Introducció a l'anàlisi complexa

Llistes de problemes solucionats, v25.16

Carme Cascante*, Núria Fagella, Eduardo Gallego†,
Jordi Pau, Martí Prats

17 de juliol de 2025

*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:
Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia
†EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

1 El cos dels nombres complexos

1.1 El cos dels nombres complexos

Exercici 1.1.1. *Doneu en forma $a + bi$:*

a) $(-1+i)^2$,

b) $\frac{8i-1}{i}$,

c) $\frac{-1+5i}{2+3i}$,

d) $\dfrac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$,

e) $\left(\dfrac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$,

f) $((3-i)^2-3)i$.

Solució:

a) $-2i$,

b) $8+i$,

c) $1+i$,

d) $33/25 - 19i/25$,

e) $(-253-204i)/4225$,

f) $6+5i$.

Exercici 1.1.2. *Demostreu o doneu un contraexemple:*

a) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Re}\,w$, *b)* $\mathrm{Re}\,(zw) = (\mathrm{Re}\,z)(\mathrm{Re}\,w)$, *c)* $\mathrm{Re}\,(\frac{z}{w}) = \frac{\mathrm{Re}\,z}{\mathrm{Re}\,w}$. ◁

Solució:

a) Cert b) Fals c) Fals

Exercici 1.1.3. *Sigui* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{Im}\,(z) > 0$. *Proveu que* $\mathrm{Im}\,(1/z) < 0$. ◁

Solució: Si $z = x + iy$ amb $y > 0$ com que $1/z = (x - yi)/|z|^2$ resulta que $\mathrm{Im}\,(1/z) < 0$.

Exercici 1.1.4. *Si* $z = x + iy$ *on* $x, y \in \mathbb{R}$, *trobeu les parts real i imaginària de:*

a) z^2,

b) $z(z+1)$,

c) $\frac{1}{z-3}$,

d) $\frac{1}{z^2}$,

e) $\frac{z+1}{2z-5}$,

f) z^3. ◁

Solució:

a) $x^2 - y^2 + 2xyi$

b) $x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i$

c) $(x-3-iy)/((x-3)^2+y^2)$,

d) $\frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2}$

e) $\frac{2x^2-5x+2x-5+2y^2-i7y}{(2x-5)^2+4y^2}$

f) $x^3 - 3xy^2 + i(yx^2 - y^3 + 2x^2y)$.

Exercici 1.1.5. *Sigui* $(x+iy)/(x-iy) = a+ib$. *Proveu que* $a^2+b^2 = 1$. ◃

Solució: Notem per un cantó que

$$(a+ib)\cdot\overline{(a+ib)} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2+b^2.$$

Per altra banda, com que $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$, tenim que

$$\frac{x+iy}{x-iy}\overline{\frac{x+iy}{x-iy}} = \frac{x+iy}{x-iy}\frac{x-iy}{x+iy} = 1.$$

Exercici 1.1.6. *Proveu que* $-1+i$ *satisfà* $z^2+2z+2 = 0$. ◃

Solució: N'hi ha prou amb substituir: $(-1+i)^2+2(-1+i)+2 = \cdots = 0$.

Exercici 1.1.7. *Escriviu l'equació complexa* $z^3+5z^2 = z+3i$ *com dues equacions reals.* ◃

Solució: $x^3-3xy^2+5x^2-5y^2-x = 0$, $3x^2y-y^3+10xy-y-3 = 0$.

Exercici 1.1.8. *a) Si* z_1, z_2 *són complexos amb* z_1+z_2 *i* z_1z_2 *reals negatius proveu que* z_1, z_2 *són reals.*

b) Proveu que el vector z_1 *és paral·lel al vector* z_2 *si i només si* $\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = 0$. ◃

Solució:

a) Si $z_k = x_k+iy_k$, tenim que $y_1+y_2 = 0, x_1+x_2 < 0$ i $x_1x_2-y_1y_2 < 0, x_1y_2+x_2y_1 = 0$. Llavors $x_1x_2+y_1^2 < 0$ i $y_1(x_2-x_1) = 0$. Si $y_1 = 0$, llavors $y_2 = 0$ i z_1, z_2 són reals. Si $x_1 = x_2$ tenim que $x_1x_2 > 0$, llavors $\mathrm{Re}\,(z_1z_2) > 0$ que no és possible per hipòtesi.

   Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso (amb una visió més constructivista):

   Considerem el polinomi $P(X) = X^2-(z_1+z_2)X+z_1z_2 \in \mathbb{R}[X]$. Notem que

$$\Delta_P = (z_1+z_2)^2-4z_1z_2 \geqslant 0,$$

   ja que $z_1z_2 \leqslant 0$. Aleshores, les dues arrels de P són reals.

   D'altra banda, tenim que $P(z_1) = P(z_2) = 0$ per construcció. Per tant, z_1 i z_2 són reals.

   Comentaris: Notem que podem relaxar alguna de les hipòtesi de l'enunciat; ens serveix que z_1+z_2 sigui real.

b) Volem provar que $z_1 \parallel z_2 \iff \mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = 0$.

   $(\Rightarrow)$ Per ser paral·lels resulta que $z_2 = \lambda z_1$ (λ real), llavors $\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = x_2y_1-x_1y_2 = \lambda(x_1y_1-x_1y_1) = 0$.

   $(\Leftarrow)$ $\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = x_2y_1-x_1y_2 = 0$ tenim que $x_1/x_2 = y_1/y_2$ i $z_1 \parallel z_2$ quan $x_2 \neq 0 \neq y_2$. Si $x_2 = 0$, aleshores o bé $z_2 = 0 = 0\cdot z_1$, o bé $x_1 = 0$ i tenim $z_1 = \lambda z_2 \in i\mathbb{R}$. Si $y_2 = 0$, aleshores raonem anàlogament.

Exercici 1.1.9. *Proveu analíticament i gràfica que* $|z-1| = |\bar{z}-1|$. ◁

Solució: Com que $\bar{z}$ és el simètric respecte de l'eix OX de z els dos punts estan a la mateixa distància de qualsevol punt de OX, en particular de 1. També podem veure que

$$|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = |\bar{z}-1|^2.$$

Exercici 1.1.10. *Demostreu que* $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ *si* $|a| = 1$ *o bé* $|b| = 1$. *Quina excepció cal fer si* $|a| = |b| = 1$?

Demostreu també que $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ *si* $|a| < 1$ *i* $|b| < 1$.

Per acabar, si per $a \in \mathbb{D}$ *definim* $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, *demostreu que* $\varphi_a : \bar{\mathbb{D}} \to \bar{\mathbb{D}}$, *i és bijectiva en* $\mathbb{D}$ *i en* $\partial\mathbb{D}$, *i doneu-ne la inversa.* ◁

Solució: Suposem $|a| = 1$, l'altre cas es demostra igual per simetria.

$$\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\frac{a}{a} = \frac{a(a-b)}{a-b} = a, \quad a \neq b.$$

Si tenen mòdul 1 cal evitar que siguin iguals ja que en aquest cas dividim per 0.

Suposem ara $|a|, |b| < 1$, tenim que

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2 < 1 \iff |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2 \iff |a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$$

i això equival a

$$(|a|^2-1)(|b|^2-1) > 0$$

que és cert per ser $|a|, |b| < 1$.

Que $\varphi_a : \bar{\mathbb{D}} \to \bar{\mathbb{D}}$ es dedueix de l'apartat anterior. La bijectivitat es dedueix si veiem que l'equació $w = \varphi_a(z)$ té només una solució, i usant que $|z\bar{a}| = |z||a| < 1$, obtenim

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \iff w - \bar{a}zw = z - a \iff \frac{w+a}{1+\bar{a}w} = z,$$

d'on surt la bijectivitat ($w \in \mathbb{D}$ o $w \in \partial\mathbb{D}$ si $z \in \mathbb{D}$ o $z \in \partial\mathbb{D}$ altra vegada usant l'apartat anterior).

