Introducció a l'anàlisi complexa

Llistes de problemes, v25.16

Carme Cascante*, Núria Fagella, Eduardo Gallego†,
Jordi Pau, Martí Prats

17 de juliol de 2025

*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:
Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia
†EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

1 El cos dels nombres complexos

1.1 El cos dels nombres complexos

Exercici 1.1.1. *Doneu en forma $a + bi$:*

a) $(-1+i)^2$,
b) $\frac{8i-1}{i}$,
c) $\frac{-1+5i}{2+3i}$,
d) $\dfrac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$,
e) $\left(\dfrac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$,
f) $((3-i)^2-3)i$.

Exercici 1.1.2. *Demostreu o doneu un contraexemple:*

a) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Re}\,w$, *b)* $\mathrm{Re}\,(zw) = (\mathrm{Re}\,z)(\mathrm{Re}\,w)$, *c)* $\mathrm{Re}\,(\frac{z}{w}) = \frac{\mathrm{Re}\,z}{\mathrm{Re}\,w}$. ◁

Exercici 1.1.3. *Sigui $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}\,(z) > 0$. Proveu que $\mathrm{Im}\,(1/z) < 0$.* ◁

Exercici 1.1.4. *Si $z = x + iy$ on $x, y \in \mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:*

a) z^2,
b) $z(z+1)$,
c) $\frac{1}{z-3}$,
d) $\frac{1}{z^2}$,
e) $\frac{z+1}{2z-5}$,
f) z^3. ◁

Exercici 1.1.5. *Sigui $(x+iy)/(x-iy) = a + ib$. Proveu que $a^2 + b^2 = 1$.* ◁

Exercici 1.1.6. *Proveu que $-1+i$ satisfà $z^2 + 2z + 2 = 0$.* ◁

Exercici 1.1.7. *Escriviu l'equació complexa $z^3 + 5z^2 = z + 3i$ com dues equacions reals.* ◁

Exercici 1.1.8. *a) Si z_1, z_2 són complexos amb $z_1 + z_2$ i $z_1 z_2$ reals negatius proveu que z_1, z_2 són reals.*

b) Proveu que el vector z_1 és paral·lel al vector z_2 si i només si $\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = 0$. ◁

Exercici 1.1.9. *Proveu analíticament i gràfica que $|z-1| = |\bar{z}-1|$.* ◁

Exercici 1.1.10. *Demostreu que $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ si $|a| = 1$ o bé $|b| = 1$. Quina excepció cal fer si $|a| = |b| = 1$?*

Demostreu també que $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ si $|a| < 1$ i $|b| < 1$.

Per acabar, si per $a \in \mathbb{D}$ definim $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, demostreu que $\varphi_a : \bar{\mathbb{D}} \to \bar{\mathbb{D}}$, i és bijectiva en $\mathbb{D}$ i en $\partial\mathbb{D}$, i doneu-ne la inversa. ◁

1.2 Els nombres complexos com a espai vectorial

Exercici 1.2.1. *Descriviu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

a) $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$, *c)* $|z| = \operatorname{Re} z + 1$, *e)* $|z-2| > |z-3|$,

b) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$, *d)* $|z-1| = |z+i|$, *f)* $|z-1| + |z+1| = 7$. ◁

Exercici 1.2.2. *Suposem que* $a_n \to a$ *i* $b_n \to b$. *Demostreu que* $a_n + b_n \to a + b$ *i* $a_n b_n \to ab$, *sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* ◁

Exercici 1.2.3. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $i^n + \dfrac{1}{n+i}$, *b)* $\dfrac{n+i}{n-i}$, *c)* $\dfrac{3\,i\,n^2}{n^2-2i}$. ◁

Exercici 1.2.4. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. ◁

Exercici 1.2.5. *Demostreu el teorema de Mertens.* ◁

Exercici 1.2.6. *Tota successió convergent* $\{z_n\}_{n \geqslant 0} \subset \mathbb{C}$ *satisfà que* $|z_{n+1} - z_n| \to 0$. ◁

1.3 Repàs de trigonometria

Exercici 1.3.1. *Demostreu tots els resultats de la secció.* ◁

Exercici 1.3.2. *Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de* $x \in \mathbb{R}$ *com*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostra que se satisfan les següents identitats:

a) $\sinh(0) = 0$ *i* $\cosh(0) = 1$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$ *i* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$.

c) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ *i* $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

g) $(\sinh x)' = \cosh x$ *i* $(\cosh(x))' = \sinh(x)$. ◁

1.4 L'exponencial complexa

Exercici 1.4.1. *Fent servir la fórmula de de Moivre trobeu expressions de* $\sin 3\theta$ *i* $\sin 4\theta$ *en termes de* $\sin\theta$ *i* $\cos\theta$. ◁

Exercici 1.4.2. *Trobar les arrels de* $z^4 + 1 = 0$ *i fer-les servir per veure que* $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$. ◁

1.5 Representació polar d'un nombre complex

Exercici 1.5.1. *Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.*

a) $3(1 + \sqrt{3}\, i)$, *b)* $2\sqrt{3} - 2i$, *c)* $-2 + 2i$, *d)* $-1 - i$. ◁

Exercici 1.5.2. *Expresseu en forma cartesiana* $(a + ib)$ *els següents nombres:*

a) $(2 + 3i)(4 + i)$, *c)* $\frac{1}{4+i}$, *e)* $(1 - 2i)^3$, *g)* $(1 + i)^{100} + (1 - i)^{100}$,

b) $(4 + 2i)^2$, *d)* $\frac{i}{2+i}$, *f)* $\frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}$, *h)* $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$. ◁

Exercici 1.5.3. *Fent servir el producte de* $(1 + i)(5 - i)^4$ *deduir la fórmula de Machin*[1]*:* $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$. ◁

Exercici 1.5.4. *Estudiar la convergència de* $\{z_0^n\}$ *si* $|z_0| < 1$ *o si* $|z_0| > 1$. ◁

Exercici 1.5.5. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $z_n = \dfrac{i}{n}$, *c)* $z_n = \operatorname{Arg}(-1 + i/n)$, *e)* $z_n = \left(\dfrac{1-i}{4}\right)^n$,

b) $z_n = i(-1)^n$, *d)* $z_n = \dfrac{n(2+i)}{n+1}$, *f)* $z_n = \exp\left(\dfrac{2n\pi i}{5}\right)$.

Aquí hem escrit $\exp(z) = e^z$.

1.6 Equacions amb exponencials

Exercici 1.6.1.

Resoleu les següents equacions:

[1] John Machin (1706), podeu trobar més informació a `https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula`.

a) $e^z = 1 + i$, *b)* $e^{z^2} = i$, *c)* $e^{iz} = -1$. ◁

1.7 Arrels n-èsimes

Exercici 1.7.1. *Calculeu:*

a) $\sqrt[3]{-1}$, *b)* $3^{1/4}$, *c)* $\sqrt[4]{-i}$, *d)* $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$, *e)* $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$. ◁

Exercici 1.7.2. *Donat* $a \in \mathbb{C}$, *quin és el màxim de* $|z^n + a|$ *per a* $|z| \leqslant 1$*?* ◁

1.8 Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

Exercici 1.8.1. *Resoleu* $(z+1)^5 = z^5$. ◁

Exercici 1.8.2. *Sigui* $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. *Considerant el polinomi* $(1-z)P(z)$, *demostreu que tots els zeros de* $P(z)$ *estan dins del disc unitat.* ◁

2 Funcions de variable complexa

2.1 Funcions

Exercici 2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma* $u(x, y) + iv(x, y)$.

a) $f(z) = 1/z$, *b)* $g(z) = \dfrac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$, *c)* $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◃

Exercici 2.1.2. *Trobeu el rang de*

a) $f(z) = z^2$ *si* z *està en el primer quadrant,*

b) $g(z) = 1/z$ *per* $0 < |z| \leqslant 1$,

c) $h(z) = -2z^3$ *per* z *tal que* $0 < |z| < 1$ *i* $\mathrm{Arg} z < \pi/2$. ◃

Exercici 2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\dfrac{1}{z - 2 + 3i}$, *c)* $\dfrac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$,

b) $\dfrac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, *d)* $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$. ◃

