MAT^2
MATerials MATemàtics
Versió per a e-book del
treball no. 2 del volum 2012
www.mat.uab.cat/matmat

Tensió

Josep M. Burgués

El propòsit d'aquestes notes és el de deduir un model per al comportament dels objectes el·làstics a partir dels principis que estableix la teoria atòmica de Dalton. L'el-

lasticitat és, possiblement, la propietat més important pel que fa a la forma externa dels objectes materials, és dir l'embolcall extern d'un sistema de partícules.

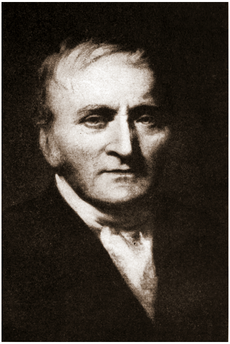
Donat l'espai de què disposem i el propòsit general d'aquesta publicació no tractarem tots els aspectes d'aquest tema, reduint-nos a una situació especial que anomenarem el model cristal·lí, suficient per a una primera aproximació quantitativa a l'estudi de cordes i membranes. Això ens estalviarà el tractament a fons dels conceptes standard que hom formula en termes de tensors, com ara els tensors dels estiraments (**strain**, en anglès) i de les tensions internes (**stress**, en anglès). El lector pot consultar-ho en una versió més general d'aquestes notes, que està en procés de finalització i és una extensió d'aquest treball.[1]

1 Estructura de la matèria

> "If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on the next generation of creatures, what statement would contain the most information in fewest words? I belive it is the atomic hypothesys (or the atomic fact, or whatever you whish to call it) that all things are made of atoms —little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance appart, but repelling upon being squeezed into one another."[2]

Richard Feynman.[3]

La hipòtesi atòmica de Dalton representa un resum de les propietats microscòpiques de la matèria que són rellevants pel que fa al comportament de la mateixa al nivell macroscòpic.



J. Dalton
(1766–1844)

En dir macroscòpic, volem dir a nivell **molecular** o més gran, en què les accions i canvis que la matèria experimenta no n'alteren la constitució ni l'estructura.

Essencialment parlem de propietats mecàniques. Així doncs, l'electromagnetisme en queda exclòs (i també la part més essencial de la química[4]), encara que les forces que actuen són de caràcter electromagnètic o fins i tot nuclear. De fet, estem interessats en els efectes a nivell macroscòpic d'aquestes forces. Un nombre gran de partícules dóna lloc a cancel·lacions en els detalls del comportament individual. Els efectes macroscòpics són els que sobreviuen a aquestes cancel·lacions, i són observables mitjançant mesuraments globals del sistema (que no tenen en compte propietats individuals de partícules concretes, i són d'un caire més aviat estadístic).

El marc de referència és el de la Física newtoniana, amb la gravetat com a únic camp que actua (a distància) sobre la matèria. Cal remarcar, però, que en la discussió que durem a terme aquest només juga un paper conceptual (en la definició de massa).

Prenem doncs el model atòmic com a punt de partida, tot pensant que no hi ha canvis en la naturalesa de la matèria que considerarem.

1.1 Sòlids elàstics

Començarem considerant un **cos material** com un sistema de N partícules (generalment N gran), que anomenarem

$$P_1, \ldots, P_N$$

amb un conjunt de números reals i positius associats

$$m_1, \ldots, m_N$$

que són les respectives masses, juntament amb uns **lligams** entre les mateixes. Aquests lligams determinen l'evolució de les distàncies mútues i de les velocitats relatives entre cada dues partícules, per a unes condicions inicials donades, i així determinen tant el contorn com l'estat del cos material.

Triem un sistema de referència espai-temporal fix, i denotem la posició de la partícula P_i a l'instant t per[5]

$$x(P_i, t).$$

En realitat, el paràmetre important pel que fa a un sistema és el conjunt de distàncies relatives,

$$d_{i,j}(t) = \|x(P_i, t) - x(P_j, t)\|,$$

per a cada $i, j = 1, \ldots, N$. Llavors un **sòlid rígid** es un sistema de partícules tal que per a tot i, j,

$$d_{i,j}(t) = \|x(P_i, t) - x(P_j, t)\|$$

és independent de t. Denotarem aquestes distàncies per $d_{i,j}$.

L'evolució de cada partícula del sistema es pot descriure mitjançant les lleis de Newton.

Aquesta és una situació ideal extrema, i, segons la teoria atòmica, si hi ha una aportació externa d'energia al sistema, aquesta reverteix en una variació (augment) dels paràmetres (freqüència, amplitud) del moviment oscil·latori de les partícules al voltant d'una posició d'equilibri. Aquesta variació té com a conseqüència una oscil·lació aleatòria de les distàncies mútues, que té com a mitjana la distància $d_{i,j}$, que és una funció d'aquesta energia, i que anomenem calor (escalfament del sistema).

L'amplitud de les oscil·lacions mitjanes, i. e. la variació mitjana de $d_{i,j}$ correspon doncs a l'estat d'energia interna del sistema i repercuteix a nivell macroscòpic en canvis d'estat (sòlid, líquid, gas), ruptures, deformacions, etc.

Ens situem al cas del sòlid rígid ideal descrit a dalt[6], en un estat d'energia donat, i, inicialment, en absència de qualsevol pertorbació externa.

Seguint la teoria atòmica, qualsevol desplaçament (provocat per forces externes) que alteri les posicions relatives de les partícules, fa aparèixer automàticament forces atractives o repulsives, segons que aquest desplaçament augmenti o disminueixi la distància mútua, respecte de la distància d'equilibri.

Sigui $\Phi_{i,j}$ la força total que experimenta la partícula P_i com a conseqüència dels desplaçament $d'_{i,j}$ relatiu respecte de la partícula P_j, inicialment a distància mútua $d_{i,j}$. Llavors $\Phi_{i,j}$ depèn de $d'_{i,j} - d_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \epsilon_{i,j}$.