1.2 Els nombres complexos com a espai vectorial

Exercici 1.2.1. *Descriviu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

a) $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$,

b) $\operatorname{Im}\frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$,

c) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$,

d) $|z-1| = |z+i|$,

e) $|z-2| > |z-3|$,

f) $|z-1| + |z+1| = 7$. ◁

Solució:

a) $\{1 < \operatorname{Re}(z) < 2\}$;

b) $z = at, t \in \mathbb{R}^*$;

c) Paràbola $x = (1/2)(y^2 - 1)$;

d) Mediatriu de 1 i $-i$: $y = -x$;

e) $\{\operatorname{Re} z > 5/2\}$;

f) $(x/(7/2))^2 + (y/(3\sqrt{5}/2))^2 = 1$ que és una el·lipse, també podem escriure $180x^2 + 196y^2 = 2205$.

Exercici 1.2.2. *Suposem que $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Demostreu que $a_n + b_n \to a + b$ i $a_n b_n \to ab$, sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* ◁

Solució: La primera es deriva de l'estructura d'espai vectorial, i ja es va fer en cursos anteriors.

La segona, en ser una operació nova, cal demostrar-la:

$$\operatorname{Re}(a_n b_n) = \operatorname{Re} a_n \operatorname{Re} b_n - \operatorname{Im} a_n \operatorname{Im} b_n \to \operatorname{Re} a \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \operatorname{Im} b = \operatorname{Re}(ab),$$

i

$$\operatorname{Im}(a_n b_n) = \operatorname{Re} a_n \operatorname{Im} b_n + \operatorname{Im} a_n \operatorname{Re} b_n \to \operatorname{Re} a \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} a \operatorname{Re} b = \operatorname{Im}(ab).$$

Per (1.5) això implica

$$a_n b_n \to ab.$$

Exercici 1.2.3. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $i^n + \dfrac{1}{n+i}$, *b)* $\dfrac{n+i}{n-i}$, *c)* $\dfrac{3\,i\,n^2}{n^2 - 2i}$. ◁

Solució: a) No; b) 1, usant l'exercici 1.2.2; c) 3i, usant l'exercici 1.2.2.

Per exemple,

$$\frac{n+i}{n-i} = \frac{1+i/n}{1-i/n} \overset{\text{Ex.1.2.2}}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Exercici 1.2.4. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. ◁

Solució: Cap convergeix absolutament. Però sense mòdul, la part real i la imaginària són sèries alternades amb terme general tendint a 0. Per tant les dues sèries són convergents.

Exercici 1.2.5. *Demostreu el teorema de Mertens.* ◁

Solució: Suposem $\alpha_n, \beta_n > 0$ per no escriure valors absoluts, i sigui $A = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$. Donat $\varepsilon > 0$, existeix $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que per $N > N_0$ tenim que $0 < A - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \leqslant \frac{\varepsilon}{A+B}$ i $0 < B - \sum_{n=0}^{N} \beta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{A+B}$. Aleshores

$$\begin{aligned} AB - \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} &\leqslant AB - \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_k \beta_j = \left(A - \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \right) B + \left(B - \sum_{j=0}^{N} \beta_j \right) \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{A+B} B + \frac{\varepsilon}{A+B} A = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned} AB - \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} &\geqslant AB - \sum_{k=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N} \alpha_k \beta_j = \left(A - \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \right) B + \left(B - \sum_{j=0}^{2N} \beta_j \right) \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Exercici 1.2.6. *Tota successió convergent $\{z_n\}_{n \geqslant 0} \subset \mathbb{C}$ satisfà que $|z_{n+1} - z_n| \to 0$.* ◁

Solució: Considerem $w_0 := z_0$, $w_n := z_{n+1} - z_n$ per $n \geqslant 1$. Aleshores la successió coincideix amb la suma parcial telescòpica

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k,$$

de manera que z_n és convergent si i només si $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ ho és. En cas de ser-ho, la condició necessària de convergència (observació) aplicada a la sèrie diu que $|z_{n+1} - z_n| = |w_n| \to 0$.

1.3 Repàs de trigonometria

Exercici 1.3.1. *Demostreu tots els resultats de la secció.* ◁

Exercici 1.3.2. *Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de $x \in \mathbb{R}$ com*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostra que se satisfan les següents identitats:

a) $\sinh(0) = 0$ *i* $\cosh(0) = 1$.

b) $\lim_{x \to +\infty} \sinh x = \lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$ *i* $\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$.

c) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ *i* $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

g) $(\sinh x)' = \cosh x \qquad i \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x)$. ◁

Solució: Es pot calcular tot directament usant les propietats de la funció $x \mapsto e^x$ per $x \in \mathbb{R}$.

1.4 L'exponencial complexa

Exercici 1.4.1. *Fent servir la fórmula de de Moivre trobeu expressions de* $\sin 3\theta$ *i* $\sin 4\theta$ *en termes de* $\sin\theta$ *i* $\cos\theta$. ◁

Solució:

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 + i(3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3)$$

i amb això acabem. De manera similar $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$ i $\cos 4\theta = \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta$.

Exercici 1.4.2. *Trobar les arrels de* $z^4+1=0$ *i fer-les servir per veure que* $z^4+1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$. ◁

Solució: Les arrels són $\alpha = e^{i\pi/4}, \bar{\alpha}, \beta = e^{i3\pi/4}, \bar{\beta}$. Com que $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - \sqrt{2}z + 1$ i de manera similar per β, els polinomis $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$ i $(z-\beta)(z-\bar{\beta})$ són els que es citen a l'enunciat.

1.5 Representació polar d'un nombre complex

Exercici 1.5.1. *Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.*

a) $3(1+\sqrt{3}\,i)$, *b)* $2\sqrt{3} - 2i$, *c)* $-2+2i$, *d)* $-1-i$. ◁

Solució:

a) $6(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$;

b) $4(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$;

c) $2\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$;

d) $\sqrt{2}(cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4))$.

Exercici 1.5.2. *Expresseu en forma cartesiana (a + ib) els següents nombres:*

a) $(2+3i)(4+i)$, *c)* $\frac{1}{4+i}$, *e)* $(1-2i)^3$, *g)* $(1+i)^{100}+(1-i)^{100}$,

b) $(4+2i)^2$, *d)* $\frac{i}{2+i}$, *f)* $\frac{1}{2+i}+\frac{4-2i}{3+i}$, *h)* $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$. ◁

Solució: (a) $5+14i$; (b) $12+16i$; (c) $\frac{4-i}{17}$ (d) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$; (e) $-11+2i$; (f) $\frac{7}{5}-\frac{6}{5}i$; (g) -2^{51}; (h)$-2-\frac{3}{2}i$.

Exercici 1.5.3. *Fent servir el producte de* $(1+i)(5-i)^4$ *deduir la fórmula de Machin*[1]*:* $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$. ◁

Solució: Abans de fer l'exercici cal que fem algunes observacions.

- En primer lloc que la funció $\arctan(x)$ pren valors a $(-\pi/2, \pi/2)$.
- En segon lloc que la funció $\operatorname{Arg}(z)$ pren valors entre $(-\pi, \pi]$.
- A més a més la igualtat $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$ només té sentit mòdul 2π. Per exemple

  $$\operatorname{Arg}(i(-1+i)) = \operatorname{Arg}(-1-i) = -3\pi/4 \neq \operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(-1+i) = \pi/2 + 3\pi/4 = 5\pi/4$$

  però difereixen en 2π.

Dit això observem que $\operatorname{Arg}(1+i) = \pi/4$ i està en el primer quadrant, $\operatorname{Arg}(5-i) = \arctan(-1/5) = -\arctan(1/5)$ i està en el quart quadrant, $\operatorname{Arg}((5-i)^4) = -4\arctan(1/5) = \operatorname{Arg}(476-480i)$ que també està en el quart quadrant. Resulta que $(1+i)(5-i)^4 = 4(239-i)$ que està en el quart quadrant i $\operatorname{Arg}((1+i)(5-i)^4) = \arctan(-1/239) = -\arctan(1/239)$. Llavors

$$\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) + 2\pi n.$$

Però $\arctan(1/5) > \arctan(1/239)$ d'on $0 < 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) < 4\arctan(1/5) < 4\arctan(1/\sqrt{3}) = 2\pi/3$ llavors ha de ser $n = 0$ i tenim la igualtat.

Exercici 1.5.4. *Estudiar la convergència de* $\{z_0^n\}$ *si* $|z_0| < 1$ *o si* $|z_0| > 1$. ◁

Solució: Donem per conegut que si $0 < r < 1$ llavors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ i que si $r > 1$ llavors $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$. Aleshores si $|z_0| < 1$ el límit és 0 i si és més gran que 1 el límit és ∞. El cas més interessant es dona quan $|z_0| = 1$. Aleshores $z_0 = e^{2\pi\alpha i}$, si α és racional (llevat d'un enter parell) els $\{z_0^n\}$ formen un conjunt finit de punts de la circumferència. Si α és irracional és un conjunt infinit.