Exercici 2.1.4. *Proveu que la inversió* $w = f(z) = 1/z$ *transforma*

a) *el cercle* $|z| = r$ *en el cercle* $|w| = 1/r$,

b) *el raig* $\mathrm{Arg} z = \theta_0, -\pi < \theta_0 < \pi$, *en el raig* $\mathrm{Arg} w = -\theta_0$,

c) *el cercle* $|z - 1| = 1$ *a la línia vertical* $x = 1/2$. ◃

Exercici 2.1.5. *Trobeu una funció afí que transformi el cercle* $|z| < 1$ *en el cercle* $|w - w_0| < R$ *de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle* α *amb l'eix real.* ◃

Exercici 2.1.6. *Per l'exponencial* $f(z) = e^z$*:*

a) *Descriviu-ne el domini i el rang.*

b) *Proveu que* $f(-z) = 1/f(z)$.

c) Descriviu la imatge de $\operatorname{Re} z = 1$.

d) Descriviu la imatge de $\operatorname{Im} z = \pi/4$.

e) Descriviu la imatge de la banda $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \pi/4$. ◃

Exercici 2.1.7. *L'aplicació de Joukowski és* $w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, *vegeu la figura 3.6. Proveu que*

a) $J(z) = J(1/z)$,

b) J *porta el cercle unitat* $|z| = 1$ *a l'interval real* $[-1, 1]$,

c) J *porta el cercle* $|z| = r$ $(r > 0, \neq 1)$ *a l'el·lipse* $\dfrac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$ *que té els focus a* ± 1. ◃

Exercici 2.1.8. *Fent servir la comanda* `contour_plot` *de* `Sage` *dibuixeu les corbes de nivell de* u *i* v *si* $f = u + iv$ *és*

a) z,

b) z^2,

c) $\log(z)$,

d) $\sin(z)$,

e) $1/z$,

f) $1/z^2$,

g) e^z,

h) $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}$,

i) $\log(z-1) + \log(z+1)$. ◃

2.2 Funcions multivaluades

Exercici 2.2.1. *Donada l'equació de Cardano* $z^3 + pz + q = 0$, *comprova que si* $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$, *aleshores* $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ *és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.*

Tot seguit obre GeoGebra[1] *i dibuixa els punts* $p = 1+i$ *i* $q = 2+0i$*; defineix* $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C *mitjançant la fórmula anterior, i* $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ *i* $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$. *Escull tres colors diferents per* z_j, *i activa la seva traça. Deixant* q *fixat i movent* p, *per exemple, comprova que els tres punts són funció de* p, *i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que* C *presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres* z_j *vagin permutant la seva posició. Per exemple, pots fixar* p *en la circumferència de radi* 4 *amb la instrucció* `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))`*i observar què ocorre, i comparar amb el radi* 2 *o* 3. *Pots usar també la instrucció* `lloc geomètric`. *Quantes voltes cal que faci* p *a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua?* ◃

[1] o entra a `https://www.geogebra.org/m/jbszj89u`

2.3 Logaritmes i arguments

Exercici 2.3.1. *Doneu exemples que mostrin la falsedat de la igualtat* $\operatorname{Log}(a \cdot b) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$. *(Per exemple,* $a = b = -1 - i$*).* ◁

Exercici 2.3.2. *Sigui* $\mathcal{L}$ *una determinació del logaritme en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. *Proveu que la funció* $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ *és contínua en*

$$D := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$*?* ◁

Exercici 2.3.3. *Una branca de l'argument* $\mathcal{A}(z)$ *(o del logaritme* $\mathcal{L}(z)$*) queda fixada si donem i) el domini* Ω *on està definida ii) el valor de* $\mathcal{A}(z)$ *(o de* $\mathcal{L}(z)$*) d'un punt d'*Ω. *Conside reu els dominis:*

$$\Omega_1 = \mathbb{C}\backslash\left\{re^{i\pi},\ r \geqslant 0\right\}; \qquad \Omega_2 = \mathbb{C}\backslash\left\{re^{i\pi/4},\ r \geqslant 0\right\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C}\backslash\left(\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy,\ y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i,\ x \in [-1, \infty)\}\right).$$

Completeu la següent taula.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$ $\mathcal{L}(2i) =$

◁

Exercici 2.3.4. *Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:*

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\ z > 0\}$, *b)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\ z > \operatorname{Im}\ z\}$, *c)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. ◁

Exercici 2.3.5. *Calculeu els possibles valors de*

a) $\log(1)$, *b)* $\log(-1)$, *c)* $\log(1+i)$, *d)* $\log(1 - i\sqrt{3})$, *e)* $\log(i)$. ◁

Exercici 2.3.6. *Escrivim* $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ *i* $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. *Resoleu les equacions* *a)* $e^z = 2i$, *c)* $e^{2z} + e^z + 1 = 0$, *e)* $\cos z = \sin z$.

b) $\mathrm{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$, *d)* $\cos z = 2i$,

2.4 Potències complexes

Exercici 2.4.1. *Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli:* $(-z)^2 = z^2$, *llavors* $2\log(-z) = 2\log z$. *Per tant,* $\log(-z) = \log(z)$. ◃

Exercici 2.4.2. *Calculeu els possibles valors de*

a) i^i, *b)* $(\sqrt{3} + i)^{1-i}$, *c)* 2^{-i}, *d)* $(i^2)^i$, *e)* $(i^i)^2$. ◃

Exercici 2.4.3. *Determinar explícitament la inversa de* $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ *en funció de logaritmes. Resoldre* $q(z) = 3$, *trobant totes les solucions.*

Exercici 2.4.4. *Siguin* $h_0(z), h_1(z)$ *i* $h_2(z)$ *les determinacions de l'arrel cúbica en* $\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ *i* $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.

i) *Descriviu* $h_j(\Omega)$ *per* $j = 0, 1, 2$.

ii) *Per* $j = 0, 1, 2$ *relacioneu* h_j *amb* Log *i* Arg *(on* Log *i* Arg *denoten les branques principals del logaritme i de l'argument respectivament).*

iii) *Usant les relacions anterior, trobeu el valor de* $h_j(i)$, *per* $j = 0, 1, 2$. ◃

2.5 Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

Exercici 2.5.1. *Sigui* X *un espai topològic connex. Demostreu que si* $\mathcal{S}_1$ *i* $\mathcal{S}_2$ *són dues determinacions de l'arrel n-èsima de* $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *llavors existeix una arrel n-èsima de la unitat* ζ *tal que* $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, *per a tot* $x \in X$. ◃

Exercici 2.5.2. *Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions* e^{z^2}, $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, *de la branca principal de* $\sqrt{1-z}$ *i de la branca principal de* $\sqrt{1+e^z}$. ◃

Exercici 2.5.3. *Donar una determinació de* $f(z)$ *que sigui contínua a la regió* D *donada.*

a) $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C}\backslash\{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. ◃

2.6 Sèries de potències de nombres complexos

Exercici 2.6.1. *Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.*

a) *$S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament*

b) *$S(z)$ pot ser convergent en $z = 1 + i$ i en $z = 2 + i$ simultàniament*

c) *Si $S(z)$ és convergent en $z = 1 + i$, aleshores també ho és en $z = 2i$*

d) *Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2 + i$.* ◁

Exercici 2.6.2. *Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D(0, R)$. Demostreu que*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \qquad si \quad 0 < r < R.$$ ◁

Exercici 2.6.3. *Sigui $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2. En cas afirmatiu, tenim que $S_1(z) = zS_2(z)$.*

2.7 Càlcul del radi de convergència

Exercici 2.7.1. *Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n;\ \alpha \in \mathbb{R}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}(z-1)^n$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}(z+1)^n \ a \in (0,1)$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}}$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}(z-2)^{n(n+1)}$,

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n}$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3z-2)^n$,

j) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^{2^n}$. ◁

2.8 Comportament a la frontera del disc de convergència

Exercici 2.8.1. *Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. ◁

Exercici 2.8.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel.* Indicació*: Vegeu [BC13, Teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).* ◁

3 Derivació complexa i holomorfia

3.1 Funcions holomorfes

Exercici 3.1.1. *a) Demostreu la regla del producte per la derivació.*

b) Proveu que si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0, llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on $\lambda(z) \to 0$ si $z \to z_0$. ◁

Exercici 3.1.2. *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:*

a) $f(z)^3$,

b) $f(z)g(z)$,

c) $f(z)/g(z)$,

d) $5f(z) + ig(z)$,

e) $f(1/z)$,

f) $f(g(z))$.