Estem suposant també que la força es deu exclusivament a la deformació, es dir que

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{i,j}(\epsilon_{i,j})$$

i que

$$\Phi_{i,j}(0) = 0.$$

Suposarem cert un **principi de superposició**[7], és a dir que si Φ_i és la força total experimentada per la partícula P_i com a conseqüència de les deformacions de les distàncies d'equilibri, llavors

$$\begin{cases} \Phi_i = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i,j} \\ \\ i = 1, \ldots, N \end{cases}.$$

Aquestes forces són la causa del comportament macroscòpic que anomenem elasticitat.

Un **sòlid elàstic** és un sistema de partícules que es comporta com un sòlid rígid en absència de forces exteriors, amb les partícules situades a distàncies relatives fixes, que en direm d'equilibri, i tal que, en presència de forces exteriors presenta una deformació, és a dir una variació de les distàncies relatives entre les partícules, que denotarem per $d_{i,j} + \epsilon_{i,j}$ per a la partícula P_i, tal que la força total associada a aquestes distàncies, Φ_i, contraresta les forces exteriors F_i que actuen sobre la partícula P_i, de manera que en cessar les forces exteriors, les forces internes restitueixen les partícules a les distàncies d'equilibri.

Així doncs,

$$F_i + \Phi_i = F_i + \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i,j} = 0,$$

per a tot i.

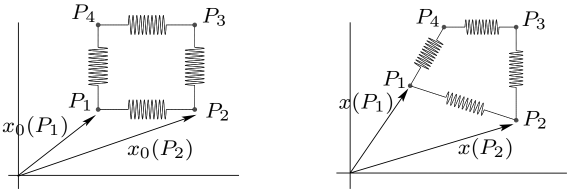


Figura 1: Cas discret

1.1.1 La llei de Hooke

La teoria de Dalton fa natural la idea que les forces internes entre cada dues partícules, $\Phi_{i,j}$, siguin degudes a oscil·ladors harmònics entre les mateixes i així obeeixen una "llei de Hooke" general, que podem formular dient que la interacció entre les partícules, $\Phi_{i,j}$, només actua en la direcció que uneix cada dues d'elles i oposant-se al desplaçament. Suposarem també que no hi ha pèrdues internes, és dir, que aquestes són les úniques forces que intervenen en el procés de recuperació[8] que segueix a una deformació (aparició de forces F_i).

Per tal de simplificar la notació, habitualment denotarem la direcció donada per dues partícules, P_i i P_j per

$$\eta_{i,j} = \frac{x(P_j) - x(P_i)}{\|x(P_j) - x(P_i)\|}.$$

Així, la força que experimenta (stress) l'oscil-lador entre dues partícules P_i i P_j és

$$\Phi_{i,j} = \left(F_i, \frac{x(P_i) - x(P_j)}{\|x(P_i) - x(P_j)\|}\right) \frac{x(P_i) - x(P_j)}{\|x(P_i) - x(P_j)\|} + \left(F_j, \frac{x(P_j) - x(P_i)}{\|x(P_j) - x(P_i)\|}\right) \frac{x(P_j) - x(P_i)}{\|x(P_j) - x(P_i)\|} = (F_i + F_j, \eta_{i,j})\, \eta_{i,j}.$$

Aquest fet reflecteix una altra característica de les forces $\Phi_{i,j}$, l'**antisimetria**:

$$\Phi_{i,j} = -\Phi_{j,i}.$$

A més,

$$\Phi_{i,j} = \varphi_{i,j}(\epsilon_{i,j})\eta_{i,j},$$

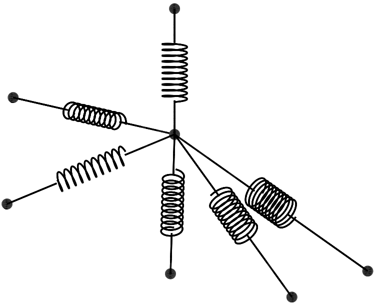
on $\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}$ són funcions regulars, cadascuna en un cert interval $I_{i,j} \subset \mathbb{R}$ i tals que $\|\varphi_{i,j}\|_{L^\infty(I_{i,j})}$ **decreix ràpidament tal com $d_{i,j}$ creix.**[9]

1.2 Estàtica i dinàmica

El tractament dels canvis en la forma del cos material es fa habitualment considerant els desplaçaments relatius de les partícules. Aquests desplaçaments es poden organitzar com una aplicació lineal, és dir un tensor, que hom considera simètric, anomenat tensor de **deformació** ("strain" en anglès). De les forces que aquests canvis fan aparèixer en una direcció determinada, hom en considera la part lineal (perqué és la que conté la informació dels termes quadràtics), que també s'organitza com un tensor simètric: el tensor de **tensió interna** o dels **esforços** ("stress" en anglès).

La relació entre ambdós és també un tensor simètric que s'anomena tensor d'**elasticitat**.[10]

Des del punt de vista dinàmic, hom pretén descriure l'evolució de la posició i la velocitat de cada partícula quan les forces que actuen sobre el sistema o la corresponent configuració del mateix canvien en el transcurs del temps.



Cada partícula té lligams amb totes les altres (de diferents magnituds segons la distància).

Ara, la posició d'una partícula P_i varia amb el temps, i la denotarem per $x(P_i, t)$.

