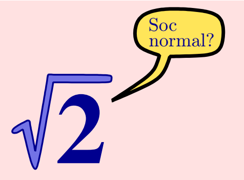
MAT^2
MATerials MATemàtics
Versió per a e-book del
treball no. 1 del volum 2016
www.mat.uab.cat/matmat

Números Normals

Artur Nicolau

1 Introducció



A la més tendra infància aprenem els números naturals 1, 2, 3, 4 … i, en canvi, els enters negatius requereixen una maduresa superior. De forma anàloga, els números enters negatius van trigar molt a ser admesos a Occident encara que matemàtics xinesos i hindús, comprenien i operaven amb números enters negatius a l'antigor. No va ser fins al voltant del segle XVII que foren admesos de forma general. Fins llavors, per exemple, quan una equació tenia una solució negativa es deia que la solució era absurda.

Els números racionals són els quocients de números enters, és dir, números de la forma p/q on p i q son enters i q no és nul. La notació habitual, $\mathbb{Q}$, va ser introduïda pel matemàtic italià

G. Peano a finals del segle XIX i correspon a la paraula *quoziente*. A la civilització clàssica grega, i especialment a l'època dels Pitagòrics al segle V a.C., es creia que totes les magnituds eren commensurables, és a dir que, donades dues magnituds, sempre es podien posar en proporció d'una unitat comuna. Per això la descoberta que el número $\sqrt{2}$ és irracional, i que per tant la diagonal d'un triangle rectangle amb catets de mida 1 no era commensurable amb la unitat, deuria causar una commoció profunda. Els matemàtics Pitagòrics formaven un grup compacte de persones interessades en la matemàtica, l'astronomia, la música i la filosofia. Encara que no tenim notícies directes d'ells, tenim informació mitjançant altres autors que en parlen, encara que sovint les històries que en sabem semblen veritables llegendes.

Hipàs de Metapont

Així, diversos autors designen al pitagòric Hipàs de Metapont (una colònia grega a la península italiana) com la persona que va descobrir que $\sqrt{2}$ és irracional. La llegenda explica que Hipàs va descobrir que $\sqrt{2}$ era irracional i va comunicar el seu resultat a persones alienes al grup dels Pitagòrics. Els pitagòrics, que tenien una llei de silenci, van considerar això una traïció i van condemnar Hipàs a mort. Altres fonts indiquen que Hipàs, en convèncer-se que $\sqrt{2}$ era irracional va decidir suïcidar-se. En qualsevol cas, sembla que les conseqüències van ser dramàtiques, almenys per Hipàs.

Els números reals són el conjunt de números que habitualment utilitzem per mesurar magnituds físiques com ara la massa, la posició o la càrrega elèctrica. L'any 1874, el matemàtic alemany G. Cantor havia provat que, contràriament als racionals, els números reals no podien donar-se en una llista, encara que aquesta fos infinita. Pocs anys després, els matemàtics francesos E. Borel i H. Lebesgue estaven creant la Teoria de la Mesura i, de forma natural, va aparèixer la pregunta:

Com és un número real típic?

Habitualment utilitzem els números reals amb la seva expressió decimal. Per exemple, parlem de $1,250$ kilos de pernil o bé de $0,33$ litres de cervesa. Així, qualsevol número real x és una certa unitat seguida de decimals, és dir, $x = x_0, x_1x_2x_3\ldots$ on x_0 és un número enter i $x_1, x_2, x_3\ldots$ són números enters entre 0 i 9. Això és el que coneixem com l'expressió decimal, o en base 10, del número real x. D'aquesta forma, en l'ambient dels números reals, els racionals es distingeixen fàcilment perquè són els números reals que tenen una expressió decimal que acaba per ser periòdica.