Exercici 3.1.3. *Proveu que $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$ és entera. Escriviu g com a funció de z.*[1] ◁

Exercici 3.1.4. *Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que per a tot $n = 2, 3, \ldots$*

a) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$*?*

b) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$*?*

c) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{\ln(n+1)}$*?*

d) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{n}{n+1}$*?* ◁

Exercici 3.1.5. *Doneu una branca de $\log(z^2 + 2z + 3)$ que sigui holomorfa a $z = -1$. Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit?* ◁

[1] Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa en un domini Ω que talla la recta real i u, v són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, vegeu l'exercici 4.10.10.

Exercici 3.1.6. *Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfà $|f(z)-i| < 1$ per a tot $z \in \Omega$. Demostreu que la funció g definida per*

$$g(z) = \frac{1-i+f(z)}{1+i-f(z)}$$

té logaritme holomorf en Ω. ◁

Exercici 3.1.7. *Sigui $f(z) = z^3 + 1$ i $z_1 = (-1+\sqrt{3}i)/2, z_2 = (-1-\sqrt{3}i)/2$. Provar que no existeix cap punt w en el segment que uneix z_1 i z_2 de manera que $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$. Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes?* ◁

3.2 Les equacions de Cauchy-Riemann

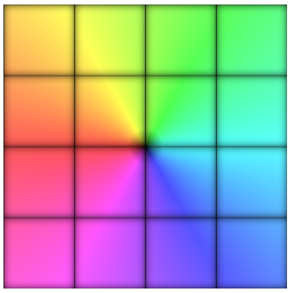
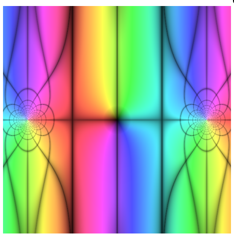
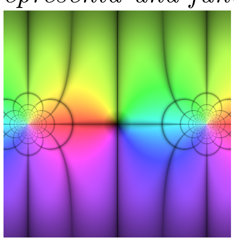
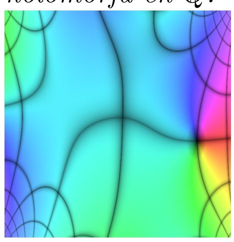
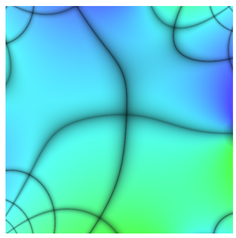


Figura 3.1: Graella en el pla complex entre $-2-2i$ i $2+2i$.

Exercici 3.2.1. *Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat $Q = \{x+iy : x, y \in (-2,2)\}$ és la primera imatge de la figura 3.1. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en Q, representa una funció holomorfa en Q. Quina és?*

a)  *b)*  *c)*  *d)*  ◁

Exercici 3.2.2. *Trobar els valors de les constants a, b, c de manera que $f(z)$ sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z.*

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$. ◁

Exercici 3.2.3. *Sigui $f = u + iv$ holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques (una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i el seu* laplacià $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$.*)* ◁

Exercici 3.2.4. *Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$*

a) Provar que u és harmònica.

b) Trobar una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobar una expressió compacta de $f(z)$. ◁

Exercici 3.2.5. *Trobar els polinomis harmònics de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Trobar la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent.* ◁

Exercici 3.2.6. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (és a dir, un obert connex) i f una funció holomorfa en Ω.*

1. *Proveu que si f només pren valors imaginaris purs, aleshores f és constant.*

2. *Proveu que si $|f|$ és constant, aleshores f també és constant. Equivalentment si f només pren valors en una circumferència, llavors f és constant.* ◁

Exercici 3.2.7. *Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x + iy) = u(x) + iv(x, y)$.* ◁

Exercici 3.2.8. *(a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals*

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda x y^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ.

(b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ? ◁

Exercici 3.2.9. *Decidiu on no són holomorfes les funcions següents* *a)* $\dfrac{1}{z-2+3i}$, *b)* $\dfrac{iz^3+2z}{z^2+1}$, *c)* $\dfrac{3z-1}{z^2+z+4}$, *d)* $\dfrac{z^2}{(2z^2-3z+1)^2}$. ◁

Exercici 3.2.10. *Provar que* $|z|^2$ *és* $\mathbb{C}$*-derivable en* $z=0$ *però enlloc més.* ◁

Exercici 3.2.11. *Sigui*

$$f(z)=\begin{cases}\exp(-1/z^4) & si\ z\neq 0\\ 0 & si\ z=0.\end{cases}.$$

Demostreu que

a) $f(z)$ *satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt* $z\in\mathbb{C}$.

b) f *no és contínua al* 0 *i per tant* f *no és holomorfa a un entorn del* 0. ◁

Exercici 3.2.12. *Si* u *i* v *s'expressen respecte a les coordenades polars* (r,θ)*, proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma*

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Indicació*: estudieu el límit incremental seguint* $\arg z=\theta_0$ *i* $|z|=r_0$. ◁

Exercici 3.2.13. *Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:*

a) $w=z^2$;

b) $w=z^2+2z$;

c) $w=\dfrac{1}{z}$;

d) $w=e^z$;

e) $w=\log(z-1)$. ◁

3.3 Càlcul de les derivades

Exercici 3.3.1. *Sigui* $\Omega\subset\mathbb{C}$ *un obert i* f *una funció holomorfa en* Ω. *Definim* $\Omega^*=\{z\in\mathbb{C}:\overline{z}\in\Omega\}$ *i* $f^*:\Omega^*\to\mathbb{C}$ *donada per* $f^*(z)=\overline{f(\overline{z})}$. *Proveu que* f^* *és holomorfa en* Ω^*. ◁

Exercici 3.3.2. *Trobeu els punts on la funció* f *té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que* $f'=f_x$*.)*

a) $f(z)=|z|^4$

b) $f(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$

c) $f(z)=z+\frac{1}{z}$

d) $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

e) $f(z)=|z|$

f) $f(x+iy)=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$

g) $\cos|z|^2$

h) $f(z)=z+z\overline{z}$ ◁

Exercici 3.3.3. *Donat un polinomi de dues variables reals $P(x,y)$, demostreu que identificant $z = x + iy$ són equivalents:*

1. *P es pot expressar com un polinomi en z.*
2. *P és una funció entera.*
3. *$\bar{\partial} P = 0$ en $\mathbb{C}$.* ◁

3.4 Funcions analítiques

Exercici 3.4.1. *Discutir l'analiticitat de*

a) $8\bar{z} + i$,

b) $\dfrac{z}{\bar{z}+2}$,

c) $\dfrac{z^3+2z+i}{z-1}$ *(vegeu la figura 3.6),*

d) $x^2 - y^2 + 2xyi$,

e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,

f) $\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$,

g) $|z|^2 + 2z$,

h) $\dfrac{|z|^2+z}{2}$. ◁

Exercici 3.4.2. *Trobeu la suma de les sèries*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+i)^n}{n!}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ *si* $|z|<1$. ◁

Exercici 3.4.3. *Sigui $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ per $|z| < R$ on R és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si $f(z_k) = 0$ per una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \to 0$ quan $k \to \infty$, aleshores $f(z) \equiv 0$ (i.e. $c_n = 0$ per a tot $n \geqslant 0$).* Indicació*: Calculeu $f(0)$ i considereu la sèrie $f(z)/z$).* ◁

Exercici 3.4.4. *Demostreu que si dues sèries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ i $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \to 0$ quan $k \to \infty$ aleshores $a_n = b_n$ per a tot $n \geqslant 0$.* ◁

Exercici 3.4.5. *Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.8.1.*

Exercici 3.4.6. *Considereu la sèrie*

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot z del disc de convergència.

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}. \qquad \triangleleft$$

Exercici 3.4.7. *Considereu la sèrie de potències*

$$\sum_{n\geqslant 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$ *?* $\triangleleft$

Exercici 3.4.8. *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n(2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació*: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.*

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$. $\triangleleft$

3.5 Algunes funcions holomorfes importants

Exercici 3.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ *i* $\cos z$ *són funcions enteres amb*

$$(\sin z)' = \cos z; \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$*, i també* $\sin(-z) = -\sin z$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z sinw$. $\triangleleft$

Exercici 3.5.2.