En absència de forces exteriors (aquestes hi son simplement per a produir un desplaçament inicial des de la posició d'equilibri), o bé donat un desplaçament inicial de les partícules respecte d'una posició donada (d'equilibri) tindrem, amb la tercera llei de Newton, el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x''(P_i, t) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{N} \varphi_{i,j}(\epsilon_{i,j}(t), t) \eta_{i,j}(t) \\ \\ i = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

on

$$\epsilon_{i,j}(t) = \|x(P_i, t) - x(P_j, t)\| - d_{i,j}$$

i

$$\eta_{i,j}(t) = \frac{x(P_j, t) - x(P_i, t)}{\|x(P_j, t) - x(P_i, t)\|}$$

Alternativament, en termes d'una magnitud independent de l'elecció d'un origen de coordenades,

$$\lambda_{i,j} = x(P_j, t) - x(P_i, t),$$

i llavors tenim, per a cada i, j fixats,

$$\lambda''_{i,j}(t) = -\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{N}\{\varphi_{j,l}(\epsilon_{j,l}(t),t)\eta_{j,l}(t) - \varphi_{i,l}(\epsilon_{i,l}(t),t)\eta_{i,l}(t)\}$$
$$= -\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{N}\{\frac{\varphi_{j,l}(\|\lambda_{j,l}(t)\| - d_{j.l},t)}{\|\lambda_{j,l}(t)\|}\lambda_{j,l}(t) -$$
$$\frac{\varphi_{i,l}(\|\lambda_{i,l}(t)\| - d_{i,l},t)}{\|\lambda_{i,l}(t)\|}\lambda_{i,l}(t)\}$$

i així tenim un sistema d'equacions en les magnituds $\lambda_{p,q}(t)$ (les distàncies mútues), que, de fet és un sistema de l'ordre[11] de $\frac{N^2+N(N-1)}{2} \times \frac{N^2+N(N-1)}{2}$.

1.2.1 El cas lineal

El model més bàsic d'una força que s'oposa als desplaçaments respecte d'una posició d'equilibri el constitueix una força que actua proporcionalment als desplaçaments (cas lineal) i que físicament correspon a un oscil·lador harmònic. Així estem suposant que P_j es desplaça respecte de P_i degut a un **oscil·lador harmònic** ideal (sense fregaments) que les uneix, i amb constant $k_{i,j} \geq 0$. Es tracta simplemet d'una linealització de cada oscil·lador, consistent en considerar que els termes no lineals del desenvolupament de Taylor de $\varphi_{i,j}$ són irrelevants.

Llavors

$$\begin{aligned}\Phi_{i,j} &= -k_{i,j}\{d'_{i,j} - d_{i,j}\}\frac{x(P_i) - x(P_j)}{\|x(P_i) - x(P_j)\|} \\ &= -k_{i,j}\epsilon_{i,j}\eta_{i,j}.\end{aligned}$$

Sota aquestes hipòtesis, tenim

$$\Phi_i = -\sum_{j=1}^{N} k_{i,j}\epsilon_{i,j}\eta_{i,j}. \tag{1}$$

En un nombre important de cassos podem fer unes simplificacions força raonables, si adoptem un punt de vista macroscòpic. En primer lloc podem suposar que el sòlid (sistema) es **isotròpic**, i això es tradueix en que per a tot i, $k_{i,j} = k_{i,l}$.

També podem suposar que el material és **homogeni**, i llavors els números m_i són idèntics per a tot i, i també que els coeficients $k_{i,j}$ només depenen de la distància inicial entre les partícules P_i i P_j, i no de les posicion, velocitats o de la natura de les mateixes[12]. Així posarem $m_i = m$ i

$$\varphi_{i,j} = k(d_{i,j})\epsilon_{i,j}\eta_{i,j}.$$

En tal cas

$$\Phi_i(t) = -\sum_{j=1}^{N} k(d_{i,j})\epsilon_{i,j}\eta_{i,j}.$$

Llavors les equacions que governen la dinàmica del sistema esdevenen

$$\begin{aligned} x''(P_i,t) &= -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} k_{i,j}\epsilon_{i,j}(t)\eta_{i,j}(t) \\ &= -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} k_{i,j}\Big(1 - \frac{d_{i,j}}{\|x(P_j,t)-x(P_i,t)\|}\Big) \\ &\qquad\qquad \{x(P_i,t)-x(P_j,t)\} \end{aligned}$$

per a $i = 1, \dots, N$, o bé

$$\begin{aligned}\lambda''_{i,j}(t) = -\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{N}\Big[k_{j,l}\Big(1 - \frac{d_{i,l}}{\|x(P_l,t) - x(P_j,t)\|}\Big)&\\ \{x(P_l,t) - x(P_j,t)\}&\\ - k_{i,l}\Big(1 - \frac{d_{i,l}}{\|x(P_l,t) - x(P_i,t)\|}\Big)&\\ \{x(P_l,t) - x(P_i,t)\}\Big]&\\ = -\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{N}\Big\{k_{j,l}\Big(1 - \frac{d_{i,l}}{\|\lambda_{j,l}(t)\|}\Big)\lambda_{j,l}(t)&\\ - k_{i,l}\Big(1 - \frac{d_{i,l}}{\|\lambda_{i,l}(t)\|}\Big)\lambda_{j,l}(t)\Big\}.&\end{aligned}$$

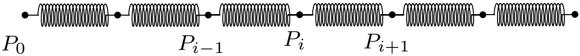
2 Els exemples clàssics

Estudiarem l'evolució lliure d'un cos el·làstic a partir d'una deformació inicial de l'estat d'equil·libri deguda a forces externes que només actuen en un interval molt curt de temps. Tal i com hem vist, és clar que l'obstacle principal a l'hora de bastir un model per a aquesta evolució és la complexitat deguda al nombre de partícules presents en qualsevol situació realista.

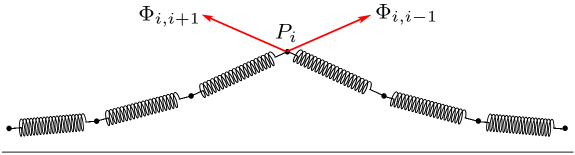
La dimensió del sistema, és dir el nombre de graus de llibertat que tenim a l'hora de donar la posició d'una partícula d'aquest, juga un paper bàsic[13] en aquesta complexitat. Així doncs, començarem pel **cas de dimensió** 1, en què tenim N partícules a $\mathbb{R}^3$, que en repòs estan uniformement distribuïdes al llarg del segment $[0, L]$, en la direcció e_1. En tal cas les posicions en repòs són $x(P_i) = (i\frac{L}{N}, 0)$, $i = 0, \ldots, N$.