Exercici 1.5.5. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

[1] John Machin (1706), podeu trobar més informació a `https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula`.

a) $z_n = \dfrac{i}{n}$, *c)* $z_n = \mathrm{Arg}(-1 + i/n)$, *e)* $z_n = \left(\dfrac{1-i}{4}\right)^n$,

b) $z_n = i(-1)^n$, *d)* $z_n = \dfrac{n(2+i)}{n+1}$, *f)* $z_n = \exp\left(\dfrac{2n\pi i}{5}\right)$.

Aquí hem escrit $\exp(z) = e^z$.

Solució: a) 0, b) $\pm i$ (alterna), c) π, d) $2+i$, e) 0, f) recorre les arrels cinquenes de la unitat.

1.6 Equacions amb exponencials

Exercici 1.6.1.

Resoleu les següents equacions:

a) $e^z = 1 + i$, *b)* $e^{z^2} = i$, *c)* $e^{iz} = -1$. ◁

Solució: (a) $z = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
(b) $z = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\; e^{i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $z = \pm\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\; e^{-i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$;
(c) $z = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$;

1.7 Arrels n-èsimes

Exercici 1.7.1. *Calculeu:*

a) $\sqrt[3]{-1}$, *b)* $3^{1/4}$, *c)* $\sqrt[4]{-i}$, *d)* $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$, *e)* $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$. ◁

Solució: (a) $-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2$; (b) $\pm\sqrt[4]{3}, \pm i\sqrt[4]{3}$; (c) $\cos\theta + i\sin\theta$ amb $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$; (d) $\pm\sqrt{2}/2(1 + i\sqrt{3})$; (e)$\pm(2+i)$.

Exercici 1.7.2. *Donat $a \in \mathbb{C}$, quin és el màxim de $|z^n + a|$ per a $|z| \leqslant 1$?* ◁

Solució: $z = (a/|a|)^{1/n}$.

1.8 Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

Exercici 1.8.1. *Resoleu* $(z+1)^5 = z^5$. ◁

Solució: 1) Si z és solució ha de passar que $|z+1| = |z|$ llavors z ha d'estar a la mateixa distància de -1 que de 0. Llavors z es troba a la recta $x = -1/2$, és a dir, és de la forma $-1/2 + it$. Substituïm i veiem que t ha de satisfer $5t^4 - 5t^2/2 + 1/16 = 0$. Aquesta equació és biquadràtica i es resol fàcilment. Obtenim

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{5}}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}\right).$$

Numèricament $-1/2 \pm 0.688i$ i $-1/2 \pm 0.162i$.

2) Fem el canvi $z = 1/w$, llavors $(1/w+1)^5 = 1/w^5$. Si $w \neq 0$ resulta que z és solució si i només si $(1+w)^5 = 1$, això vol dir que $1+w$ és una arrel 5-èsima de la unitat diferent de 1. Aleshores

$$1 + w = \omega^k, \quad k = 1, \ldots, 4, \quad \omega = e^{i2\pi/5.}$$

Llavors

$$z = \frac{1}{\omega^k - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{\sin(2\pi k/5)}{1-\cos(2\pi k/5)}, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Com abans tenim numèricament que $-1/2 \pm 0.688i$ i $-1/2 \pm 0.162i$.

Observem que l'equació polinòmica original és de grau 4 i per tant té 4 solucions.

Exercici 1.8.2. *Sigui $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. Considerant el polinomi $(1-z)P(z)$, demostreu que tots els zeros de $P(z)$ estan dins del disc unitat.* $\triangleleft$

Solució: $(1-z)P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n$. Si z és zero de P amb $|z| > 1$ tenim que

$$|nz^n| = |1 + z + \cdots + z^{n-1}| \leqslant 1 + |z| + |z|^2 + \cdots + |z|^{n-1} < 1 + (n-1)|z|^n$$

ja que $|z|^r < |z|^n$ si $r < n$. Llavors $n|z|^n < 1 + (n-1)|z|^n$, això implica que $|z|^n < 1$. Contradicció amb $|z| > 1$. Llavors ha de ser $|z| \leqslant 1$.

2 Funcions de variable complexa

2.1 Funcions

Exercici 2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma* $u(x, y) + iv(x, y)$.

a) $f(z) = 1/z$, *b)* $g(z) = \dfrac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$, *c)* $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◁

Solució:

a) $x/(x^2 + y^2) - iy/(x^2 + y^2))$. c) $2(\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y)$.

b) $\dfrac{2\,x^2 - 2\,y^2 + 3}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + i\dfrac{4\,xy}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$.

Exercici 2.1.2. *Trobeu el rang de*

a) $f(z) = z^2$ *si* z *està en el primer quadrant,*

b) $g(z) = 1/z$ *per* $0 < |z| \leqslant 1$,

c) $h(z) = -2z^3$ *per* z *tal que* $0 < |z| < 1$ *i* $\mathrm{Arg} z < \pi/2$. ◁

Solució:

a) el semiplà superior, b) $\{z : |z| \geqslant 1\}$, c) $\{z : 0 < |z| < 2\}$.

Exercici 2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\dfrac{1}{z - 2 + 3i}$, *c)* $\dfrac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$,

b) $\dfrac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, *d)* $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$. ◁

Solució: a) $\mathbb{C}\backslash\{2 - 3i\}$, b) $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, c) $\mathbb{C}\backslash\{-1/2 \pm i\sqrt{15}/2\}$, d) $\mathbb{C}\backslash\{1, 1/2\}$.

Exercici 2.1.4. *Proveu que la inversió* $w = f(z) = 1/z$ *transforma*

a) el cercle $|z| = r$ *en el cercle* $|w| = 1/r$, *b) el raig* $\mathrm{Arg}z = \theta_0, -\pi < \theta_0 < \pi$, *en el raig* $\mathrm{Arg}w = -\theta_0$,

c) el cercle $|z-1| = 1$ *a la línia vertical* $x = 1/2$. ◃

Solució:

a) Si $|z| = r$ llavors $|1/z| = 1/r$,

b) Si $z = re^{i\theta_0}$ amb $r > 0$ llavors $w = (1/r)e^{-i\theta_0}$ i l'afirmació és clara.

c) Si $|z-1| = 1$ llavors $z = 1 + e^{it} = 1 + \cos t + i \sin t$ i

$$w = 1/z = \frac{1 + \cos t - i \sin t}{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{1 + \cos t - i \sin t}{2 + 2\cos t}$$

té part real igual a 1/2. Estudiant els límits laterals, per exemple, o bé trobant-ne la inversa, podem comprovar que és exhaustiva en aquesta recta.

Exercici 2.1.5. *Trobeu una funció afí que transformi el cercle* $|z| < 1$ *en el cercle* $|w - w_0| < R$ *de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle* α *amb l'eix real.* ◃

Solució: Volem trobar $f(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}$ de manera que $f(0) = w_0$, $f(e^{it}) = w_0 + Re^{i(t+\alpha)}$. Llavors $b = w_0$ i $a = Re^{i\alpha}$ i

$$f(z) = Re^{i\alpha} z + w_0.$$

Exercici 2.1.6. *Per l'exponencial* $f(z) = e^z$*:*

a) Descriviu-ne el domini i el rang.

b) Proveu que $f(-z) = 1/f(z)$.

c) Descriviu la imatge de $\mathrm{Re}\, z = 1$.

d) Descriviu la imatge de $\mathrm{Im}\, z = \pi/4$.

e) Descriviu la imatge de la banda $0 \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant \pi/4$. ◃

Solució:

a) Domini és $\mathbb{C}$ i rang és $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

b) $f(-z) = e^{-z} = 1/e^z = 1/f(z)$.

c) $\{e^{1+iy} = e(\cos y + i \sin y), y \in \mathbb{R}\}$ és la circumferència de radi e centrada a l'orígen de coordenades.

d) $\{e^{x+i\pi/4} = e^x(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2), x \in \mathbb{R}\}$ que és el raig $y = x$ amb $x > 0$.

e) El sector circular amb angle entre 0 i $\pi/4$ al primer quadrant.