Resoleu les següents equacions:

a) $\sin z = 4$ *b)* $\cos z = i$. ◁

Exercici 3.5.3. *a) Proveu que* $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$ *i que* $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$*, per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

b) Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.

c) Deduïu de (b) que, per a z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$*, es verifica:*

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ *si, i només si,* $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ *si, i només si,* $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ *o bé* $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *se satisfà:*

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ *(vegeu l'exercici 1.3.2).*

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) Sobre quines rectes està acotada la funció sinus? I la funció cosinus? ◁

Exercici 3.5.4. *(a) Proveu que per a cada* $w \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$*, l'equació* $\tan z = w$ *té infinites solucions, que són la funció multivaluada*

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ *l'equació no té cap solució.*

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ *en un conjunt connex* $E \subset \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ *difereixen de* $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ *als anells* $\{r < |w - i| < R\}$, $\{r < |w + i| < R\}$, $0 < r < R < 2$*, però que sí que n'hi ha si* $2 < r < R < +\infty$.

Exercici 3.5.5. *Demostra que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\mathrm{Arctan} w := \frac{1}{2i} \mathrm{Log} \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

és $\mathbb{C}\backslash\{iy : |y| \geqslant 1\}$. ◁

Exercici 3.5.6. *a) Sigui* $\mathcal{L}$ *la determinació del logaritme en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *que compleix que* $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$*. Definim* $f(z) := -\mathcal{L}(2-2z)$*. Demostreu que* f *és holomorfa en* $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty)$*. Calculeu* $f(0)$ *i* $f(-i)$.

b) Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2z-1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\mathrm{Log}\,(2-2z)$, *per tot* $z \in D := \mathbb{D}(1/2, 1/2)$, *on* Log *és la determinació principal del logaritme.*

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ *i* $f(z)$*?* Indicació*: Relacioneu primer* $\mathcal{L}(z)$ *amb* $\mathrm{Log}\,(z)$ *per* $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. ◁

Exercici 3.5.7. *Sigui* $\sqrt{\cdot}$ *la determinació de l'arrel quadrada en* $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ *complint que* $\sqrt{-1} = i$ *i sigui* $f(z) = \sqrt{3z+2}$.

1. *Expresseu* $\sqrt{\cdot}$ *en termes d'una determinació del logaritme i argument.*

   Recordem que
   $$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg z)}.$$

2. *Quina és la regió més gran of* f *és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix* z *tal que* $f(z) = -i$*?*

3. *Què val* $f(\frac{i-2}{3})$*?* ◁

Exercici 3.5.8. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt* $a = 1$ *de la funció* $f(z) = \sqrt[3]{z}$ *on* $\sqrt[3]{\cdot}$ *denota la determinació de l'arrel cúbica definida a* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. ◁

Exercici 3.5.9. *Els* polinomis de Legendre $P_j(\zeta)$ *són els coeficients de* z^j *en el desenvolupament de Taylor*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z + z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ *és un polinomi de grau* j *i calcular* P_0, P_1, P_2 *i* P_3.

◁

4 Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.1 Corbes

Exercici 4.1.1. *Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t), t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i $z(t)$ és injectiva. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular).* ◁

Exercici 4.1.2. *Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtex $-1-i, 1-i, 1+i, -1+i$ seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud?* ◁

4.2 Integració sobre corbes

Exercici 4.2.1. *Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{dz}{|z^m|}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{|z^m|}.$$ ◁

Exercici 4.2.2. *Sigui $\gamma = \partial D(0,r)$. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_\gamma z^n\, dz$.* ◁

Exercici 4.2.3. *Sigui $\gamma = [i+1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:*

a) $\int_\gamma \sin(2z)\, dz$ *b)* $\int_{|z|=1} ze^{z^2}\, dz$ *c)* $\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z}\, dz$ ◁

Exercici 4.2.4. *Avaluar les següents integrals.*

a) $\displaystyle\int_C \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2\right) dz$ *si C és $|z-i| = 4$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.*

b) $\displaystyle\int_\gamma (x - 2xyi) dz$ *al llarg del contorn $\gamma : z = t + it^2$ amb $t \in [0,1]$.*

c) $\displaystyle\int_\gamma (|z-1+i|^2 - z) dz$ *al llarg de la semicircumferència $\gamma : z = 1 - i + e^{it}$ on $t \in [0,\pi]$.*

d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ (per què?) al llarg de $|z| = 1$ recorreguda un cop en sentit antihorari. ◁

Exercici 4.2.5. *Calcular les següents integrals al llarg del camí γ que s'indica.*

a) $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ *per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de $-3i$ a $3i$. Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre?* Indicació*: considerar la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si $y = 0, x \leqslant 0$.*

b) $\int_\gamma e^z \cos z dz$ *per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$.*

c) $\int_\gamma z^{1/2} dz$ *per la branca principal de $z^{1/2}$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$ que no talli la semirecta $(-\infty, 0]$.* ◁

Exercici 4.2.6.

Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ que és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ i positiva a $(1,\infty)$.

(a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2-1}$ omet l'eix real negatiu si $z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 1]$, de manera que la determinació principal $\operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ *està definida a Ω.*

(b) Vegeu que $\operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ *és una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ a Ω.*

(c) Avalueu $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$, on γ és el tros de cercle $|z-1| = \sqrt{2}$ que va de i a $-i$ passant pel semiplà de la dreta ($\operatorname{Re} z > 0$*).*

Indicació*: comproveu que $\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(z-1)+\operatorname{Log}(z+1))}$ s'estén a $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ de manera contínua.* ◁

Exercici 4.2.7. *Siguin $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ i $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Demostreu que:*

a) $\left|\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+2}\right| \leqslant \pi$

b) $\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$

c) $\left|\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz\right| \leqslant 2\pi e$

d) $\left|\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2} dz\right| \leqslant \pi e^2.$ ◁

Exercici 4.2.8. *(a) Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors*

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz.$$

(b) Deduïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}. \qquad \triangleleft$$

4.3 Teorema de Cauchy

Exercici 4.3.1. *Recordeu que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ *per a tot* $a > 0$. Indicació*: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle* $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx)\, dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\triangleleft$

Exercici 4.3.2. *Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu perquè* $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$,

b) $f(z) = \mathrm{Log}(z + 3)$. $\triangleleft$

Exercici 4.3.3. *Sigui* $u : D \to \mathbb{R}$ *una funció harmònica en un disc D, és a dir, tal que* $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial u = 0$. *Demostra que existeix una funció* $v : D \to \mathbb{R}$ *harmònica tal que* $(u + iv)$ *és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada.* Indicació*: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per* $F = U + iV$ *es poden escriure com* $\partial F = 2\partial U$ *o com* $\overline{\partial U} = -i\bar{\partial} V$. $\triangleleft$

Exercici 4.3.4. *El teorema de Green diu que si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *és un obert i* $U \subset \Omega$ *és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que* $\overline{U} \subset \Omega$, *aleshores tot camp vectorial* $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *amb* $F \in C^1(\Omega)$ *satisfà que*

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\; dm = \int_{\partial U} (F_1\, dx + F_2\, dy)\,.$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). $\triangleleft$

Exercici 4.3.5. *Continuant amb l'exercici 4.3.4, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, que diu que si* $\phi \in C^1(\Omega)$ *i* $z_0 \in U$, *aleshores*

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0}\, dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C^1_c(\Omega)$ *ens diu* $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$, *on $\mathcal{C}$ indica la transformada de Cauchy*

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\psi(z)}{z - z_0}\, dm(z). \qquad \triangleleft$$

4.4 Fórmula integral de Cauchy

Exercici 4.4.1. *Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:*

a) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz$;

b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$;

d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1}$;

e) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3}$;

f) $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz$;

g) $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz$;

h) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz$. ◁

Exercici 4.4.2. *Sigui p un polinomi de grau n, amb tots els seus zeros continguts en $D(0,R)$. Demostreu que*

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n. \qquad \triangleleft$$

Exercici 4.4.3. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$, i deduïu que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,dt}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leqslant r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \qquad \triangleleft$$

Exercici 4.4.4. *Siguin $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{a g(w)}{aw-1} \right) dw. \qquad \triangleleft$$

Exercici 4.4.5. *Es consideren els següent exercicis relacionats amb la Fórmula Integral de Cauchy.*[1]

a) *Calculeu* $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$ *sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.*

b) *És cert que* $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z}\, dz = 0$ *si C és tancada i simple?*

4.5 Sèries de potències

Exercici 4.5.1. *Desenvolupeu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:*

[1] De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

a) $1/z$, $a = 1$,

b) $z^2 e^z$, $a = 0$,

c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a = 0$,

d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a = 0$,

e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a = 0$,

f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a = 0$.