2 Números normals en base 10

Els números simplement normals en base 10 són els números reals tals que la seva descomposició decimal no privilegia cap dígit en front dels altres. És a dir, que aproximadament tots els dígits són presents amb la mateixa freqüència. Com que hi ha deu dígits $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 9$, això significa que cada dígit apareix aproximadament amb freqüència $1/10$. Si es vol una definició més formal es pot dir:

Sigui x *un número real amb expressió decimal* $x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ *Donat un dígit* i *entre* 0 *i* 9 *considerem el número de vegades que aquest dígit* i

apareix entre els primers N decimals de x, és dir,

$$A(i, N) = \text{número de vegades que el dígit } i \text{ apareix a } x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_N$$

Diem llavors que el número x és simplement normal en base 10 *si per a qualsevol dígit* $i = 0, 1, \ldots, 9$, *es compleix*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A(i, N)}{N} = \frac{1}{10}.$$

D'aquesta forma, el número $0,3333\ldots$ no és simplement normal en base 10, perquè òbviament privilegia el dígit 3 en front de tots els altres. En canvi el número $0,\overline{0123456789}$ és simplement normal en base 10. Observem que aquesta es una noció asimptòtica en el sentit que els primers decimals del número no importen i, de fet, únicament és rellevant el que succeeix des d'una posició cap endavant.

Els números normals en base 10 es defineixen d'una forma anàloga, canviant el dígit i per un conjunt arbitrari de dígits d'una llargada qualsevol. Així un número real és normal en base 10, si en la seva expressió decimal no hi ha cap bloc d'un número qualsevol de dígits que sigui privilegiat enfront dels altres de la mateixa mida. Donat que hi ha 10^k blocs diferents de k dígits, això significa que cada bloc de k dígits apareix aproximadament amb freqüència $1/10^k$. Per exemple, a l'expressió decimal d'un número normal, el bloc 257 apareix amb la mateixa freqüència, aproximadament, que el bloc 373 o el bloc 590. Formalitzant un altre cop una mica més:

Sigui x un número real amb expressió decimal $x = x_0, x_1x_2x_3\ldots$. Sigui $\mathcal{B}$ un bloc de k dígits entre

0 *i* 9. *Considerem*

$$A(\mathcal{B}, N) = \text{número de vegades que el bloc } \mathcal{B}$$
$$\text{apareix a } x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_N$$

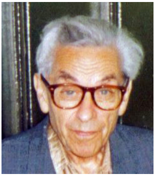
Diem llavors que el número x *és normal en base* 10 *si per a tot* $k = 1,\ 2, \ldots$ *i tot bloc* $\mathcal{B}$ *de* k *dígits, es compleix que*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A(\mathcal{B}, N)}{N} = \frac{1}{10^k}\,.$$

Observem que cap número racional pot ser normal en base 10. En efecte, si el número és racional, la seva descomposició decimal acaba per ser periòdica i per tant privilegia el bloc que correspon al període en front de tots els altres. Com veurem més endavant, el gran matemàtic francès Émile Borel va demostrar que gairebé tots els números són normals. No obstant, no és fàcil donar-ne exemples concrets. L'any 1933 Champernowne va demostrar que el número que s'obté en escriure els números naturals de forma consecutiva

$$0{,}1234567891011121314\ldots$$

és un número normal en base 10. Dos anys més tard Besicovitch va demostrar que, si canviem la successió de números naturals per la dels seus quadrats, el número resultant continua sent normal en base 10. És a dir $0,149162536\ldots$ és normal en base 10.



P. Erdös (1913–1996)

Aquest resultat ha estat generalitzat en un treballl de Davenport i Erdös i també per altres autors. De forma similar, si es canvia la successió de números naturals per la successió dels números primers el número resultant continua sent normal. Més concretament, l'any 1946, Copeland i Erdös van demostrar que el número $0,23571113171923\ldots$ és normal en base 10. Observem que tots aquests exemples són molt notables perquè significa que la descomposició decimal de qualsevol d'aquests números conté qualsevol bloc prefixat de dígits, i a més ho fa amb la freqüència corresponent. Per exemple, en l'expressió decimal de qualsevol d'aquests números apareix el número de telèfon del lector i apareix amb la freqüència $1/10^9$. També apareixeran tots els números de telèfon de l'agenda del lector, això sí, amb una freqüència molt més petita, si el lector té una vida social molt activa.