Exercici 2.1.7. *L'aplicació de Joukowski és $w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, vegeu la figura 3.6. Proveu que*

a) $J(z) = J(1/z)$,

b) J porta el cercle unitat $|z| = 1$ a l'interval real $[-1, 1]$,

c) J porta el cercle $|z| = r$ ($r > 0, \neq 1$) a l'el·lipse $\dfrac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$ que té els focus a ± 1. ◁

Solució:

a) $J(1/z) = \frac{1}{2}(1/z + \frac{1}{1/(1/z)}) = J(z)$.

b) $J(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos(t) \in [-1, 1]$.

c) Si $J(re^{it}) = u(t) + iv(t)$ és clar que $u(t) = \frac{1}{2}(r + 1/r)\cos(t)$ i $v(t) = \frac{1}{2}(r - 1/r)\sin(t)$. D'aquí deduïm que (u, v) de la imatge de $|z| = r$ satisfan l'equació de l'el·lipse que es dona. Recordem que en una el·lipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ amb $a > b$ els focus estan a $(\pm c, 0)$ amb $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. En el nostre cas $a = \frac{1}{2}(r + 1/r), b = \frac{1}{2}(r - 1/r)$ i $c = 1$.

Exercici 2.1.8. *Fent servir la comanda* `contour_plot` *de* `Sage` *dibuixeu les corbes de nivell de u i v si $f = u + iv$ és*

a) z,

b) z^2,

c) $\log(z)$,

d) $\sin(z)$,

e) $1/z$,

f) $1/z^2$,

g) e^z,

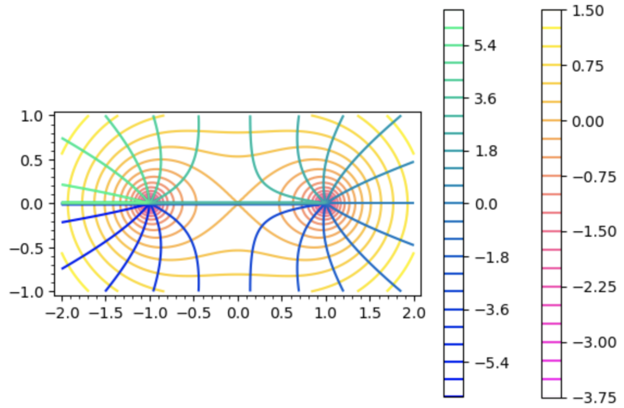
h) $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}$,

i) $\log(z - 1) + \log(z + 1)$. ◁

Solució: Pel cas i) podem fer com es veu a la figura annexa

In [35]:
```
var('x,y',domain='real')
z=x+i*y
f=log(z+1)+log(z-1)
g(x,y)=f.imag_part()
h(x,y)=f.real_part()
v=contour_plot(lambda x,y: g(x,y), (x,-2,2), (y,-1,1), cmap='winter',contours=20, fill=False, colorbar=True)
u=contour_plot(lambda x,y: h(x,y), (x,-2,2), (y,-1,1), cmap='spring',contours=20, fill=False, colorbar=True)
u+v
```

Out[35]:



Els altres són encara més senzills.

2.2 Funcions multivaluades

Exercici 2.2.1. *Donada l'equació de Cardano $z^3 + pz + q = 0$, comprova que si $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$, aleshores $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.*

Tot seguit obre GeoGebra[1] *i dibuixa els punts $p = 1+i$ i $q = 2+0i$; defineix $w = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, C mitjançant la fórmula anterior, i $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ i $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$. Escull tres colors diferents per z_j, i activa la seva traça. Deixant q fixat i movent p, per exemple, comprova que els tres punts són funció de p, i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que C presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres z_j vagin permutant la seva posició. Per exemple, pots fixar p en la circumferència de radi 4 amb la instrucció `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))`i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Pots usar també la instrucció `lloc geomètric`. Quantes voltes cal que faci p a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua?* ◁

Solució:

$$z_1^3 + pz_1 + q = (C - \frac{p}{3C})^3 + p(C - \frac{p}{3C}) + q.$$

Notem que

$$(C - \frac{p}{3C})^3 = C^3 - pC + \frac{p^2}{3C} - \frac{p^3}{27C^3}.$$

[1] o entra a `https://www.geogebra.org/m/jbszj89u`

Per tant,

$$z_1^3 + pz_1 + q = C^3 - \frac{p^3}{27C^3} + q = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{p^3}{27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + q.$$

Notem ara que

$$\frac{p^3}{27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} = \frac{p^3\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}{27\left(\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

2.3 Logaritmes i arguments

Exercici 2.3.1. *Doneu exemples que mostrin la falsedat de la igualtat* $\operatorname{Log}(a\cdot b) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$. *(Per exemple,* $a = b = -1 - i$*).* ◁

Solució: $\operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b) = 2\operatorname{Log}(-1-i) = 2(\ln(\sqrt{2}) - i3\pi/4)) = \ln 2 - i3\pi/2$ i $\operatorname{Log}((-1-i)(-1-i)) = \operatorname{Log}(2i) = \ln 2 + i\pi/2$ que són diferents.

Exercici 2.3.2. *Sigui* $\mathcal{L}$ *una determinació del logaritme en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. *Proveu que la funció* $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ *és contínua en*

$$D := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$*?* ◁

Solució: Notem que $D+3 = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Per tant, f és contínua. A més sabem que $\mathcal{L} = \operatorname{Log} + 2k\pi i$. Com que $0 = \operatorname{Log}(1) = \mathcal{L}(1) - 2k\pi i = 2\pi i - 2k\pi i$, trobem $k = 1$. I per tant,

$$f(3i) = \mathcal{L}(3i+3) = \operatorname{Log}(3i+3) + 2\pi i = \ln|3i+3| + (\operatorname{Arg}(3i+3) + 2\pi)i = \ln(3\sqrt{2}) + \frac{9\pi}{4}i.$$

Exercici 2.3.3. *Una branca de l'argument* $\mathcal{A}(z)$ *(o del logaritme* $\mathcal{L}(z)$*) queda fixada si donem i) el domini* Ω *on està definida ii) el valor de* $\mathcal{A}(z)$ *(o de* $\mathcal{L}(z)$*) d'un punt d'*Ω*. Conside reu els dominis:*

$$\Omega_1 = \mathbb{C}\backslash\left\{re^{i\pi},\ r \geqslant 0\right\}; \qquad \Omega_2 = \mathbb{C}\backslash\left\{re^{i\pi/4},\ r \geqslant 0\right\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C}\backslash\left(\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy,\ y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i,\ x \in [-1, \infty)\}\right).$$

Completeu la següent taula.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$ $\mathcal{L}(2i) =$

◁

Solució: Fila 1: $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}i \mid \frac{-3\pi}{2}; \frac{-3\pi}{2}i \mid \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}i; \frac{-3\pi}{2}i + \ln 2$. Fila 2: restar a tot 2π. Fila 3: $-2\pi; -2\pi i \mid 0; 0 \mid -2\pi; -2\pi i; \frac{-7\pi}{2}i + \ln 2$.

Exercici 2.3.4. *Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:*

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$, *b)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > \text{Im } z\}$, *c)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. ◁

Solució: a) Sí, $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, per tant $f_k(z) = \text{Log}\,(z) + 2k\pi i$ és una determinació amb $f_k(\Omega) = \{x + iy : y - 2k\pi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ per algun $k \in \mathbb{Z}$ fixat.

b) Sí, $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, per tant per algun $k \in \mathbb{Z}$ fixat, definim $f_k(z) = \text{Log}\,(z) + 2k\pi i$, que és una determinació amb $f_k(\Omega) = \{x + iy : y \in (-3\pi/4 + 2k\pi, \pi/4 + 2k\pi)\}$.

c) No. Si existís, existiria una branca contínua de l'argument $\mathcal{A} : D_2(0)\backslash\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$. Aleshores $f(z) = \mathcal{A}(3z/2)$ serà una determinació en $\partial\mathbb{D}$, però no n'existeix cap per la proposició 2.15.

Exercici 2.3.5. *Calculeu els possibles valors de*

a) $\log(1)$, *b)* $\log(-1)$, *c)* $\log(1 + i)$, *d)* $\log(1 - i\sqrt{3})$, *e)* $\log(i)$. ◁

Solució: (a) $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (b) $(2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (c) $\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; (d) $\ln 2 + i(5\pi/3 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; (e) $(\pi/2 + 2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}$.