Ara suposem que, inicialment, sobre cada partícula hi actua una força en una direcció constant, posem e_2. Això provoca un desplaçament[14] de totes les partícules respecte de la posició d'equil·libri en el pla $< e_1, e_2 >$.

Les equacions (1) demostren que la evolució



Posició d'equilibri



Posició inicial

posterior del sistema té lloc completament al pla $< e_1, e_2 >$.

Una suposició addicional, consisteix en què el desplaçament de les partícules es realitza al llarg de línies rectes perpendiculars a e_1. És raonable pensar que els desplaçaments laterals ("shears" en anglès, i que tenen poc a veure amb el fenomen de l'el·lasticitat) són quantitativament irrellevants.

Així, tenim, per a tot i i tot instant t,

$$x(P_i,t) = \left(i\frac{L}{N}, x_2(P_i,t)\right) = \left(i\frac{L}{N}, u_i(t)\right).$$

Aquest sistema s'anomena **corda vibrant**.

2.1 Equacions per a la corda vibrant en el cas discret

Encara un altra hipòtesi addicional: La força total sobre cada partícula P_i només depèn de les dues partícules més properes, és a dir que $\Phi_{i,j} = 0$ si $j \neq j-1, j+1$. És raonable pensar que la influència sobre una partícula donada de les partícules prou allunyades és irrellevant.

Llavors

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \phi_{i,i+1} + \phi_{i,i-1} \\ &= \varphi_{i,i+1}(\epsilon_{i,i+1})\eta_{i,i+1} - \varphi_{i-1,i}(\epsilon_{i,i-1})\eta_{i-1,i},\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}\epsilon_{j,j+1} &= \|(x_{j+1},u_{j+1})-(x_j,u_j)\| \\ &= \sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2+(u_{j+1}-u_j)^2} \\ &= |x_{j+1}-x_j|\sqrt{1+\left(\frac{u_{j+1}-u_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2}\end{aligned}$$

és la distància de P_j a P_{j+1},

$$\begin{aligned}\eta_{j,j+1} &= \frac{(x_{j+1},u_{j+1})-(x_j,u_j)}{\epsilon_{j,j+1}} \\ &= \frac{(x_{j+1}-x_j,u_{j+1}-u_j)}{|x_{j+1}-x_j|\sqrt{1+\left(\frac{u_{j+1}-u_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2}} \\ &= \frac{(1,\frac{u_{j+1}-u_j}{x_{j+1}-x_j})}{\sqrt{1+\left(\frac{u_{j+1}-u_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2}}\end{aligned}$$

si $x_j < x_{j+1}$, i posem $D_{j,j+1}$ a l'arrel que hi apareix.

La component vertical de la força es

$$\frac{\varphi_{i,i+1}(\epsilon_{i,i+1})}{D_{i,i+1}}\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{\varphi_{i-1,i}(\epsilon_{i-1,i})}{D_{i-1,i}}\frac{u_i-u_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

I així, finalment, per a cada partícula P_i tenim l'equació

$$-u_i'' = \frac{1}{m_i}\Big\{\frac{\varphi_{i,i+1}(\epsilon_{i,i+1})}{D_{i,i+1}}\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{\varphi_{i-1,i}(\epsilon_{i-1,i})}{D_{i-1,i}}\frac{u_i-u_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\Big\}.$$

Obsevació. De fet $\varphi_{i,i+1}$ depèn de $\epsilon_{i,i+1}(t)$, la variació en les distàncies relatives entre les partícules, i també de les distàncies relatives en repòs $d_{i,i+1}$, en aquest cas de les partícules $i, i+1$.

I l'equació queda

$$-u_i'' = \frac{1}{m_i}\{\frac{\varphi_{i,i+1}(\epsilon_{i,i+1})}{D_{i,i+1}}\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{\varphi_{i-1,i}(\epsilon_{i-1,i})}{D_{i-1,i}}\frac{u_i-u_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\}.$$

Obsevació. Els oscil·ladors podrien estar comprimits, produint-se llavors una força de recuperació repulsiva. Aquest és el cas d'una molla comprimida.

2.2 El model cristal·lí

Quan tractem sistemes en dimensió més gran podem fer un altra hipòtesi raonable. Donada la complicació associada al fet que totes o moltes partícules del sistema estiguin lligades entre si (per oscil·ladors), i en cànvi només la força que fan els més propers és quantitativament rellevant, ens posarem al cas més senzill en què les partícules estan inicialment situades ocupant els nusos d'una xarxa ortonormal, en les direccions de $e_1, \dots, e_n$, i que cada partícula només està lligada a les dues més properes en cada direcció. Així podem considerar la força sobre cada partícula com una superposició de cordes vibrants disposades ortonormalment.

Suposem un altre cop que el nombre de partícules és $N = K^n$, i en el repòs, la posició de la partícula P_i és

$$x_0(P_i) = \frac{L}{K}(q_1(i), \ldots, q_n(i)),$$

que ocupen el n-cub $[0, L]^n$, on $(q_1(i), \ldots, q_n(i)) \in \{0, \ldots, K\}^n \subset \mathbb{Z}^n$.

La força Φ_i que exerceix el sistema sobre una partícula P_i depèn només dels parells de partícules P_{j_s}, $P_{j'_s}$ que trobem en cada direcció e_s, així

$$\Phi_i(t) = \sum_{s=1}^{n} \{\Phi_{i,j_s} + \Phi_{i,j'_s}\}$$

i llavors tenim que, pel principi de superposició, l'acceleració total sobre la partícula P_i és la suma de les acceleracions parcials degudes a l'acció de les partícules en cada direcció ortogonal estàndard.

Llavors podem calcular aquesta acceleració com a suma de les acceleracions degudes a cordes vibrants en les direccions ortogonals estàndard.