3 Números Normals

Fixem un número enter $b \geq 2$. Fem ara un anàlisi semblant canviant la base 10 per la base b. Si volem escriure números en base b, tenim b dígits disponibles que són $0,\ 1, \ldots, b-1$. Per centrar idees, pensem que volem desenvolupar un número real x que està a l'interval $[0,1]$ en base b. De forma anàloga al que es fa en base 10, dividim l'interval $[0,1]$ en b intervals disjunts de la mateixa longitud i els ordenem d'esquerra a dreta, obtenint els intervals $I_1, I_2 \ldots I_b$. El criteri és el següent: si el número x està a l'interval I_k diem que el primer dígit de x en base b és $k-1$. Per definir el següents dígits procedim de forma anàloga, canviant l'interval $[0,1]$ per l'interval I_k. Així doncs, de forma anàloga a l'expressió decimal, escrivim l'expressió en base b com $x = x_0, x_1x_2x_3\ldots$ on ara $x_1, x_2, x_3\ldots$ són números enters entre 0 i $b-1$. Un número és normal en base

b si en la seva expressió en base b cada bloc de k dígits entre 0 i $b-1$ apareix amb una freqüència aproximada de $1/b^k$. Més formalment:

Sigui x un número real amb expressió en base b de la forma $x = x_0, x_1x_2x_3\ldots$ Sigui $\mathcal{B}$ un bloc de k dígits, tots ells entre 0 *i* $b-1$. *Considerem*

$$A(\mathcal{B}, N) = \text{número de vegades que el bloc } \mathcal{B} \text{ apareix a } x_0, x_1x_2x_3\ldots x_N$$

Diem llavors que el número x és normal en base b si per a tot $k = 1,\ 2, \ldots$ i tot bloc $\mathcal{B}$ de k dígits, es compleix que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(\mathcal{B}, N)}{N} = \frac{1}{b^k}\,.$$

Novament, aquesta és una noció asimptòtita, en el sentit que els primers dígits no importen i el que és rellevant són els dígits des d'una posició endavant. Finalment, *diem que un número és normal si escrit amb qualsevol base és normal en el sentit anterior.*

Per enunciar el resultat central sobre números normals, necessitem un concepte de la Teoria de la Mesura. El problema de determinar la longitud d'un conjunt de números reals va ser resolt per Henri Lebesgue a començaments del segle XX. Es tracta d'un problema difícil que va donar lloc al que avui coneixem com Teoria de la Mesura. Afortunadament per a la nostra discussió es necessita únicament el concepte de conjunt de números reals de longitud 0. És clar que la longitud $|I|$ de l'interval $I = (a, b)$ és $|I| = b - a$. Dit ràpidament, els conjunts de mesura zero són aquells que estan continguts en unions d'intervals de longitud arbitràriament petita. Amb més precisió:

Sigui E un subconjunt de números reals. Diem que E té longitud 0 si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeixen intervals $\{I_j\}$ tals que $E \subset \cup I_j$ i $\sum |I_j| < \varepsilon$.

Veiem-ne alguns exemples: Sigui $E = \{e_j : j = 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$ un conjunt numerable, és dir, una successió. Donat $\varepsilon > 0$, considerem l'interval I_j centrat al punt e_j de longitud $\varepsilon/2^{j+1}$. És clar que $E \subset \cup I_j$ i $\sum |I_j| < \varepsilon$. Així qualsevol conjunt numerable té longitud 0. Per exemple, els números racionals són un conjunt de longitud 0 i per tant la longitud dels números irracionals de l'interval $[0, 1]$ (el seu complementari) és 1. Vegem ara un exemple menys senzill. Sigui E el conjunt de Cantor, format pels números entre 0 i 1 tals que a la seva expressió en base 3 únicament apareixen zeros i dosos. Donat que el primer dígit en base 3 dels números del conjunt de Cantor ha de ser 0 o 2, el conjunt de Cantor està contingut a $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, que denominem primera generació. Donat que el segon dígit dels números del conjunt de Cantor ha de ser 0 o 2, el conjunt de Cantor està contingut a $E_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, que denominem segona generació. Es van definint les generacions successives de forma anàloga, observant que cada interval de la generació precedent es divideix en tres parts de la mateixa longitud i es descarta la part central. D'aquesta forma, el conjunt de Cantor és recobert per la unió dels 2^N intervals de la generació N-èssima. De fet $E = \cap_N E_N$ on E_N es unió de 2^N intervals de longitud 3^{-N}. Com que $2^N\, 3^{-N}$ tendeix a 0 quan $N \to \infty$, es dedueix que el conjunt de Cantor també té longitud zero. Convé mencionar aquí que el conjunt de Cantor és no numerable, és dir, els números del conjunt de Cantor no poden donar-se en una llista, encara que aquesta sigui infinita.