Exercici 2.3.6. *Escrivim* $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ *i* $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. *Resoleu les equacions*

a) $e^z = 2i$, *c)* $e^{2z} + e^z + 1 = 0$, *e)* $\cos z = \sin z$.

b) $\text{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$, *d)* $\cos z = 2i$,

Solució: a) $z \in \log(2i)$ és a dir $z \in \{\ln(2) + i\pi/2 + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$

b) Escrivim $w = z^2 - 1$. Trobem que $w = e^{i\pi/2} = i$. Per tant, $z^2 - 1 = i$, i $z = \pm\sqrt{1+i} = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

c) Posem $e^z = t$ llavors t és una arrel tercera de la unitat que no és 1, és a dir $t = e^{\pm i2\pi/3}$. Llavors $z \in \{i(2\pi/3 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i(-2\pi/3 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$

d) Posem $w = e^{iz}$, resolem l'equació de segon grau que obtenim i resulta $w = (2 \pm \sqrt{5})i$. Per tant, $z = \pi/2 + 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{5})$, i $z = -\pi/2 + 2k\pi - i\ln(\sqrt{5}-2)$. Tot plegat, queda

$$z = \pm(\pi/2 + 2k\pi + i\ln(\sqrt{5}-2)), \quad \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

e) Procedim com en el cas anterior i tenim que

$$z \in \{\pi/4 + 2k\pi, 3\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.4 Potències complexes

Exercici 2.4.1. *Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli:* $(-z)^2 = z^2$*, llavors* $2\log(-z) = 2\log z$*. Per tant,* $\log(-z) = \log(z)$*.* ◁

Solució: Recordem que $\log(z) = \{\ln r + i(\theta + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ on $z = re^{i\theta}$. És a dir, $\log(z)$ és un conjunt de valors, és multivaluada. Recordem també que e^z és $2\pi i$ periòdica. Llavors

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow e^{2\log(-z)} = e^{2\log(z)} \Rightarrow 2\log(-z) - 2\log(z) = 2k\pi i \Rightarrow \log(-z) - \log(z) = k\pi i.$$

Els arguments de z i de $-z$ (que són oposats) difereixen en un múltiple senar de π. Si considerem els arguments principals

$$|\mathrm{Arg}(-z) - \mathrm{Arg}(z)| = k\pi, \quad |\mathrm{Arg}(-z) - \mathrm{Arg}(z)| < 2\pi$$

llavors difereixen en π. La conclusió correcta doncs, en termes de funcions multivaluades, és $\log(-z) = \log(z) + \pi i$.

Exercici 2.4.2. *Calculeu els possibles valors de*

a) i^i, *b)* $(\sqrt{3}+i)^{1-i}$, *c)* 2^{-i}, *d)* $(i^2)^i$, *e)* $(i^i)^2$. ◁

Solució: (a) $\exp(-(\pi/2+2k\pi)), k \in \mathbb{Z}$; (b) $\exp\left(\ln 2 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \ln 2)\right), k \in \mathbb{Z}$; (c) $e^{2k\pi}e^{-i\ln 2}, k \in \mathbb{Z}$; (d) $e^{\pi(1+2k)}, k \in \mathbb{Z}$. (e) $e^{\pi(-1+4k)}, k \in \mathbb{Z}$.

Exercici 2.4.3. *Determinar explícitament la inversa de* $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ *en funció de logaritmes. Resoldre* $q(z) = 3$*, trobant totes les solucions.*

Solució: Si $t = e^z$ cal resoldre l'equació $t^2 + 2t - w = 0$ d'on

$$e^z = -1 + \sqrt{1+w},$$

on usem $\sqrt{\ }$ per la funció multivaluada arrel quadrada. Apliquem logaritmes i obtenim

$$q^{-1}(w) = \log(-1 + \sqrt{1+w}) = \operatorname{Log}(-1 \pm e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+w)}) + 2k\pi i$$

que és una funció multivaluada.

- Per la branca positiva de l'arrel tenim que
$$q^{-1}(3) = \log(-1+2) = \log(1) = \{2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$
- Per la branca negativa
$$q^{-1}(3) = \log(-1-2) = \log(-3) = \{\ln(3) + i(\pi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercici 2.4.4. *Siguin $h_0(z), h_1(z)$ i $h_2(z)$ les determinacions de l'arrel cúbica en $\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ tal que $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ i $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.*

i) Descriviu $h_j(\Omega)$ per $j = 0, 1, 2$.

ii) Per $j = 0, 1, 2$ relacioneu h_j amb Log *i* Arg *(on* Log *i* Arg *denoten les branques principals del logaritme i de l'argument respectivament).*

iii) Usant les relacions anterior, trobeu el valor de $h_j(i)$, per $j = 0, 1, 2$. ◁

Solució: Tenim que $h_j(z)^n = z = e^{x+iy+2k\pi i}$ per tot $z \in \Omega$, on fixem $y = \operatorname{Arg} z$. Si escrivim les parts real i imaginària del logaritme tindrem

$$h_j(z) = e^{u+iv}$$

amb $nu = x$ i $nv = y + 2k\pi$. Per tant,

$$u = \frac{x}{n} \qquad v = \frac{y+2k\pi}{n}.$$

Traient-ne mòdul i argument tenim que

$$|h_j(z)| = e^{\frac{x}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \qquad \operatorname{Arg}(h_j(z)) = \frac{y+2k\pi}{n} = \frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Responem ara les preguntes:

i) Trobem imposant que $e^{2\pi j i/3} \in h_j(\Omega)$, que

$$h_0(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi/3, \pi/3)\},$$
$$h_1(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg}(z) \in (\pi/3, \pi)\},$$
$$h_2(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, -\pi/3)\}.$$

ii) En tenir $n = 3$ trobem

$$\operatorname{Arg}(h_j(z)) = \frac{\operatorname{Arg}(z)}{3} + \frac{2k_j\pi}{3} \implies k_j = \frac{3\operatorname{Arg}(h_j(z))}{2\pi} - \frac{\operatorname{Arg}(z)}{2\pi}.$$

En el cas $z = 1$,

$$k_0 = \frac{3\operatorname{Arg}(1)}{2\pi} - \frac{\operatorname{Arg}(1)}{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

$$k_1 = \frac{3\operatorname{Arg}(e^{2\pi i/3})}{2\pi} - \frac{\operatorname{Arg}(1)}{2\pi} = 1 - 0 = 1.$$

$$k_2 = \frac{3\operatorname{Arg}(e^{-2\pi i/3})}{2\pi} - \frac{\operatorname{Arg}(1)}{2\pi} = -1 - 0 = -1.$$

Per tant,

$$h_j(z) = |h_j(z)|e^{i\operatorname{Arg}(h_j(z))} = |z|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = e^{\frac{\operatorname{Log}(z)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}}.$$

iii)

$$h_j(i) = |i|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\operatorname{Arg}(i)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ si } j = 0, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ si } j = 1, \\ e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i \text{ si } j = 2. \end{cases}.$$

2.5 Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

Exercici 2.5.1. *Sigui X un espai topològic connex. Demostreu que si $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ són dues determinacions de l'arrel n-èsima de $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ llavors existeix una arrel n-èsima de la unitat ζ tal que $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, per a tot $x \in X$.* ◁

Solució: Sabem que $\mathcal{S}_1(x) \neq 0$ per hipòtesi. Aleshores $\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}$ és contínua, i

$$\left(\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}\right)^n = 1.$$

Com que $\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}$ pren per valors en les arrels de la unitat

$$\left\{1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, \cdots, e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\right\},$$

que és un conjunt finit, necessàriament la funció $\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1$ és constant (la imatge contínua d'un connex és connexa).

Exercici 2.5.2. *Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions e^{z^2}, $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, de la branca principal de $\sqrt{1-z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1+e^z}$.* ◁

Solució:

- e^{z^2} és contínua a $\mathbb{C}$.
- $e^{1/z}$ té domini $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
- $1/e^z$ té domini $\mathbb{C}$, ja que el recorregut de l'exponencial és el domini de $1/z$.
- $1/(e^z-1)$ té domini $\mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z}$.
- $\sqrt{1-z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1-z)}$ té domini de continuïtat $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty)$.
- $\sqrt{1+e^z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+e^z)}$ té domini de continuïtat

$$\mathbb{C}\backslash\{z : e^{\mathrm{Re}\,z} \geqslant 1, \,\mathrm{Im}\,z \in \pi + 2\pi k\} = \mathbb{C}\backslash\{x + i(2k+1)\pi : x \geqslant 0\}.$$

Per aquest cas, notem que cal $1+e^z \notin (-\infty, 0]$, és a dir $e^z \notin (-\infty, -1]$.