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). ◁

Exercici 4.5.2. *Sigui* $\alpha \in \mathbb{C}$, *provar que si* $(1+z)^\alpha$ *es pensa com* $e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$ *llavors per* $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots$$

(generalització del binomi de Newton).

Exercici 4.5.3. *Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:*

a) $f(z) = \cos^2 z$, $a = 0$.

b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a = 1$.

c) $\sqrt[3]{z}$, $a = 1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ *és la determinació de l'arrel cúbica en* $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ *que val* $(-1 + i\sqrt{3})/2$ *en* $z = 1$. ◁

Exercici 4.5.4. *Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ *i el punt* $a = -1$.

1. *"Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de* f *al voltant del punt* a.
2. *Calculeu la sèrie de potències de* f *al voltant de* a. ◁

Exercici 4.5.5. *a) Es pot desenvolupar* $\sqrt{z}$ *en sèrie de potències en un entorn de l'origen?*

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ *en sèrie de potències?*

c) I la funció $\dfrac{1}{2-z} + \dfrac{z}{3-z}$*?*

Exercici 4.5.6. *Determinar com a mínim els coeficients* a_1, a_2, a_3, a_4 *de la sèrie de Taylor de* $1/(1+z+z^4)$ *centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim* $2/3$.

Exercici 4.5.7. *Vegem com el teorema 4.21 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real* f *és analítica en un interval obert* $I \subset \mathbb{R}$ *si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostra que si* f *és analítica en* I *aleshores hi és derivable. Troba una funció infinites vegades derivable en* $\mathbb{R}$ *que no hi sigui analítica. Troba una funció* f *analítica en* $\mathbb{R}$ *que tingui radi de convergència* 1.

4.6 Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

Exercici 4.6.1. *Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ calculeu*

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \qquad \triangleleft$$

Exercici 4.6.2. *Siguin $0 \leqslant m \leqslant n$ enters. Calculeu*

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}}\, dz. \qquad \triangleleft$$

Exercici 4.6.3. *Intenteu calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades (potser cal recordar la desigualtat $|\int_\Gamma f(z)dz| \leqslant \int_\Gamma |f(z)||dz|$.)*

a) Considereu la semicircumferència C en el semiplà superior centrada a 0 amb radi R i tancada pel segment de l'eix OX. Calculeu $\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és el segment de $-R$ a R i C_2 la part restant de C. Fent servir la desigualtat triangular per integrals donar una fita superior de $\left|\int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz\right|$.

c) Fent servir els apartats anteriors calcular $\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$. Que passa si R tendeix a infinit? $\triangleleft$

Exercici 4.6.4. *Sigui $\alpha > 0$ i $f \in H(D(0,1))$ complint que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1-|z|)^\alpha |f(z)| \leqslant c$. Demostreu que per a tot $n \geqslant 0$, $|f^{(n)}(0)| \leqslant cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha$.* $\triangleleft$

Exercici 4.6.5. *Sigui f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leqslant M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant CMe$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.*
Indicació*: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant \frac{M}{r} e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$.* $\triangleleft$

Exercici 4.6.6. *(a) Suposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leqslant M$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen*

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{R^k}.$$

(b) *Suposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està acotat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul acotat per 1.* ◁

Exercici 4.6.7. *Proveu que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leqslant |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\, e.$$ ◁

4.7 Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

Exercici 4.7.1. *Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim.* ◁

Exercici 4.7.2. *La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \to \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el Teorema de Liouville?* ◁

Exercici 4.7.3. *Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu*

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. ◁

Exercici 4.7.4. *Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leqslant |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.* ◁

Exercici 4.7.5. *Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que*

(a) *Si $|f| \geqslant 1$, llavors f és constant.*

(b) *Si $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, llavors f és constant.*

(c) *Si $\operatorname{Im} f \leqslant 1$, llavors f és constant.* ◁

(d) *Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.*

Exercici 4.7.6. *Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leqslant Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f?* ◁

Exercici 4.7.7. *Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f?* ◁

4.8 Teorema de Morera

Exercici 4.8.1. *Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz.* ◁

Exercici 4.8.2. *Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corol·lari 4.33 del teorema de Morera?* ◁

Exercici 4.8.3. *(a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui*

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz}dt$$

(quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h; si prenem iz en el lloc de z, H s'anomena transformada de Laplace bilateral de h). Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leqslant Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) Sigui h una funció contínua a $[0,1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z}dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$. ◁

Exercici 4.8.4. *Sigui f holomorfa en un obert Ω, i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que hi ha $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat*

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació: *proveu primer que la funció G definida per*

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & si \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω. ◁

4.9 Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

Exercici 4.9.1. *Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades* *a)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz.$ *b)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z-2)^4} dz.$ *c)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} \, d\theta.$ ◁

4.10 Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

Exercici 4.10.1. *Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:*

a) $\displaystyle\frac{z^2+1}{z^2-1}$ *b)* $z^2 \sin z$ *c)* $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}$. ◁

Exercici 4.10.2. *Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2\cos z^3 + z^6 - 2$.* ◁

Exercici 4.10.3. *Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:*

a) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$.

b) $f(z) = (z^2 - \pi^2)\sin z/z$.

c) $f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3$.

Aquí $\sqrt{\cdot}$ *és la determinació de l'arrel quadrada en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *que val* -1 *en* $z = 1$. ◁

Exercici 4.10.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ a una regió Ω és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.* ◁

Exercici 4.10.5. *Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0,1)$ i tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:*

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n, aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n, aleshores f és constant. ◁

Exercici 4.10.6. *Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:*

(a) $|f(1/n)| \leqslant 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geqslant 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1+n^3) - 3\ln n$ per a $n > 1$. ◁

Exercici 4.10.7. *Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D(0,2)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$.* ◁

Exercici 4.10.8. *Sigui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat.* ◁

Exercici 4.10.9. *(a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leqslant C|z|^n$, per a $|z| \geqslant R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n.*

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació*: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \ldots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.* ◁

Exercici 4.10.10. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x, 0) = g(x) \quad v(x, 0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$ ◁

4.11 El principi del mòdul màxim

Exercici 4.11.1. *Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.52.*

Exercici 4.11.2. *Trobeu el màxim de:*

a) $|\cos z|$ *i* $|\sin z|$ *a* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ *i* $|e^{z^2}|$ *a* $|z| \leqslant 1$. ◁

Exercici 4.11.3. *Trobeu totes les funcions holomorfes en $\mathbb{D}$ tals que $f(1/2) = 3$ i $|f(z)| \leqslant 3$ si $|z| < 1$.* ◁

Exercici 4.11.4. *Es considera $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ i el disc D de radi 2 centrat a 5. Provar que $f(z)$ assoleix el valor màxim i mínim del mòdul a $|z - 5| = 2$.* Indicació*: considerar $1/f(z)$.* ◁

Exercici 4.11.5. *Sigui f una funció holomorfa en el disc $D(0, R)$, $R > 0$. Definim*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 \leqslant r < R.$$

Demostreu que si f no és constant, aleshores $M(r)$ és estrictament creixent a $[0, R)$. ◁

Exercici 4.11.6. *Sigui f una funció holomorfa en un obert connex Ω i D un disc obert tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Suposeu que $|f(z)| = c$ per tot $z \in \partial D$, on c és una constant. Proveu que f té almenys un zero en D o bé f és constant en Ω.* Indicació*: Distingiu segons si $c = 0$ o $c > 0$. En el segon cas, proveu que si f no té zeros en D, aleshores f és constant en D.* $\triangleleft$

Exercici 4.11.7. *Sigui f una funció holomorfa i no constant en $\Omega \subset \mathbb{C}$, un obert connex. Suposeu que existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \leqslant |f(z)|$ per a tot $z \in \Omega$. Proveu que aleshores $f(a) = 0$.* $\triangleleft$

Exercici 4.11.8. *Sigui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,*

$$\overline{\{z;\ |f(z)| < c\}} = \{z;\ |f(z)| \leqslant c\}. \qquad \triangleleft$$