Diem que una propietat es compleix *gairebé per tot* si es compleix per a tots els números reals x, tret, potser, d'un conjunt de números que té longitud zero. El resultat central d'aquest tema és el teorema d'Emile Borel de l'any 1909 publicat a [Bo] que s'enuncia a continuació.

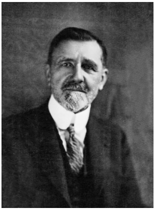
Teorema 1. *Gairebé tot número real és normal.*

El Teorema de Borel pot interpretar-se com un joc de màgia. Suposem que un mag dóna al seu públic un full en blanc on cada membre de l'audiència té dret a escriure un número, de tantes xifres com desitgi. El full on s'escriuen les xifres queda ocult als ulls del mag. El mag pendrà un número real a l'atzar i dirà al públic: *Aquest número que he pres a l'atzar amb els ulls tancats. . . , segur que conté el número que tots vosaltres heu format i que està escrit al full de paper ara ocult.* Efectivament, el mag estarà aplicant el Teorema de Borel i per tant a l'expressió decimal del número que ha triat a l'atzar ben segur que apareixerà el número que ha escrit el públic.

Així doncs, si es tria un número real a l'atzar, amb probabilitat del 100% s'obtindrà un número normal. Això podria portar a pensar que és fàcil identificar números normals. Ben al contrari. De fet, és molt difícil decidir si un número donat és o no és normal. És molt notable observar que no sabem si números centrals en la història de les matemàtiques com ara $\sqrt{2}$, e, π són o no són normals. Evidències empíriques indiquen que aquests números deuen ser normals però no en tenim una demostració. Encara més, no sabem ni tan sols si són normals en base 10. És a dir, no sabem si en l'expressió decimal de $\sqrt{2}$, o de e, o de π, algun bloc de xifres apareix més freqüentment que un altre bloc de la mateixa longitud. I la situació encara és pitjor. No sabem ni tan sols si aquests números són simplement normals en base 10, és dir, si en la seva expressió decimal, algun dígit apareix més frenqüentment que un altre. I encara més. Ni tant sols sabem si a l'expressió decimal de $\sqrt{2}$, o de e, o de π aparèixen infinits 5, o infinits 7, o infinits 2, o ... Tampoc sabem si hi ha alguna altra base b on algun d'aquests números sigui normal.

El Teorema de Borel es considera com un dels primers resultats de la Teoria moderna de la Probabilitat. Els dígits $\{x_n\}$ en base b d'un número real x són variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes que prenen valors al conjunt finit $\{0, \ 1, \ldots, \ b-1\}$. Així doncs, el Teorema de Borel es pot pot entendre com un cas particular de la Llei Forta dels Grans Números (veure per exemple [S]). Convé assenyalar que la demostració de Borel contenia un error que el mateix autor va reconèixer i que va ser corregit anys mes tard per Faber i Hausdorff. Posteriorment, Chebyshev, Markov, Kolmogorov i Khintchine van provar versions generals d'aquesta Llei.

Trobareu tot seguit una petita ressenya biogràfica de E. Borel i, si en voleu saber més, podeu llegir l'article [Co] on es pot trobar molta més informació.