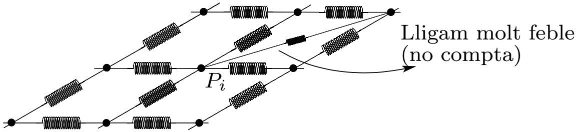
Aquesta hipòtesi permet reduir la complexitat, considerant els cassos en que $n > 1$ com a superposició de cordes vibrants en les direccions ortonormals, a través de cada partícula. I llavors, l'efecte total sobre una partícula donada és la suma dels efectes de cada corda sobre la mateixa.

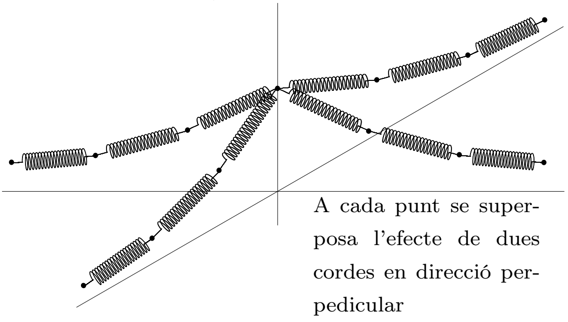
2.2.1 Membranes a $\mathbb{R}^3$ (El cas discret).

Es tracta d'un cas similar al de la corda vibrant: Un sistema de N partícules, $P_1, \ldots, P_N$, amb masses respectives $m_1, \ldots, m_N$, que en situació de repòs estan situades al pla generat per e_1, e_2, és a dir que $(x_0(P_i), e_3) = 0$ per a tot i. Llavors també $(x_0(P_i) - x_0(P_j), e_3) = 0$ pera tot i, j.

El moviment de cada partícula P_i es realitza al llarg de la direcció e_3, i així posarem

$$\begin{aligned} x(P_i, t) &= (x_1(i), x_2(i), u(i, t)) \\ &= (\tilde{x}(i), u(\tilde{x}(i), t)) \end{aligned},$$





i com que

$$\begin{cases} x''(P_i,t) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{m_i}\varphi_{i,j}(\epsilon_{i,j}(t),t)\eta_{i,j}(t) \\ i = 1,\dots,N \end{cases},$$

i

$$d_{i,j} = \|\tilde{x}(j) - \tilde{x}(i)\|$$

$$\eta_{i,j}(t) = \frac{(\tilde{x}(i)-\tilde{x}(j), u(\tilde{x}(i),t)-u(\tilde{x}(j),t))}{\sqrt{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|^2 + |u(\tilde{x}(j),t)-u(\tilde{x}(i),t)|^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{|u(\tilde{x}(j),t)-u(\tilde{x}(i),t)|}{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|}\right)^2}}$$

$$\times \left(\frac{\tilde{x}(i)-\tilde{x}(j)}{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|}, \frac{u(\tilde{x}(i),t)-u(\tilde{x}(j),t)}{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|}\right),$$

$$\epsilon_{i,j}(t) = \sqrt{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|^2 + |u(\tilde{x}(j),t)-u(\tilde{x}(i),t)|^2} - d_{i,j},$$

$$= \|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|$$

$$\left(\sqrt{1+\left(\frac{|u(\tilde{x}(j),t)-u(\tilde{x}(i),t)|}{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|}\right)^2} - 1\right).$$

Si posem llavors que

$$\tilde{D}_{i,j}(t) = \sqrt{1+\left(\frac{|u(\tilde{x}(j),t)-u(\tilde{x}(i),t)|}{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|}\right)^2}$$

tenim que per a $i = 1, \ldots, N$

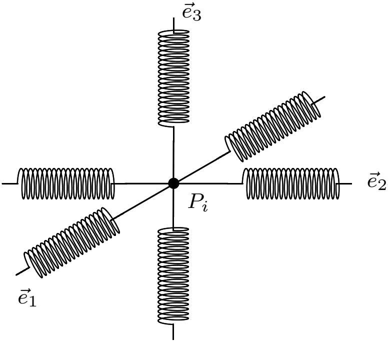
$$\begin{cases} 0 = -\displaystyle\sum_{j=1}^{N} k_{i,j} \frac{\varphi_{i,j}(d_{i,j}(\tilde{D}_{i,j}(t)-1),t)}{m_i} \frac{\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)}{\|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|} \\ \\ u''(\tilde{x}(i),t) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{N} k_{i,j} \frac{\varphi_{i,j}(d_{i,j}(\tilde{D}_{i,j}(t)-1),t)}{m_i \, \|\tilde{x}(j)-\tilde{x}(i)\|} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \{u(\tilde{x}(j),t)-u(\tilde{x}(i),t)\} \end{cases}$$

Al cas lineal, i si suposem homogeneïtat en la massa, tindrem que

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{N} k_{i,j}(\tilde{D}_{i,j}(t)-1)\ (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) = 0 \\ u''(\tilde{x}(i),t) = -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} k_{i,j}(\tilde{D}_{i,j}(t)-1) \\ \qquad\qquad\qquad \{u(\tilde{x}(j),t) - u(\tilde{x}(i),t)\}. \end{cases}$$

2.3 Sòlids elàstics (Cas discret).

En general, suposarem que en l'estat de repòs, les partícules estan situades als nusos d'una xarxa ortonormal regular, i que sobre cada partícula P_i només hi actuen forces que provenen de les partícules immediatament anterior i posterior seguint cada direcció ortogonal. Llavors, fent ús de nou del principi de superposició, la força total i l'acceleració corresponent són la suma de les forces i acceleracions parcials en cada direcció ortogonal.



A cada punt se superposa l'efecte de tres cordes en direccions perpendiculars.