5 Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

5.1 Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

Exercici 5.1.1. *Considerem el camí* $\gamma(t) = 4e^{it}\cos\frac{2}{3}t$, $(0 \leqslant t \leqslant 6\pi)$. *Calculeu* $\operatorname{Ind}(\gamma, 3)$ *i* $\operatorname{Ind}(\gamma, 1)$.
Indicació*: Comproveu que si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *és una corba,* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *és una partició de* $[a, b]$ *i diem* γ_k *a la restricció de* γ *a l'interval* $[t_{k-1}, t_k]$, *per* $k = 1, \ldots, n$, *llavors l'increment de l'argument de* γ *és igual a la suma dels increments dels arguments de les* γ_k*'s.* ◁

5.2 El teorema global de Cauchy

Exercici 5.2.1. *Considerem el camí* $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. *Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu*

$$\int_\gamma \frac{3z - 3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}\, dz.$$ ◁

Exercici 5.2.2. *Considerem el camí* $\gamma(t) = (2\sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2\sin(3t))$, *amb* $t \in [0, 2\pi]$. *Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de* $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$, *i trobeu el valor de*

$$\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2 + 1}\, dz.$$ ◁

5.3 Homotopia i teorema de Cauchy

5.4 Dominis simplement connexos

Exercici 5.4.1. *Sigui* $u : D \to \mathbb{R}$ *una funció harmònica en un domini simplement connex* Ω. *Demostra que existeix una funció* $v : D \to \mathbb{R}$ *harmònica conjugada d'u (vegeu l'exercici 4.3.3).* ◁

Exercici 5.4.2. *Siguin* $f, g \in H(\mathbb{C})$ *tals que* $f^2 + g^2 \equiv 1$. *Demostra que existeix* $h \in H(\mathbb{C})$ *tal que* $f = \cos(h)$ *i* $g = \sin(h)$. ◁

Exercici 5.4.3. *Demostra que si* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *és connex i* Ω *és un obert connex, aleshores tota corba tancada* γ *és homòtopa a* 0. ◁

5.5 Funcions harmòniques

Exercici 5.5.1. *Demostra el lema 5.34 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament.* ◁

Exercici 5.5.2. *Sigui* Ω *un domini simplement connex, i sigui* $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ *una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre* $\mathbb{D}$ *i* Ω *amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6, les derivades de les quals estenen contínuament a* $\partial\mathbb{D}$ *i a* $\partial\Omega$ *respectivament. Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que*

$$\mathcal{L}(\varphi'(z_0)) = \operatorname{Re}\mathcal{L}(\varphi')(0) + \frac{i}{2\pi r}\int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}(\varphi'(z))H(z,z_0)|dz|.$$ ◁

Exercici 5.5.3. *El* problema de Dirichlet *consisteix en trobar una funció harmònica en un domini obert* Ω *que sigui contínua fins la seva frontera* $\partial\Omega$ *i amb un valor prefixat a* $\partial\Omega$. *Suposem que* ϕ_1 *i* ϕ_2 *són harmòniques a* Ω *i contínues fins a* $\partial\Omega$ *i que* $\phi_1 = \phi_2$ *a la vora* $\partial\Omega$. *Provar que si* Ω *és simplement connex, aleshores* $\phi_1 = \phi_2$ *en tot punt d'*Ω. Indicació*: trobar la funció* v *harmònica conjugada de* $\phi_1 - \phi_2$ *i aplicar el principi del màxim (mínim) a* $\phi_1 - \phi_2 + iv$. ◁

Exercici 5.5.4. *Una distribució estacionària* T *de la temperatura en una regió* Ω *és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura* T *a l'interior d'un disc de radi* 1 *si sabem que la temperatura val* $\operatorname{Im} z$ *als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i* 0 *a la resta de punts de la vora. En particular veieu que la temperatura al centre del disc és* $1/\pi$. ◁

6 Sèries de Laurent

6.1 Sèries de Laurent i singularitats

Exercici 6.1.1. *Calcular la sèrie de Laurent de*

a) $\dfrac{z-1}{z(z-4)^3}$ *a* $0 < |z-4| < 4$.

b) $1/e^{(1-z)}$ *per* $|z| > 1$. ◁

Exercici 6.1.2. *Per a la funció* $f(z) = \dfrac{\sin z \cos 3z}{z^4}$

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a* $z = 0$.
2. *Calcular* $\oint f(z)dz$ *si es recorre* $|z| = 1$ *un cop i en sentit antihorari.* ◁

Exercici 6.1.3. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ *a les corones: (a)* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, *(b)* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, *(c)* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ *i (d)* $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. ◁

Exercici 6.1.4. *Sigui* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, *donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a* 0 *allà on* f *és analítica (*$|z| < 1, 1 < |z| < 3$ *i* $|z| > 3$*).* ◁

Exercici 6.1.5. *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent de*

a) $f(z) = z^2 \cos\left(\dfrac{1}{3z}\right)$ *per* $|z| > 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ *per* $0 < |z| < R$. ◁

Exercici 6.1.6. *Quina és la corona (o anell) de convergència de* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$*?* ◁

6.2 Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Exercici 6.2.1. *Construcció de funcions*

1. *Trobar una funció* f *que tingui un pol d'ordre* 2 *a* $z = 1 + i$ *i singularitats essencials a* $z = 0, 1$.

2. *Trobar una funció* f *que tingui una singularitat evitable a* $z = 0$, *un pol d'ordre* 6 *a* $z = 1$ *i una singularitat essencial a* $z = i$. ◁

Exercici 6.2.2. *Sigui* f *analítica amb zero d'ordre* n *a* z_0 *i* g *analítica amb zero d'ordre* m *a* z_0. *Si* $h(z) = f(z)/g(z)$ *proveu que*

a) Si $n > m$ $h(z)$ *té un zero d'ordre* $n - m$ *a* z_0,

b) si $n < m$ $h(z)$ *té un pol d'ordre* $m - n$ *a* z_0,

c) si $n = m$ $h(z)$ *és holomorfa i no nul·la a* z_0. ◁

Exercici 6.2.3. *Determineu les singularitats de les funcions següents. Si* a *és una singularitat evitable de* f, *calculeu el valor que cal donar a* $f(a)$ *per a què* f *sigui holomorfa en un entorn d'a, i si* a *és un pol de* f, *determineu la part singular de* f *en* a *(la part de la sèrie amb índexs negatius).*

a) $f(z) = z\cos(1/z)$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3(z-1)^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{(1-e^z)^2}$. ◁

Exercici 6.2.4. *Sigui* $f \in H(D(a,r)\setminus\{a\})$. *Suposem que existeix una successió* $(z_n)_n$ *tal que* $z_n \to a$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \qquad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f *en el punt* a. ◁

Exercici 6.2.5. *a) La funció* $\tan(1/z)$ *té una singularitat aïllada al* 0*? De quin tipus?*

b) Sigui 0 *singularitat aïllada de* $f(z)$. *Suposem que* $|f(z)| \leqslant |z|^{-\alpha}$ *on* $0 < \alpha < 1$. *Demostreu que* 0 *és una singularitat evitable.* ◁

6.3 Teorema dels Residus

Exercici 6.3.1. *Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$? Què passa si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$?* ◁

Exercici 6.3.2. *Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. ◁

Exercici 6.3.3. *Calculeu* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z-a}\, dz$ *pels diferents valors d'$a \in \mathbb{C}$ tals que $|a| \neq 1$.* ◁

Exercici 6.3.4. *Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions.*

1. *Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0.*
2. *Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.*
3. *Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.*
4. *Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$.* ◁

Exercici 6.3.5. *Suposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0. Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\operatorname{Res}(g, z_0) = m$.* ◁

Exercici 6.3.6. *a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0, llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0.*

b) Proveu que $\operatorname{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. ◁

Exercici 6.3.7. *Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.*

a) $f(z) = \dfrac{z^3 + 1}{z^2(z+1)}$.

b) $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

c) $h(z) = \cos(1 - 1/z)$. ◁

Exercici 6.3.8. *Avalueu* $\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)} dz$ *al llarg de la corba* $|z-3| = 3$ *recorreguda en sentit antihorari.* ◁

Exercici 6.3.9. *Avalueu les següents integrals*

a) $\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2-4} dz$

b) $\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2+z+1} dz$

c) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz$. ◁

Exercici 6.3.10. *Calculeu la integral de la funció* $f(z) = \frac{1+z}{1+\sin z}$ *sobre la vora del disc* $D(0,7)$. ◁

Exercici 6.3.11. *Per a* $t > 0$, *sigui* C_t *la circumferència de centre* it, *que passa pels punts* -2 *i* 2. *Calculeu*

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-t)} dz, \quad \text{per a } t \neq 2.$$ ◁

6.4 Residu a l'infinit

Exercici 6.4.1. *Trobar el valor la integral* $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ *calculant el residu de l'integrand a l'infinit.* ◁

Exercici 6.4.2. *Sigui* $a \in \mathbb{R}$, *calculeu, estudiant el residu a l'infinit,* $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2+a^2)} dz$ *on* C *és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand.* ◁

Exercici 6.4.3. *Avaluar* $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. ◁

6.5 Aplicació al càlcul d'integrals

Exercici 6.5.1. *Per* $r > 0$, *considerem la corba* $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ *definida per* $\gamma_r(t) = re^{it}$, *i sigui*

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r\to\infty} I(r) = 0$. ◁

Exercici 6.5.2. *Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$.