E. Borel (1871-1956)

Émile Borel (1871-1956) va ser un matemàtic francès que va desenvolupar la seva carrera principalment a París. Juntament amb R. Baire i H. Lebesgue va crear la Teoria de la Mesura i va desenvolupar les aplicacions d'aquesta branca a la Probabilitat i a la Teoria de Funcions. Una de les nocions fonamentals d'aquesta teoria porta el seu nom, els conjunt de Borel, però també el podreu trobar en altres resultats com el Lemma de Borel-Cantelli, el Teorema de Heine-Borel i fins i tot, un hi ha un cràter a la Lluna que s'anomena el cràter de Borel. A més, va treballar en molts altres temes com ara la Teoria de Jocs, les Equacions Diferencials, la Geometria Hiperbòlica o la Física Matemàtica. Va publicar articles científics que han marcat el desenvolupament de les matemàtiques, va ser un editor de revistes científiques molt actiu, va escriure obres de divulgació científica i més de 35 llibres. Durant la seva llarga carrera acadèmica va rebre nombroses distincions i premis, va ocupar càrrecs científics molt influents i va contribuir a crear l'Institut d'Estadística de la Universitat de París (que és l'escola d'estadística més antiga de França) i l'Institut Henri Poincaré, que a més va dirigir durant un llarg període. A més de la seva tasca científica, Borel va ser un polític de primera línea, essent diputat a l'Assamblea Nacional Francesa durant dotze anys i Ministre del govern francès, sota la presidència d'un altra eminent matemàtic, P. Painlevé. Convé mencionar que únicament va deixar de treballar com a professor quan va ser Ministre, inclús durant els seus dotze anys com a parlamentari, el polític convivia amb el matemàtic de fama internacional, el professor d'Universitat i el director d'instituts de recerca.

4 Després del Teorema de Borel

Molt sovint, els Teoremes importants no resolen únicament preguntes rellevants sinó que donen lloc a moltes altres qüestions interessants. Per acabar aquest article volem presentar ràpidament alguns dels temes que sorgeixen de forma natural del Teorema de Borel.

Discrepància. Una d'aquestes qüestions és l'estudi del que es denomina la discrepància. Més concretament, si $x = x_0, x_1 x_2 \dots$ és un número real escrit en base b i i és un dígit entre 0 i $b-1$, considerem, com abans, el número de vegades $A(x, i, N)$ que el dígit i apareix a $x_0,\ x_1, \dots,\ x_N$. Considerem la discrepància D definida per

$$D(x, i, N) = A(x, i, N) - \frac{N}{b}$$

El problema consisteix a trobar estimacions de D que es compleixin per a gairebé tot punt x. El Teorema de Borel diu que per a gairebé tot x es té que per a tot dígit i, la discrepància $D(x, i, N)$ és molt menor que N, quan $N \to \infty$. És aquesta la millor estimació possible? Hausdorff i Hardy per una banda i Litllewood per una altra van obtenir resultats en aquesta direcció i, finalment, Khintchine ([K]) va donar la resposta óptima següent.

Teorema 2. *Sigui $b \geq 2$ un número natural. Aleshores, gairebé per a tot $x \in \mathbb{R}$ i tot dígit i entre 0 i $b-1$ es té*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{D(x,i,N)}{\sigma\sqrt{2\,N\ \log\log N}} = 1\,,$$
$$\liminf_{N\to\infty} \frac{D(x,i,N)}{\sigma\sqrt{2\,N\ \log\log N}} = -1\,,$$

on $\sigma^2 = b^{-1}\,(1-b^{-1})\,.$

Observem que σ^2 és la variància de les variables aleatòries donades pels dígits x_n. Aquest resultat va ser la primera versió del que avui coneixem com la Llei del Logaritme Iterat (veure [I, S]).

Equidistribució. Les successions equidistribuïdes proporcionen un punt de vista alternatiu. Una successió de números $\{a_n\}$ es diu equidistribuïda a $[0,1]$ si per a tot interval $I \subset [0,1]$, la quantitat

$$A(I,N) = \text{número de } a_n \in I \text{ amb } n \leq N$$

compleix

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(I,N)}{N} = |I|\,.$$

L'observació clau és que un número x és normal en base 10 si, i només si, les parts decimals dels números $\{10^n x : n = 1,\ 2, \ldots\}$, formen una successió equidistribuïda a l'interval $[0,1]$. De forma similar, un número real x és normal si, i només si, per a qualsevol número enter $b \geq 2$, la successió de les parts decimals dels números $\{b^n x : n = 1,\ 2, \ldots\}$ formen una successió equidistribuïda a l'interval $[0,1]$. Les successions equidistribuïdes van ser descrites pel famós Teorema d'Equidistribució de H. Weyl que diu el següent:

Teorema 3. *Una successió de números $\{a_n\}$ és equidistribuïda a $[0,1]$ si, i només si, per a qualsevol enter k no nul es compleix*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2\,\pi\,i\,k\,a_n}}{N} = 0\,.$$

Així doncs, deduïm que un número real x és normal en base b si, i només si, per a qualsevol enter k no nul es compleix que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2\,\pi\,i\,k\,b^n\,x}}{N} = 0\,.$$

En aquest context ens podem posar de forma immediata moltes altres preguntes interessants. Per exemple: Què succeeix si b no és un número enter? Què succeeix si canviem $\{b^n\}$ per una altra successió?