Exercici 2.5.3. *Donar una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.*

a) $f_1(z) = (z^2-1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2+4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C}\backslash\{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4-1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3-1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. ◁

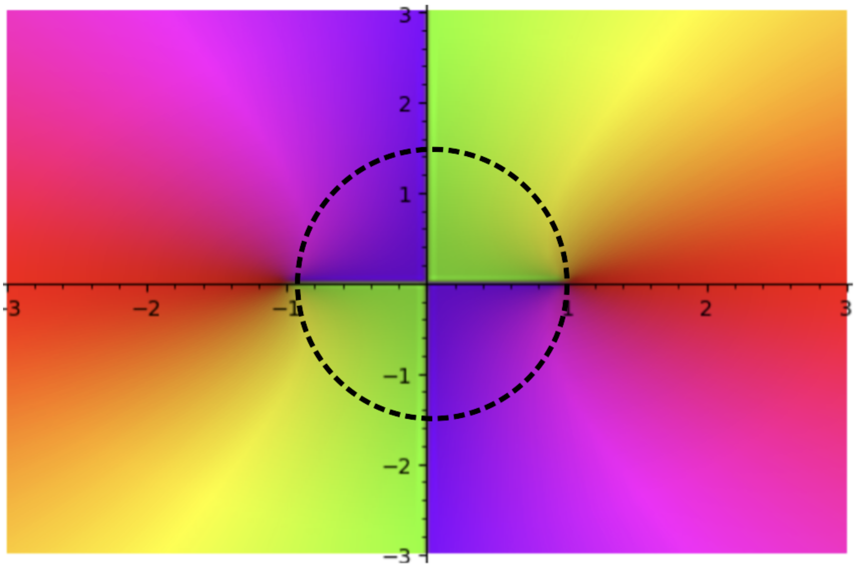
Solució: a) Observem que si considerem la branca principal tenim que

$$(z^2-1)^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2-1)\right)$$

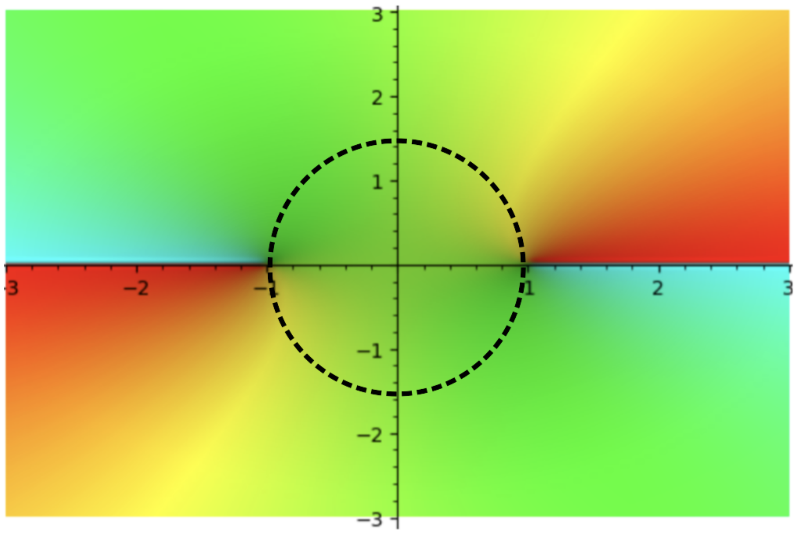
i Log té com a domini d'holomorfia tots els $z \in \mathbb{C}$ excepte els que $z^2 - 1 \leqslant 0$, és a dir cal treure els $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a^2 - b^2 + 2abi \leqslant 1$. Això només pot passar per $ab = 0$. Cas $a = 0$, llavors per a tot bi es compleix. Cas $b = 0$, cal que $a^2 \leqslant 1$. No és la branca que volem ja que en aquest cas

$$D = \mathbb{C}\backslash\left(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z = 0, |\mathrm{Re}\,z| < 1\}\right).$$

Observem abans el que es veu si fem un `complex_plot()`:



Caldrà canviar la branca del logaritme. Podem buscar una branca de l'argument que ens vagi bé però és més fàcil considerar $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{(-1)(1-z^2)} \overset{\text{O.2.21}}{=} i\sqrt{1-z^2} = i\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-z^2))$. Aleshores, traient els z tal que $1-z^2 \leqslant 0$ resulta que el domini és $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{R} : |z| > 1\}$ i aquest domini inclou el disc. Veiem el `complex_plot()` corresponent:



Vegeu també la figura 3.7.

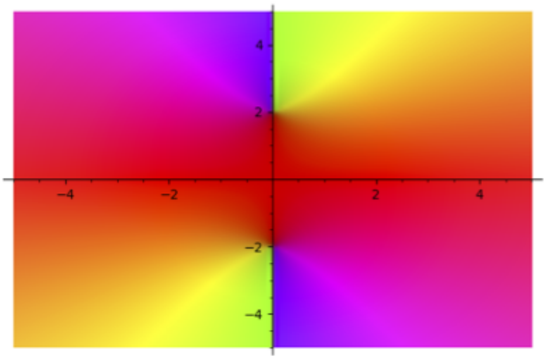
b) Com a funcions multivaluades (o multivalents) tenim que $\sqrt{z^2+4} = z\sqrt{1+4/z^2}$, això vol dir que els conjunts que determinen són iguals. Les branques principals de cada expressió són:

$$\sqrt{z^2+4} = \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(z^2+4)\right), \quad D = \mathbb{C}\backslash\{z^2+4 \leqslant 0\} = \mathbb{C}\backslash\{iy, y \in \mathbb{R} : |y| \geqslant 2\}$$

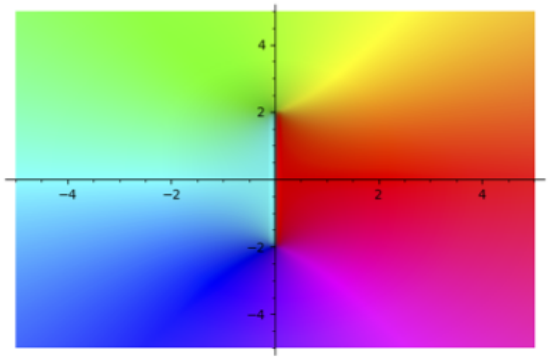
$$z\sqrt{1+4/z^2} = z\exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(1+4/z^2)\right), \quad D = \mathbb{C}\backslash\{1+4/z^2 \leqslant 0\} = \mathbb{C}\backslash\{iy, y \in \mathbb{R} : |y| \leqslant 2\}$$

on Log denota la branca principal del logaritme.

La que ens va bé és la branca principal de la segona expressió. El domini de continuïtat és llavors $\mathbb{C}\backslash\{iy, y \in \mathbb{R} : |y| < 2\}$.



complex_plot(sqrt(x^2+4),(-5,5),(-5,5))



complex_plot(x*sqrt(1+4/x^2),(-5,5),(-5,5))

c) Considerem $f_3(z) = z^2\sqrt{1-1/z^4} = iz^2 f_1(1/z^2)$, d) Similarment podem definir $z\sqrt[3]{1-1/z^3}$.

2.6 Sèries de potències de nombres complexos

Exercici 2.6.1. *Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.*

a) $S(z)$ pot ser divergent en $z=0$ i convergent en $z=-i$ simultàniament

b) $S(z)$ pot ser convergent en $z=1+i$ i en $z=2+i$ simultàniament

c) Si $S(z)$ és convergent en $z=1+i$, aleshores també ho és en $z=2i$

d) Si $S(z)$ és divergent en $z=2i$, aleshores també ho és en $z=2+i$. ◁

Solució: Falsa. Certa. Falsa. Certa.

La darrera, per exemple, es pot justificar així: Si S és divergent en $z=2i$, aleshores el radi de convergència $R \leqslant |2i-i| = 1$. En particular, la sèrie divergeix en tot z tal que $|z-i| > 1$, cosa que se satisfà a $z=2+i$. L'afirmació és, per tant, CERTA.