(a) Determineu les singularitats de f.

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor. ◁

Exercici 6.5.3. *Demostreu que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$ ◁

Exercici 6.5.4. *Calculeu*

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}.$$

◁

Exercici 6.5.5. *Donat* $a \in (0,1)$ *calculeu el valor de la integral*

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\, dx.$$ ◁

Exercici 6.5.6. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}.$$ ◁

Exercici 6.5.7. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx.$$ ◁

Exercici 6.5.8. *Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats* $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $n = 0, 1, 2, \cdots$*):*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\, dt.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2+\cos t}\, dt.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1}\, dx.$ ◁

Exercici 6.5.9. *Justifiqueu la convergència de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

Exercici 6.5.10. *Siguin* $f(z) = e^z/z^2$ *i la recta* $\gamma = \{1 + it;\ t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_\gamma f(z) dz.$$

Indicació*: integreu* f *sobre la vora del semidisc de centre* $z_0 = 1$ *i radi* R *amb* $\operatorname{Re} z \leqslant 1$.

b) Deduïu que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}.$ ◁

Exercici 6.5.11. *Considereu*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2+1)^2(z^2+4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos). ◁

Exercici 6.5.12. *Sigui* $f(z) = e^{iz^2}$, *i considereu el camí* γ_R *format per el segment que va de* 0 *a* R*; l'arc del cercle* $|z| = R$ *que va de* R *a* $Re^{i\pi/4}$, *i el segment que va de* $Re^{i\pi/4}$ *a* 0. *Demostreu que*

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

Observació: *Podeu utilitzar que* $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ◁

Exercici 6.5.13. *(a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \to 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f.*

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geqslant 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=\frac{1}{n}} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=\frac{1}{n+1}} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f. Indicació*: Utilitzeu el Teorema de deformació i l'apartat anterior.* ◁

Exercici 6.5.14. *Calculeu, justificant tots els passos, la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació*: Considereu la funció $f(z) = \dfrac{z^\alpha}{z^2 + z + 1}$. Definiu una determinació del logaritme $log(z)$ a $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$ de manera que $z^\alpha = e^{\alpha log(z)}$. Finalment integreu la funció $f(z)$ a la mateixa regió que les integrals del tipus*

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx.$$ ◁

6.6 Principi de l'argument

Exercici 6.6.1. *Quines de les següents funcions són meromorfes a $\mathbb{C}$?*

a) z^5 *b)* $z^{5/2}$ *c)* $e^{1/z}$ *d)* $1/\sin(z)$. ◁

Exercici 6.6.2. *Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.*
I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? ◁

Exercici 6.6.3. *Sigui f una funció entera tal que*

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. ◁

6.7 Teorema de Rouché

Exercici 6.7.1. *Demostreu que l'equació* $e^z = 2z + 1$ *té exactament una solució en el disc unitat obert.* Indicació*: Proveu que* $|e^z - 1| \leqslant e - 1$ *si* $|z| = 1$*.* ◁

Exercici 6.7.2. *Sigui* f *una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que* $|f(z)| < 1$*, per a* $|z| = 1$*. Quants punts fixos té* f*?* ◁

Exercici 6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$.

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$.

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$. ◁

Exercici 6.7.4. *Quants zeros té* $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ *en la regió* $\left\{z \in \mathbb{C};\ \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$*?* ◁

Exercici 6.7.5. *Considerem* $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ *són a l'anell* $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ *al primer quadrant.* ◁

Exercici 6.7.6. *(a) Calculeu el nombre de solucions a* $\mathbb{D}$ *de l'equació* $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ *té* n *solucions en el disc unitat* $(n = 0, 1, 2, \dots)$*.* ◁

Exercici 6.7.7. *Sigui* $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, *i* $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n *arrels diferents al semiplà* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació*: Considereu un disc centrat a* $z = 1$ *i de radi* $R = 1$ *primer, deprés mireu d'augmentar el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.*

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leqslant 1/2^n$*, llavors totes aquestes arrels són al disc* $D_{1/2}(1)$*.* ◁

Exercici 6.7.8. *Demostreu que per a tot* $R > 0$ *existeix* $n(R) \geqslant 0$ *tal que si* $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leqslant R\}$*.* ◁

Exercici 6.7.9. *Sigui* f_n *una successió de funcions holomorfes en un domini* Ω *tals que* $f_n \to f$ *uniformement en compactes d'*Ω*, per una certa funció* f*.*

1. *(Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si* $f_n(z) \neq a$ *per a tot* $z \in \Omega$ *i tot* $n \in \mathbb{N}$*, aleshores,* $f \equiv a$ *o bé* $f(z) \neq a$ *en* Ω*.*

2. *Proveu que si* f_n *és injectiva en* Ω *per a tot* $n \geqslant 0$*, aleshores* f *és constant o bé* f *és injectiva en* Ω*.* Indicació*: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.*

3. *Proveu que si* f *té un zero d'ordre* m *en* $a \in \Omega$*, aleshores existeix* $\rho_0 > 0$ *tal que per tot* $\rho < \rho_0$ *i per tot* $n > n_\rho$*,* f_n *té exactament* m *zeros en* $D_\rho(a)$ *comptant multiplicitats.* ◃

7 Representació Conforme

7.1 El teorema de l'aplicació de Riemann

7.2 Projecció estereogràfica i circumferències generalitzades

Exercici 7.2.1. *Sigui p la projecció estereogràfica. Demostreu que $\lambda = \frac{1}{1-z}$, i que la inversa de p és*

$$p^{-1}(x+iy) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\left(x, y, x^2+y^2\right). \quad \triangleleft$$

Exercici 7.2.2. *Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi r és*

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2,$$

i la d'una recta perpendicular a α és

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

7.3 Transformacions de Möbius

Exercici 7.3.1. *Donada una homografia $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, definim $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que està definit* mòdul constant *multiplicativa. Per exemple, les matrius $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponen respectivament a la translació $z \mapsto z+b$, a la dilatació $z \mapsto az$ i a la inversió $z \mapsto 1/z$.*

*a) Donades $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$, demostreu que $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2}A_{T_1}$ (*mòdul constant *multiplicativa).*

b) Trobeu T^{-1}. $\triangleleft$

Exercici 7.3.2. *Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions.* $\triangleleft$

Exercici 7.3.3. *Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.* $\triangleleft$

Exercici 7.3.4. *Sigui $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Quina és la imatge per f de* *a) la recta real,* *b)* $\partial D_2(0)$, *c)* $\partial\mathbb{D}$, *d) l'eix imaginari.*

I per $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$*?* ◁

Exercici 7.3.5. *Troba l'homografia que envia* $(i, 0, -1)$ *a* $(-i, 0, \infty)$. ◁

Exercici 7.3.6. *Demostra el corol·lari 7.16.* ◁

Exercici 7.3.7. *Troba una homografia que enviï* $\mathbb{D}$ *a* $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. ◁

Exercici 7.3.8. *Sigui* $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ *i definim*

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}, T(z) = \frac{z}{az+1}.$$

Trobeu

$$T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1, \quad T^m, m \in \mathbb{Z}.$$ ◁

