1

de les 25 mesures de μ corresponents. És força consistent amb la hipòtesi de distribució normal.

El valor mitjà d'aquestes 25 mesures va ser 29.88 m, i la desviació estàndard 0.67 m. L'error tipus de la mitjana corresponent és 0.13 m. Per tant, com a resultat dels mesuraments amb S2, l'alçada de la columna és

$$29.88 \pm 0.13 \text{ m}$$

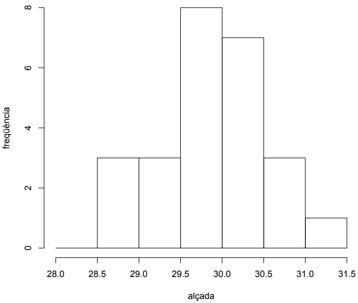

Figura 8: Distribució empírica de les mesures quan R és l'escaire de 25 cm

Un interval que garanteixi confiança 95% de contenir la veritable alçada μ s'obté multiplicant la incertesa estàndard 0.13 pel coeficient de confiança 2.0638985, corresponent a una distribució T de Student amb 24 graus de llibertat. L'interval seria, finalment,

$$29.88 \pm 0.27 \text{ m}$$

Com hauríem d'expressar la mesura si no volem fer explícita la incertesa estàndard? Hauríem de donar 29.9 m o 29.88 m? Seguint [3] (cf. 2.3), donarem el valor que millor aproximi el percentatge d'incertesa. La incertesa estàndard 0.13 m representa un 0.4% de 29.88 m. Quan no hi ha una expressió explícita de la incertesa d'un valor citat, per conveni es pren com a incertesa la meitat del rang de valors possibles que arrodoneixen al valor citat. Així, si donem el valor 29.9, la incertesa relativa seria $\frac{0.05}{29.9} \approx 0.0017$, mentre que si donem el valor 29.88 la incertesa relativa seria $\frac{0.005}{29.88} \approx 0.00017$. Com 0.17% és més proper a 0.4% que 0.017%, donarem com a valor mesurat de l'alçada de la columna 29.9 m.

Tant el plantejament com la coherència dels gràfics de les mesures fa més fiable el resultat del mesurament amb S2. Observem que la incertesa estàndard $u(H) = 0.665$ obtinguda és superior a la prevista a la secció 10, 0.354. Això és potser atribuïble a una deficiència en el disseny de l'experiment que pot ser subsanada fàcilment en qualsevol futura realització: l'hora que els estudiants van anotar en el seu mesurament era un resum imprecís dels moments en que cada parella va realitzar 5 mesures, en lloc de l'hora exacta en que van mesurar l'ombra de la columna.

Aquestes consideracions indiquen el camí per on el resultat del mesurament fet en aquest treball es podria millorar una mica. Com apunta [3, cap. 6] una petita modificació del mètode de mesura pot posar de manifest errors sistemàtics. En el nostre cas, la utilització de S2 com mètode de mesura ha revelat errors sistemàtics associats al S1, els derivats de la dificultat de mesurar la longitud de línies ideals. Una planificació perfecta de l'experiment reduiria al mínim els errors sistemàtics.

D'altra banda, es podria pensar que augmentant el nombre de mesures n arribaríem a obtenir una incertesa estàndard quasi zero. Això no és cert, perquè la incertesa estàndard obtinguda amb la fórmula (6) es refereix als errors aleatoris. Seria ineficient reduir els errors aleatoris per sota dels errors sistemàtics (cf. [1, p. 55], [3, 4.1.3]). En el nostre exemple, només assolint la desviació estàndard 0.35 m, 25 mesures independents conduirien a una incertesa estàndard de 7 cm. No té sentit aspirar a més precisió.

13 Epíleg

L'Interès potencial d'aquest treball és de caràcter pedagògic. En les diverses titulacions on els matemàtics impartim cursos introductoris d'Estadística és possible incloure com a part de les pràctiques activitats experimentals de mesuraments. Mesurar l'alçada d'una columna potser no serà motivador per a molts estudiants, i caldrà extreure un projecte de mesurament de l'àmbit dels interessos dels estudiants, amb l'ajut del professorat de matèries específiques de cada titulació.

14 Agraïments

Per portar a terme aquest treball ha calgut la col·laboració de les persones que m'han ajudat a prendre les mesures: els alumnes del cursos de Mètodes Estadístics de la titulació d'Enginyeria Tècnica de

Telecomunicacions, les professores Noèlia Viles i Isabel Serra, el professor Joan J. Carmona, i els familiars Abdeljalil i Ismael Lahmame.

Referències

[1] Bevington P. R. - Robinson D. K. , *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Higher Education. Tercera edició, 2003.

[2] JCGM, Joint Committee for Guides in Metrology, *JCGM 100:2008: Evaluation of measurement data-Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, GUM 1993 with minor corrections. Edició revisada, 2010.

[3] Kirkup L. - Frenkel B. *An Introduction to Uncertainty in Measurement Using the GUM* , Cambridge University Press, 2006.

[4] McNish A. The speed of light. IRE Trans. on Instrumentation, 11, 138-148, 1962.

[5] Peña, D. *Fundamentos de Estadística*, Alianza editorial. Tercera edició, 2008.

[6] UAB, monogràfic Una porta per al segle XXI. *L'Autònoma*, Publicació de la UAB, febrer de 1999.

[7] Olesko, K.

http://science.jrank.org/pages/49046/error-personal-equation.html

Notes

[1] http://ddd.uab.es/pub/autonoma/autonoma_a1999m2nmonografic.pdf

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
safont@mat.uab.cat

Publicat el 9 de maig de 2011