Amb la mateixa notació que al cas de les membranes pel que fa a la posició d'una partícula en repòs, però considerant ara una pertorbació que només actua en l'instant inicial i donada per una força sobre cada partícula, de tipus molt general, tenim que

$$\begin{cases} x''(P_i,t) = -\dfrac{1}{m_i}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\Big\{ \dfrac{\varphi_{i,j'_s}(\|x_{j'_s}(t)-x_i(t)\| - d_{i,j'_s},t)}{\|x_{j'_s}(t)-x_i(t)\|} \\ \hfill (x_{j'_s}(t)-x_i(t)) \\ \hfill - \dfrac{\varphi_{i,j_s}(\|x_{j_s}(t)-x_i(t)\| - d_{i,j'_s},t)}{\|x_{j_s}(t)-x_i(t)\|} \\ \hfill (x_{j_s}(t)-x_i(t)) \Big\} \\ i = 1,\dots,N \end{cases}$$

i al cas lineal

$$\begin{cases} x''(P_i,t) = -\dfrac{1}{m_i}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\Big\{ \left(1 - \dfrac{d_{i,j'_s}}{\|x_{j'_s}(t)-x_i(t)\|}\right) \\ \hfill (x_{j'_s}(t)-x_i(t)) \\ \hfill - \left(1 - \dfrac{d_{i,j_s}}{\|x_{j_s}(t)-x_i(t)\|}\right) \\ \hfill (x_{j_s}(t)-x_i(t)) \Big\} \\ i = 1,\dots,N. \end{cases}$$

(Aquí hem simplificat la notació $x_i = x(P_i)$, seguint l'ordre de les posicions de les partícules en repòs).

3 El cas continu.

Es tracta d'un canvi conceptual. És el model límit del model discret quan el nombre de partícules, N, creix indefinidament i unes certes relacions entre el paràmetres tendeixen a un valor límit.

El nostre plantejament difereix del de la mecànica de fluids (en que hom considera $u(x,t)$ com la velocitat de la partícula que a l'instant t és al punt x). En el nostre cas, el que fem és un seguiment de les partícules en termes de l'evolució temporal de la posició (o de les distàncies mútues) de cada partícula inicialment en repòs, així posarem

$$\begin{cases} u(x,t) = f(x(P_i,t)), & \text{si } x = x_0(P_i) \\ \\ i = 1,\ldots,N, \end{cases}$$

on f és una funció regular (habitualment una relació senzilla)[15].

Es tracta de fet d'un límit de models que es caracteritza pel pas de les propietats del cas discret al cas que $d_{j,j+1} \to 0$. Això implica que $N \to \infty$, i també que la massa $m_i \to 0$. Aquest procés produeix una indeterminació del tipus

$$\lim_{d_{i,j}\to 0} \frac{m_i}{d_{i,j}^k},$$

que resoldrem en cada cas basant-nos en propietats físiques rellevants del model o problema en qüestió, per fixar l'existència i les propietats d'aquest límit.

Aquestes idees es poden aplicar a la formulació dels tensors de **desplaçament]**, **tensió interna** i **el·lasticitat**.[16]

3.1 La corda vibrant

El cas d'una corda de **secció** σ i **densitat** ρ constants, i de **longitud** L en repòs, es pot modelitzar per la situació límit d'una família de N partícules

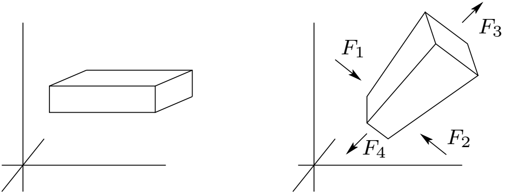


Figura 2: Les F_i són les forces externes. Les rotacions i translacions són irrellevants.

enllaçades per oscil·ladors harmònics[17] i equidistribuïdes pel segment $[0, L]$, tal i com ja hem vist, aquest pas al límit pressuposa que

$$\frac{m_i}{x_i - x_{i-1}},\ \frac{m_i}{x_{i+1} - x_i} \to \rho\sigma.$$

A l'equació principal obtinguda al cas discret, fem servir la notació

$$A_{j,j+1} = \frac{\varphi_{j,j+1}(\delta_{j,j+1})}{D_{j,j+1}},$$

i tenim

$$-u_i'' = \frac{1}{m_i}\{A_{i,i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i} - A_{i-1,i}\frac{u_i-u_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\}.$$

Així, si $x_i = x$, $x_{i+1} = x+h$ i $x_{i-1} = x-k$, llavors $u_i(t) = u(x,t)$, $u_{i+1}(t) = u(x+h,t)$, $u_{i-1}(t) = u(x-k,t)$, $A_{i,i+1}(t) = A(x+h,t)$ i $A_{i-1,i}(t) = A(x-k,t)$.

Obsevació. En fer això, hem suposat que el moviment de les partícules es realitza només en la direcció vertical.

El terme entre claus es, doncs, (ometem t per tal d'estalviar notació):

$$
\begin{aligned}
A(x+h)\,&\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - A(x-k)\,\frac{u(x-k)-u(x)}{k} \\
&= A(x+h)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x+\xi) - A(x-k)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x-\eta) \\
&= \Big\{ A(x+h) - A(x) \Big\}\,\frac{\partial u}{\partial x}(x+\xi) \\
&\qquad + A(x) \Big\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x+\xi) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \Big\} \\
&\qquad + \Big\{ A(x) - A(x-k) \Big\}\,\frac{\partial u}{\partial x}(x) \\
&\qquad + A(x-k) \Big\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x-\eta) \Big\} \\
&= \frac{\partial A}{\partial x}(x+\lambda)\, h\, \frac{\partial u}{\partial x}(x+\xi) + A(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x+\xi')\, \xi \\
&\qquad\quad - \frac{\partial A}{\partial x}(x+\mu)\, (-k)\, \frac{\partial u}{\partial x}(x) \\
&\qquad\quad - A(x-k)\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)\, (x-\eta)\, (-\eta).
\end{aligned}
$$