Exercici 7.3.9. *Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació*

$$T(z) = \frac{2z+i}{(1-i)z+3i}.$$ ◁

Exercici 7.3.10. *Trobeu totes les* $T \in \mathcal{M}$ *que tinguin per punts fixos* 0 *i* $-i$. ◁

Exercici 7.3.11. *Trobeu* $T \in \mathcal{M}$ *tal que* $T(1-i) = 1+i, T(2) = i, T(1+i) = -i$. ◁

Exercici 7.3.12. *Siguin* C_1 *i* C_2 *dues circumferències generalitzades i* $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \backslash C_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \backslash C_2$. *Demostreu que existeix* $T \in \mathcal{M}$ *tal que* $T(C_1) = C_2$ *i* $T(z_1) = z_2$. *Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu una d'elles en el cas particular*

$$C_1 = \{z : |z-1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i.$$

◁

7.4 Raó doble i simetria

Exercici 7.4.1. *Sigui* $T \in \mathcal{M}$ *tal que* $T(D(a,R)) = D(a,R)$. *Demostreu que els punts fixos de* T *estan a* $\partial D(a,R)$ *o bé són simètrics respecte a* $\partial D(a,R)$. ◁

7.5 Automorfismes

Exercici 7.5.1. *Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien* $1/2$ *a* 0. *N'existeix alguna que enviï* 0 *a* $-i/2$*? I* 0 *a* $-i/4$*? Utilitzeu* T *per trobar una representació conforme* S *que envií* $\partial\mathbb{D}$ *a* $\partial D_2(i)$ *tal que* $S(1/2) = i$ *i* $S(0) = 0$. ◁

Exercici 7.5.2. *Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt* $b \in \mathbb{D}$ *per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir*

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D}),\, T(a) = \tilde{a}\},$$

és una circumferència. ◁

Exercici 7.5.3. *Troba tots els automorfismes* T *de* $\mathbb{D}$ *tals que* $T(1/2) = 1/3$. ◁

7.6 Altres transformacions conformes

Exercici 7.6.1. *Quina és la imatge del primer quadrant per* z^3*?* ◁

Exercici 7.6.2. *Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a a un semiplà?* ◁

Exercici 7.6.3. *Trobeu una aplicació de Riemann del sector* $\{0 < \operatorname{Arg} z < \pi/8\}$. ◁

Exercici 7.6.4. *Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia?* ◁

Exercici 7.6.5. *Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en* $D_1(1)$ *que envií* $1 \mapsto 1$, $0 \mapsto 0$ *i* $\infty \mapsto 1 + i$. ◁

Exercici 7.6.6. *Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior* $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ *en* $\mathbb{D}$ *són de la forma* $e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ *per alguna* $a \in \mathbb{H}_+$ *i algun* $\theta \in \mathbb{R}$. ◁

Exercici 7.6.7. *Trobeu una transformació de Möbius que envií el primer quadrant a* $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$. *Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de* $\mathbb{H}_+$ *a* $\{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. ◁

Exercici 7.6.8. *Trobeu una representació conforme de* $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ *en* $\mathbb{D}$. ◁

Exercici 7.6.9. *Trobeu una representació conforme d'*Ω_1 *en* Ω_2.

a) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$.

b) $\Omega_1 = \mathbb{D}$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$.

c) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Re} z > 1/2\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$.

d) $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

e) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$.

f) $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$, *que deixi invariant el segment* $(-i, i)$.

g) $\Omega_1 = \mathbb{D} \backslash [0, 1)$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \backslash [0, \infty)$.

h) $\Omega_1 = \{|\operatorname{Im} z| < \pi/2\} \backslash ((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$. ◁

8 Fluids

8.1 Qüestions generals. Escenari i notació.

Exercici 8.1.1. *Proveu que* $\Gamma = 0$ *en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe* C^2 *com a mínim).* $\triangleleft$

Exercici 8.1.2. *Proveu que per fluxos definits en un domini* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial* $\varphi(x, y)$ *és una funció harmònica.* $\triangleleft$

Exercici 8.1.3. *Proveu que* $\overline{\Phi'(z)} = \boldsymbol{V}(z) = V_1 + iV_2$. $\triangleleft$

8.2 Fluxos bàsics.

Exercici 8.2.1. Superposició. *Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt* $-a$ *amb una pica al punt* a*:*

$$\Phi(z) = k \log(z + a) - k \log(z - a) = k \log \left(\frac{z + a}{z - a} \right).$$

Trobeu l'expressió de $\boldsymbol{V}$, V, φ *i* ψ. *Dibuixeu les línies de corrent (*$\psi = c$*).* $\triangleleft$

Exercici 8.2.2. *En l'exercici anterior, fem* $a \to 0$ *i* $k \to \infty$ *de manera que* $2ka = \mu$ *sigui finit. Veure que al límit obtenim el potencial complex* $\Phi(z) = \mu/z$ *que s'anomena* doblet *o* dipol. *Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat* $2\pi\mu$ *s'anomena* moment *del doblet. Trobeu l'expressió de* $\boldsymbol{V}$, V, φ *i* ψ. *Dibuixeu les línies de corrent (*$\psi = c$*).* $\triangleleft$

Exercici 8.2.3. Font-remolí. *Estudiar el flux amb funció potencial* $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - a)$. *Discutiu segons els valors de* Γ *(circul·lació o intensitat) i* Q *(potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de* Γ *i* Q. $\triangleleft$

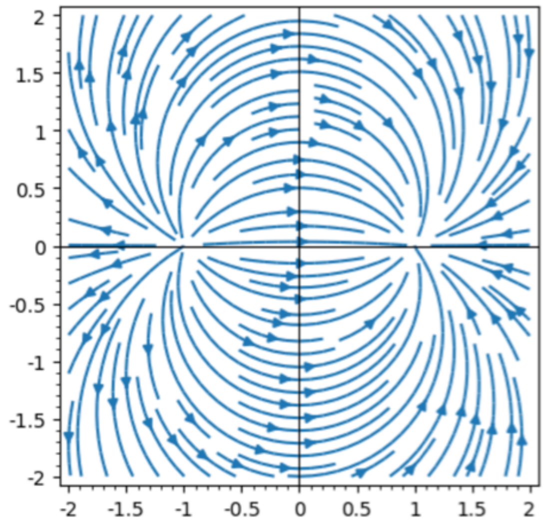


Figura 8.1: Superposició amb $a = 1$.

8.3 Obstacles

Exercici 8.3.1. *Modifiquem el flux amb potencial donat per* $f(z) = \log(z+2)$ *que és una font sortint des del punt* $z = -2$ *(vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial*

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

a) Descomposeu Φ *en fluxos coneguts.*

b) Calculeu $\Phi'(z)$ *i confirmeu el que es demostra a l'apartat anterior.*

c) Vegeu que per z *amb* $|z|$ *molt gran resulta* $\Phi'(z) \approx \dfrac{1}{z+2}$ *i que llavors lluny de* $z = -2$ *el flux associat a* Φ *és com una font sortint de* $z = -2$.

d) Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` *i* `streamline_plot`*).* ◁

8.4 Expressió general (recapitulació).

Exercici 8.4.1. *Pels* z *on* $\boldsymbol{V}(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ *diem que hi ha un* punt estacionari *del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).*

a) Per $\Phi(z) = z^n$ *el* 0 *és un punt estacionari d'ordre* $n-1$*. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per* $n = 2, 3, 4$.

b) Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?

c) Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = ct., \psi = ct.$) formen un angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?

Exercici 8.4.2. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a*

a) $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ *on* $a, b \in \mathbb{C}$ *i* $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$..

b) $\Phi(z) = az + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on* $a, \Gamma > 0$.

c) $\Phi(z) = az + \dfrac{Q}{2\pi}\log(z)$ *on* $a, Q > 0$.

d) $\Phi(z) = \dfrac{p}{2\pi z} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on* $p, \Gamma > 0$. ◃

Exercici 8.4.3. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi R V_0$, $\Gamma > 4\pi R V_0$ *i* $\Gamma = 4\pi R V_0$. *Dibuixeu exemples de cadascun dels casos.* ◃

Exercici 8.4.4. *Donar un potencial complex que té fonts-remolins* $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \ldots, n\}$ *i velocitat* $\boldsymbol{V}_\infty = Ve^{i\alpha}$ *a l'infinit.* ◃