Exercici 2.6.2. *Sigui* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una sèrie convergent en el disc* $D = D(0,R)$. *Demostreu que*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \qquad si \quad 0 < r < R. \qquad \triangleleft$$

Solució: Prenem una suma parcial $f_N := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Observem que

$$|f_N(re^{i\theta})|^2 = f_N(re^{i\theta})\overline{f_N(re^{i\theta})} = \mathrm{Re}\left(\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{N} \bar{a}_m r^m e^{-im\theta}\Big)\right)$$
$$= \sum_{n,m=0}^{N} r^{n+m}\mathrm{Re}\,(a_n\bar{a}_m e^{i(n-m)\theta}).$$

Integrant, i escrivint $\int u + iv = \int u + i\int v$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} |f_N(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n,m=0}^{N} r^{n+m}\mathrm{Re}\left(a_n\bar{a}_m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

Però tenim que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m, \end{cases}$$

la qual cosa ja dona el resultat si la sèrie és finita.

Per altra banda, com que f_N convergeix uniformement a f en el disc $\overline{D(0,r)}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Exercici 2.6.3. *Sigui* $S_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *i* $S_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. *Demostreu que* S_1 *és convergent en* z *si i només si ho és* S_2. *En cas afirmatiu, tenim que* $S_1(z) = zS_2(z)$.

Solució:

Solució proposada per Clara Valls Moreso:

El cas $z = 0$, és trivialment cert ja que

$$S_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0^n = 0,$$

que és convergent,

$$S_2(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0^{n-1} = a_1,$$

que també és convergent i, per tant, efectivament $S_1(z) = zS_2(z)$ per $z = 0$:

$$S_1(0) = 0 = 0 \cdot a_1 = 0 \cdot S_2(0).$$

Manca estudiar el cas general $z \neq 0$.

$\Rightarrow$ Suposem que $S_1(z)$ és convergent. Per definició, la successió de sumes parcials

$$S_1^{(N)}(z) := \sum_{n=1}^{N} a_n z^n$$

convergeix quan $N \to \infty$.

Observem que

$$S_1^{(N)}(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n = z \sum_{n=1}^{N} a_n z^{n-1} = zS_2^{(N)}(z).$$

Com que $z \neq 0$ obtenim

$$S_2^{(N)}(z) = \frac{S_1^{(N)}(z)}{z}.$$

Prenent límits, com que $S_1(z)$ és convergent i $z \neq 0$, obtenim

$$\lim_{N\to\infty} S_2^{(N)}(z) = \frac{1}{z} \lim_{N\to\infty} S_1^{(N)}(z) = \frac{S_1(z)}{z} < \infty,$$

Així $S_2(z)$ és convergent i a més

$$zS_2(z) = S_1(z).$$

.

$\Leftarrow$ Suposem que $S_2(z)$ és convergent. Per definició la sucessió de sumes parcials,

$$S_2^{(N)}(z) := \sum_{n=1}^{N} a_n z^{n-1}.$$

convergeix quan $N \to \infty$.

Observem que:

$$zS_2^{(N)}(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n = S_1^{(N)}(z).$$

Prenent límits

$$\lim_{N\to\infty} S_1^{(N)}(z) = \lim_{N\to\infty} zS_2^{(N)}(z) = z \lim_{N\to\infty} S_2^{(N)}(z) < \infty.$$

Com que $S_2(z)$ és convergent, també $S_1(z)$ és convergent i

$$S_1(z) = zS_2(z).$$

Així doncs queda provat l'enunciat.

2.7 Càlcul del radi de convergència

Exercici 2.7.1. *Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències* *a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n; \quad \alpha \in \mathbb{R},$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n},$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}(z-1)^n,$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}(z+1)^n \ \ a \in (0,1),$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}},$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}(z-2)^{n(n+1)},$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n},$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3z-2)^n,$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^{2^n}.$ ◁

Solució: Els discs on hi ha convergència absoluta i uniforme en compactes són: (a) $D(0,1)$; (b) $D(0,e/4)$; (c) $D(-i,1)$; (d) $D(1,2e)$; (e) $\mathbb{C}$; (f) $D(0,1/2)$; (g) $D(2,1)$; (h) $D(0,2)$; (i) $D(2/3,1/3)$; (j) $D(0,1)$.

Per exemple, fem i) i j).

(i) Escrivim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3z-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n n^2 \left(z-\frac{2}{3}\right)^n$, així que definim $a_n := 3^n n^2$.

Calculem

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{n^2 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 3.$$

Per tant, pel criteri del quocient, el radi de convergència és $1/3$. Tenim doncs convergència al disc $D(2/3,1/3)$. En compactes la convergència serà uniforme.

(j) Tenim que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^{2^n}$. Notem que el coeficient s'anul·la per $n = 2k+1$. És a dir que $a_j = 0$ si $j \neq 4^k$, i $a_j = 4^k = j$ si $j = 4^k$. Aleshores

$$\limsup_j \sqrt[j]{|a_j|} = \limsup_k \sqrt[4^k]{|a_{4^k}|} = \limsup_{j=4^k} \sqrt[j]{j}$$

Com que aquest límit existeix, podem substituir límit superior per límit:

$$\lim_j \sqrt[j]{j} = e^{\lim_j \frac{\ln j}{j}} = 1.$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1/1 = 1$, i tenim convergència al disc $D(0,1)$.

2.8 Comportament a la frontera del disc de convergència

Exercici 2.8.1. *Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{3n+1}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. ◁

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}z^n$

Solució: (a) Conv. unif. en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z|=1\}$ que no contingui $z=1$.

(b) Conv. abs. i unif. a $\overline{\mathbb{D}}$ pel criteri M de Weierstrass.

(c) Conv unif. en tot compacte de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $|z|=1$ que no contingui $1, e^{2\pi i/3}$ o $e^{4\pi i/3}$.

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{3n+1}$, podem veure que el radi de convergència és 1. Quan el mòdul és $|z|\leqslant 1$ (la desigualtat estricta no cal, però surt "gratis"), mirem d'aplicar el criteri de Dirichlet:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^{3n+1}\right| = |z|\left|\frac{1-z^{3(N+1)}}{1-z^3}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z^3|}$$

Per tant, si $\operatorname{dist}(z^3,1) > \varepsilon$, aleshores tenim una cota uniforme de les sumes parcials $\sum_{n=0}^{N} z^{3n+1}$ i podem aplicar el criteri de Dirichlet.

Concloem que per tot compacte de $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ hi ha convergència uniforme. En particular, en aquests compactes S és el límit uniforme de polinomis, que són funcions contínues, i és, per tant, contínua a $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ i uniformement contínua en compactes.

(d) Conv. unif. en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z|=1\}$ que no contingui $z=-1$:

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}z^n$, aleshores $S(z) = -T(-z)$, on $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ és la sèrie estudiada a l'apartat (a). Així deduïm que S convergeix uniformement en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z|=1\}$ que no contingui $z=-1$.

(e) Conv unif. en compactes de $D(i,5)$. Divergeix per a tot punt de la frontera del disc:

Estudiem la sèrie $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. Notem que el radi de convergència és 5 i que quan $|z-i|=5$, aleshores el terme general de la sèrie té mòdul $\left|\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}\right| = n$ que no convergeix a zero (condició necessària per la convergèncie d'una sèrie!). Per tant, la sèrie és divergent a tota la circumferència. La convergència és uniforme en compactes de $D(i,5)$.

Exercici 2.8.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel.* Indicació*: Vegeu [BC13, Teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).* ◃

Solució: Deixem el criteri pel lector, i demostrem el teorema d'Abel: Apliquem el criteri d'Abel a $X = A$, $Y = [0,1]$, per sèrie en X prenem $a_n(\zeta - b)^n$, i en Y prenem r^n, i deduïm que $\sum_n a_n r^n (\zeta - b)^n$ convergeix uniformement a $X \times Y$. És a dir que per tot ε existeix n_ε tal que $m, n > n_\varepsilon$, $\zeta \in A$, $r \in [0,1]$, trobem

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k r^k (\zeta - b)^k \right| < \varepsilon.$$

Si $z \in C(A, b)$, aleshores existeixen $\zeta \in A$ i $r \in Y$ tal que $z = b + r(\zeta - b)$. Deduïm que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k (z - b)^k \right| = \left| \sum_{k=n}^{m} a_k r^k (\zeta - b)^k \right| < \varepsilon,$$

que és la condició de convergència uniforme en $C(A, b)$.