Per tant, passant al limit la igualtat del requadre, tenim

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho(x)\sigma(x)} \Big\{ \frac{\partial A}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big\} \\
&= \frac{2}{\rho(x)\sigma(x)} \Big\{ \frac{\partial A}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big\}.
\end{aligned}
$$

2) La part corresponent a

$$A_{j,j+1} = \frac{\varphi_{j,j+1}(\delta_{j,j+1})}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_{j+1}-u_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2}}.$$

El denominador es converteix, clarament, en

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\xi)\right)^2}.$$

El numerador és, suposant que **partim d'una posició d'equilibri en que totes les partícules estan sobre l'eix de les X, i sotmeses a un estirament inicial (o be a una tensió inicial) de magnitud $d(x)$:**

$$
\begin{aligned}
&-\varphi_{j+1,j}\Big(\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (u_{j+1}-u_j)^2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - (x_{j+1}-x_j) + d(x)\Big) \\
&= -\varphi_{j+1,j}\Big((x_{j+1}-x_j)\Big(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (x+\xi)} - 1\Big) + d(x)\Big) \\
&= -\varphi\Big(x, h\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (x+\xi)} - 1\right) + d(x)\Big)
\end{aligned}
$$

i si suposem que φ, i per tant τ està associada al material i **no depèn de** t

$$= -\varphi(x, d(x)) = -\tau(x)\,.$$

I llavors l'equació queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Consideracions estàndard com ara que k, τ són constants, per homogeneïtat i isotropia i que els desplaçaments, i per tant $\frac{\partial u}{\partial x}$, són petits[18], obtenim l'equació d'una corda vibrant ideal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.2 Membranes a $\mathbb{R}^3$.

El model ideal d'una membrana a $\mathbb{R}^3$ el constitueix una regió acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, (modela una làmina, és a dir un objecte amb **gruix** constant i de la mida del diàmetre d'una qualsevol de les partícules que el composen).

Com al cas d'una corda, suposarem que les aproximacions per models discrets, cadascun constituït per un nombre finit N de partícules té una situació límit caracteritzada pel fet que, per a cada i, si

$$\delta_i = \min\{\|x(P_i) - x(P_j)\|;\ j \neq i\},$$

llavors $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_i = 0$, i

$$\lim_{\delta_i \to 0} \frac{m_i}{\delta_i^2} = \rho(\tilde{x}_0(P_i))\,\kappa(\tilde{x}_0(P_i)),$$

on ρ, κ són funcions regulars de la posició $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$.

Tal i com hem observat abans en la secció homòloga a aquesta, el tractament general d'aquest model demana eines avançades d'anàlisi vectorial i integració que excedeixen els propòsits d'aquest escrit.[19]

Fent servir el model cristal·lí per a cada N fixat, la situació és la que ja hem descrit als apartats 2.2 i 2.2.1, que tal i com hem comentat abans passa a ser en cada punt, la superposició de 2 cordes vibrants en les direccions e_1, e_2, i tenim, partint de les consideracions exposades a 2.2.1 i de la deducció feta a 3.1, que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k(x) \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\, u}{\partial x_s}\right)^2}} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right),$$

i com que

$$\frac{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\ u}{\partial x_s}\right)^2}}-1=$$

$$\frac{\sum\limits_{l\neq s}\left(\frac{\partial\ u}{\partial x_s}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\ u}{\partial x_s}\right)^2}\ \left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\ u}{\partial x_s}\right)^2}+\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}\ \right)},$$

tenim que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=k(x)\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)\\&\quad+k(x)\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\tau(x)B_s(u(x),x)}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right),\end{aligned}$$

que condueix a l'expressió habitual

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=k(x)\ \mathrm{div}\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\nabla u\right)\\&\qquad+O\left(\frac{k(x)\|\nabla u\|^2\ \|D^2 u\|}{1+\|\nabla u\|^3}\right).\end{aligned}$$

Fent les mateixes consideracions restrictives sobre τ, k i ∇u que al final de l'apartat anterior, tenim *l'equació de les ones en dimensió* 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K\,\Delta u = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right).$$

3.3 El cas general

Suposem que el sòlid ocupa la regió[20] $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$ i que la matèria està uniformement distribuïda (ocupa tot el volum de forma contínua), i és isotròpica i uniforme, encara que potser no la massa, donant lloc a una funció de densitat $\rho(x)$, i $\Omega = \{\rho > 0\}$.

Per al cas continu, suposem que $\mathbb{R}^3$ està "quadriculat"[21] en cubs Q_i d'aresta $\delta > 0$ i que hi ha una única partícula al centre x_i de cada cub Q_i que interseca Ω.

En tal cas tenim $d_{i,j} \leq \delta$, i $\rho_i = \rho(x_i) = \frac{m_i}{V(Q_i)} = \frac{m_i}{\delta^3}$. Suposem que existeix una funció $\rho_0(x)$, regular a $\mathbb{R}^3$, tal que per a tot punt $x_0 \in \mathbb{R}^3$,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m_i}{V(Q_i^{(\delta)})} = \chi_\Omega(x_0)\rho_0(x_0) = \rho(x_0),$$

per a $Q_i^{(\delta)}$ cub de mida δ i que conté x_0.

Estem suposant que hi ha, per a cada grau d'aproximació δ, una família de partícules amb un oscil·lador harmònic entre cada dues.

Ens posem al cas lineal i en la situació reduïda, és a dir que en repòs les partícules que actuen sobre una de fixada són les dues més properes en cada direcció ortonormal donada per la base estàndard de $\mathbb{R}^3$.

Si, com abans, $x_0(P_i)$ i $x(P_i, t)$ són respectivament les posicions d'una partícula P_i en repòs i de la mateixa partícula a l'instant t, i posem $x = x_0(P_i)$ i $u_s(x, t) = (x(P_i, t), e_s)$, i considerem

$u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_3(x,t))$, tenim que les forces que provoquen el desplaçament en la direcció e_s són degudes a les partícules en les direccions ortogonals a e_s perquè en aquesta direcció l'increment de la distància relativa entre P_i i P_{j_s} es compensa amb una força deguda a l'escurçament relatiu de la distància amb la partícula $P_{j_s'}$.