Computabilitat. Ja hem mencionat que és molt difícil decidir si un número concret és o no és normal. Així el problema de donar exemples explícits de números normals va sorgir poc desprès que Borel presentès el seu resultat. L'any 1917, W. Sierpínski va presentar una construcció geométrica que permetia obtenir números normals. Als anys quaranta el gran científic britànic A. Turing va interessar-se pel problema de la computabilitat dels números normals. Un número real és computable si la seva expressió en una certa base pot ser generada per un algoritme que proporciona els dígits del número de forma consecutiva. Com que el conjunt de números computables és numerable, podria passar que qualsevol número normal fos no computable. No obstant, aquest no és el cas i, de fet, A. Turing va obtenir un algoritme que produeix números normals. Malauradament aquest treball va tenir poca influència perquè únicament va aparèixer publicat l'any 1997 a l'Obra Completa d'A. Turing, més de quaranta anys després de la seva mort. Convé assenyalar que al seu article, Turing alerta al lector que seria convenient tenir un exemple explícit d'expressió d'un número normal en una certa base. De fet, amb el seu algoritme, el dígit n-èssim del número s'obté després d'un número (doblement) exponencial d'operacions entre els anteriors $n-1$ dígits (veure [Be]).

Bases diferents. Sigui $\mathcal{N}_b$ el conjunt de números normals en base b. L'any 1960, W. Schmidt va provar que donats dos números naturals b i c més grans que 1, es té $\mathcal{N}_b = \mathcal{N}_c$ si, i només si, $\log b / \log c$ és racional. A més, un número real x és normal en base b si, i només si, x és simplement normal en qualsevol base de la forma b^n, $n = 1,\ 2, \ldots$. Sigui $\mathcal{M}_b$ el conjunt de números reals que no són normals en base b però que són normals en qualsevol altra base c tal que $\log c / \log b$ no és racional. Pel Teorema de Borel, el conjunt $\mathcal{M}_b$ té longitud zero. Tot i així, el conjunt és prou gran en un altre sentit. En efecte, l'any 1981, Pollington va demostrar que donat un enter $b \geq 2$, qualsevol número real és la suma de dos números de $\mathcal{M}_b$.

Números No Normals. Donat que els números normals semblen tan complicats, es podria pensar que l'estructura dels números no normals és més senzilla. Aquest no és el cas. Per il·lustrar-ho mencionem el resultat clàssic d'Eggleston següent. Donat un número enter $b \geq 2$ considerem una distribució de probabilitats en els dígits disponibles en base b. És dir, siguin $p_0, \ldots, p_{b-1} \in [0,1]$ tals que $p_0 + \ldots + p_{b-1} = 1$. Volem considerar números reals tals que, a la seva expressió en base b, cada dígit k entre 0 i $b-1$ apareix amb freqüència aproximada p_k. Més concretament, considerem el conjunt

$$
\begin{aligned}
&E(p_0, \ldots, p_{b-1}) = \\
&\qquad \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{N \to \infty} \frac{A(x, N, k)}{N} = p_k \right. \\
&\qquad\qquad \left. \text{per a tot } k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, b-1 \right\}.
\end{aligned}
$$

Quan $p_0 = \ldots = p_{b-1} = 1/b$, el Teorema de Borel diu que gairebé tot número real és del conjunt

$E(1/b, \ldots, 1/b)$. Per tant, si alguna de les probabilitats p_k no és $1/b$, el corresponent conjunt $E(p_1, \ldots, p_b)$ té longitud 0. El resultat de Eggleston que reproduïm a continuació dóna la mida d'aquest conjunt.

Teorema 4. *La dimensió de Hausdorff del conjunt* $E(p_0, \ldots, p_{b-1})$ *és l'entropia*

$$\sum_{k=0}^{b-1} p_k \log p_k^{-1}$$

Un número real x es diu *abnormal* si no és normal en cap base $b \geq 2$. Per exemple, qualsevol número racional és abnormal. No obstant, el conjunt de números abnormals és molt més gran i de fet, és un conjunt no numerable.

Fraccions contínues i números normals. Qualsevol número real x també es pot expressar per la seva fracció contínua en comptes de la decimal. Més concretament, cada $x \in \mathbb{R}$ és de la forma

$$x = [x] + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

on $[x]$ és la part entera de x i $a_1, a_2, \dots$ són números enters positius. Els números enters $a_1, a_2, \dots$ formen la fracció contínua de x que es denota per $[a_1, a_2, a_3, \dots]$. Per exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &= 1 + [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \dots] \\ \mathrm{e} &= 2 + [1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 8,\ 1,\ 1,\ 10, \dots] \\ \pi &= 3 + [7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2, \dots] \end{aligned}$$

En aquesta representació, resulta que els números racionals són exactament els números reals que tenen una expressió en fracció contínua finita. De fet, les fraccions contínues truncades d'un número real proporcionen les millors aproximacions per racionals, en un cert sentit, del número. Al mateix treball de l'any 1909 [Bo], E. Borel també va estudiar el comportament de les fraccions contínues de gairebé tot número. El resultat de Borel expressa que, per a gairebé tot número real x, el creixement de la successió $\{a_n\}$, donada pels coeficients de la seva fracció contínua $x = [x] + [a_1, a_2, \ldots]$, està governat per la convergència d'una sèrie. En concret:

Teorema 5. *Sigui φ_n una successió decreixent de números positius. Si la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$$

divergeix, llavors, per a gairebé tot número real x, es té $\limsup_{n\to\infty} a_n(x)\,\varphi_n = +\infty$. Recíprocament, si la sèrie anterior convergeix, per a gairebé tot número x es té $\lim_{n\to\infty} a_n(x)\,\varphi_n = 0$.

La Llei de Benford. Molt sovint, els dígits que apareixen a sèries de dades del món real, com ara adreces de carrers, llistats de preus, números d'habitants. . . , no es distribueixen de forma uniforme. L'any 1938, F. Bendford va observar que, en diferents séries de dades, el dígit 1 apareixia el 30% de cops, el dígit 2 el 17% de vegades i el dígit 9 únicament apareixia el 5% de vegades. Una discussió elemental d'aquest fenomen es pot trobar a [JR, R].

Els articles [H] i [Q] presenten alguns d'aquests temes amb més detall i altres conseqüències del Teorema de Borel.

Agraïments: Diverses converses amb Andreu Nicolau m'han ajudat a decidir el contingut d'aquest article i posteriorment s'ha fet càrrec del mecanografiat del text. És un plaer agrair-li el seu interès i la seva col·laboració.

La recerca de l'autor està parcialment finançada pels ajuts MTM2011-24606, MTM2014-51824-P i 2014SGR 75.

Referències

[Be] Becher, V. Turing's normal numbers: towards randomness *in How the world computes* Lecture Notes in Comput. Sci., 7318, Springer, Heidelberg, 2012, 35–46.

[Bo] Borel, E. Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Math. Palermo* **27** (1909), 247–271.

[Co] Collingwood, E.F. Émile Borel, *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 488–512.

[I] Itô, K. *Introduction to probability theory*. Cambridge University Press (1984).

[JR] Janvresse, E., de la Rue, T. (traducció a càrrec de F. Utzet) Benford's law, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **24** (2009), 5–12.

[K] Khintchine, A. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Fund Math.* **6** (1924), 9–20.

[H] Harman, G. One hundred years of normal numbers *in Number theory for the millennium, II* (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA, 2002. 149–166.

[Q] Queffélec, M. Old and new results on normality *in Dynamics and stochastics,* 48, IMS Lecture Notes Monogr. Ser Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2006. 225–236.

[R] Ross, K.A. Benford's law, a growth industry, *Amer. Math. Monthly* **118** (2011), 571–583.

[S] Sanz, M. *Probabilitats*, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona (1999).

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
artur@mat.uab.cat

Publicat el 19 de juliol de 2016