Llavors, procedint com abans, tenim

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k(x)\,(\mathrm{div}_1 &\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{1+\|\nabla_1 u_1\|^2}}\nabla_1 u_1\right),\ \ldots\ , \\ &\mathrm{div}_3\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{1+\|\nabla_3 u\|^2}}\nabla_3 u\right)) \\ &+ O\left(\frac{k(x)\|\nabla u\|^2\ \|D^2 u\|}{1+\|\nabla u\|^3}\right),\end{aligned}$$

on div_i, ∇_i indiquen que no hi ha derivació respecte de la variable x_i.

4 Cloenda

Aquest treball va començar fa molt de temps. Té el seu origen en alguna de les vegades que he pogut participar com a professor de problemes d'algun curs[22] de E. D. P.'s al Dept. de Mates. de la U. A. B.; i fou motivat pel fet de no acabar d'entendre (des d'el punt de vista físic) la noció de tensió usada en la deducció de l'equació de la corda vibrant que apareix a [S].

La idea dels oscil·ladors com a element bàsic de l'el·lasticitat prové de [STZB]. També hi ha un suggeriment a [FLS1], que no vaig descobrir fins més tard, amb el treball acabat (des d'el punt de vista conceptual).

Per a una aproximació més completa (sobre tot des d'el punt de vista físic) al tema de l'elasticitat, podeu mirar [FLS2], [FLS1] i [LL].

La frase d'en Feynman que encapçala aquest escrit, està treta de [FLS2] i ha estat usada altres cops (desprès d'aquest escrit, i abans també, segurament), de forma totalment independent amb el mateix propòsit, per exemple a [Fa].

En el relativament recent llibre [Fo] hi ha una deducció de l'equació de la corda vibrant que té certes similituds amb la que presentem aquí. Però es limita a la deducció de l'equació de les ones en dimensió 1.

Referències

[FLS1] Feynman, Richard P., Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics.* Vol. 1. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London (1963).

[FLS2] Feynman, Richard P., Leighton,

ROBERT B., SANDS, MATTHEW. *The Feynman lectures on physics.* Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London (1964).

[LL] LANDAU, I. D., LIFSHITZ, E. M. *Theory of elasticity.* Pergamon Press. Oxford, 1970.

[S] SCHWARTZ, L. *Métodos matemáticos para las ciencia físicas.*, Ed. Reverté, 1970.

[STZB] SOKOLOV, A. A., TERNOV, I. M., ZHUKOVSKI, V. CH., BORISOV, A. V. *Electrodinámica cuántica.* Ed. Mir Moscou, 1991.

[Fa] FARIS, W. Review of Roland Omnès, *The interpretation of quantum mechanics.* Notices Amer. Math. Soc., vol. 43(11), 1996, pp. 1328–1339.

[Fo] Folland, Gerald B. *Quantum field theory. A tourist guide for mathematicians.* Mathematical Surveys and Monographs, 149. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

Notes

[1] Apareixerà com un annex a http://mat.uab.cat/matmat/Vol2012.

[2] La descripció que ve a continuació és d'una gran precisió i totes les paraules són importants.

[3] Físic nord-americà, premi Nobel de física l'any 1965, considerat com un dels més influents del segle XX.

[4] Aquestes propietats també expliquen fenòmens a nivells més profunds, alguns tipus de dissolucions i dispersions, però no completament.

[5] Si no volem considerar partícules puntuals (i

per tant amb densitat infinita), pensarem que aquesta magnitud es refereix a la posició del centre de masses i que les distàncies rellevants, bàsicament la distància entre cada dues partícules, són significativament més grans que el radi d'una partícula, de manera que aquest no té cap influència en els processos que estem considerant.

[6]De fet, estem suposant que la oscil·lació aleatòria al voltant de les posicions corresponents al centre de masses és negligible. Es tracta d'un cas límit del cas més realista en que les partícules no són puntuals.

[7]Avalat pels experiments.

[8]Com ja hem observat abans, no hi ha conversió en calor ni en electricitat.

[9]Això propicia que només les partícules relativament poperes a una de donada influeixin sobre els moviments d'aquesta. Recordem que $\|\varphi\|_{L^\infty(I)}$

denota el valor màxim del valor absolut de la funció φ a l'interval I.

[10] Podeu veure un tractament extensiu i rigorós en aquesta mateixa línia a l'annex mencionat a la introducció.

[11]Això, per a N gran, palesa la conveniència de passar al cas continu i la consideració de variables macroscòpiques.

[12]Podem suposar per exemple que $k_{i,j} = c\frac{1}{d_{i,j}^{\kappa}}$, on c, κ són constants associades als materials

[13]De fet n'és l'exponent.

[14]Per exemple aplicant-la a una sola partícula. Els oscil·l adors fan que el desplaçament es propagui a totes les partícules, i en aquesta direcció, tal i com hom pot deduir de les equacions (1).

[15]El cas estàtic és el cas en que la dependència temporal és constant

[16]A l'annex citat a la introducció podeu consul-

tar un tractament més a fons del tema.

[17]Al cas homogeni, pensem que els oscil·ladors harmònics són idèntics, i. e. $k_{i,j} = k$, per a tot i, j.

[18]És el cas de la major part dels instruments musicals de corda.

[19]Per a una aproximació més rigorosa, mireu l'annex citat a la introducció.

[20]Relativament compacta.

[21]Ço és, $\mathbb{R}^3$ és reunió numerable de cubs 3-dimensionals, de costats paral·lels als eixos de coordenades i que només tenen fronteres en comú. El punt 0 és sempre un vèrtex.

[22]Els cursos entre 1986 i 1990.

Dpt. de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
josep@mat.uab.cat

Publicat el 30 de novembre de 2012
(Primera versió rebuda el desembre de 2011)