Per veure l'intercanvi de límits, n'hi ha prou amb establir la continuïtat del límit. Notem que $\sum_{k=0}^{n} a_k (z - b)^k$ és contínua en $\mathbb{C}$ i, per tant, en el con. La convergència uniforme de funcions contínues implica que el límit és continu: per la desigualtat triangular, per tot n tenim que

$$|f(z) - f(w)| \leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)|;$$

per la convergència uniforme, si $\varepsilon > 0$ existeix n tal que $\sup_z |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$; i per la continuïtat de f_n existeix δ tal que $|z - w| < \delta$ implica $|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Per tant,

$$|f(z) - f(w)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon. \qquad \square$$

3 Derivació complexa i holomorfia

3.1 Funcions holomorfes

Exercici 3.1.1. *a) Demostreu la regla del producte per la derivació.*

b) Proveu que si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0, llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on $\lambda(z) \to 0$ si $z \to z_0$. ◁

Solució:

a)

$$\begin{aligned}&\frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z}\\ &\qquad = \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z+\Delta z)g(z) + f(z+\Delta z)g(z) - f(z)g(z)}{\Delta z},\end{aligned}$$

prenem factor comú, passem al límit i obtenim $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ que és la fórmula per la derivada.

b) Volem veure que $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ quan f és derivable en z_0. Tenim que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \neq \infty.$$

Com que el denominador tendeix a zero cal que el numerador també tendeixi a zero llavors queda provada la continuïtat.

c) Escrivim

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + \left(\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0}\right) =: f'(z_0) + \lambda(z).$$

És clar que $\lambda(z) \to 0$ si $z \to z_0$ i hem provat l'enunciat.

Exercici 3.1.2. *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:*

a) $f(z)^3$, *c)* $f(z)/g(z)$, *e)* $f(1/z)$,

b) $f(z)g(z)$, *d)* $5f(z)+ig(z)$, *f)* $f(g(z))$.

Solució: Totes són enteres excepte el cas c) quan $g(z)=0$ i e) quan $z=0$.

Exercici 3.1.3. *Proveu que $g(z)=3x^2+2x-3y^2-1+i(6xy+2y)$ és entera. Escriviu g com a funció de z.*[1] ◁

Solució: Si posem $x=1/2(z+\bar{z})$ i $y=1/(2i)(z-\bar{z})$ veiem que $f(z)=3z^2+2z-1$ que és un polinomi. Es pot fer més fàcilment amb la indicació del peu de pàgina:

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0)=3z^2+2z-3\cdot 0^2-1+i(6x\cdot 0+2\cdot 0)=3z^2+2z-1.$$

Exercici 3.1.4. *Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que per a tot $n=2,3,\ldots$*

a) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$? *c)* $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{\ln(n+1)}$?

b) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$? *d)* $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{n}{n+1}$? ◁

Solució: (a) No existeix; (b) Sí, per exemple $f(z)=z^2$; (c) No existeix; (d) Sí, per exemple $f(z)=1/(1+z)$.

Fem el primer amb detall, el tercer és semblant: Notem que, en cas d'existir una tal funció f holomorfa, aquesta serà en particular contínua a l'origen. Així, necessàriament haurem de tenir

$$f(0)=f(\lim_{n\to\infty}1/n)=\lim_{n\to\infty}f(1/n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0.$$

Si és holomorfa, haurà d'existir el límit

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}.$$

En particular tindrem que aquest límit s'assoleix si ens acostem a l'origen pels reals positius i pels reals negatius. Més concretament tindrem

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(1/n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

i, a la vegada

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(-1/n)}{-1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

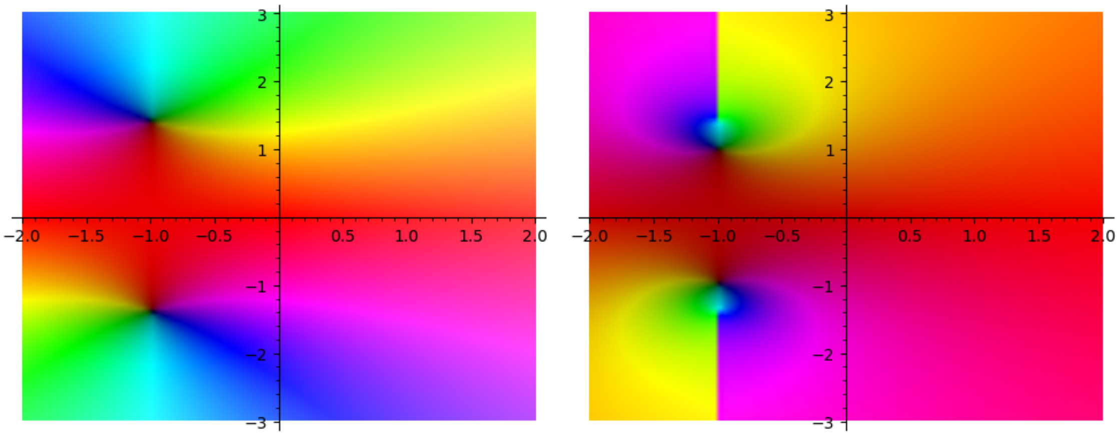
Com que $1/2\neq -1/2$, hem arribat a una contradicció i f no pot existir.

[1] Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ és holomorfa en un domini Ω que talla la recta real i u, v són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que $f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$, vegeu l'exercici 4.10.10.

Exercici 3.1.5. *Doneu una branca de* $\log(z^2 + 2z + 3)$ *que sigui holomorfa a* $z = -1$. *Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit?* $\triangleleft$

Solució: Com que $(-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$, en un entorn de -1 serem lluny dels reals negatius i, per tant, podem escollir $\operatorname{Log}(z^2 + 2z + 3)$, per exemple.

Veiem que el polinomi $p(z) = z^2 + 2z + 3 = (z + 1)^2 + 2 \in \mathbb{R}$ si i només si $z + 1 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ i que concretament $p(z) = (z + 1)^2 + 2$ s'anul·la a $-1 \pm \sqrt{2}i$. A partir d'aquests punts es veurà el que hem de podar per continuïtat (teorema de Bolzano). Com que a $z = -1$ el valor és positiu, deduim que el mateix passarà a $\mathbb{R}$ i a $-1 + i(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$. Comprovant que a $z = -1 \pm 4i$ la imatge és negativa, concloem que p és negatiu a $-1 + i(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})^c$. Per tant, el domini és $\mathbb{C} \setminus \{-1 + it, |t| \geqslant \sqrt{2}\}$. Podem veure el fenòmen fent `complex_plot()` (a l'esquerra $z^2 + 2z + 3$ a la dreta el seu logaritme).



Exercici 3.1.6. *Sigui* f *una funció holomorfa en un obert* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *que satisfà* $|f(z) - i| < 1$ *per a tot* $z \in \Omega$. *Demostreu que la funció* g *definida per*

$$g(z) = \frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)}$$

té logaritme holomorf en Ω. $\triangleleft$

Solució: Primer observem que la hipòtesi implica que $1 + i - f(z) \neq 0$ per $z \in \Omega$, així que g és holomorfa en Ω ja que f ho és. Si posem $w = f(z) - i$, la hipòtesi ens diu que $|w| < 1$. Observem que

$$\frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)} = \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Ara, tenim que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + w}{1 - w} + \frac{1 + \overline{w}}{1 - \overline{w}}\right) = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2}$$

Així doncs,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) > 0 \qquad \text{si } |w| < 1.$$

Per tant,

$$g(\Omega) \subset \{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\} \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$$

regió on el logaritme principal és holomorfa. Aleshores la funció

$$h(z) = \mathrm{Log}(g(z)), \qquad z \in \Omega$$

és un logaritme holomorf de g en Ω.

Exercici 3.1.7. *Sigui $f(z) = z^3 + 1$ i $z_1 = (-1+\sqrt{3}i)/2, z_2 = (-1-\sqrt{3}i)/2$. Provar que no existeix cap punt w en el segment que uneix z_1 i z_2 de manera que $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$. Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes?* ◁

Solució: Tenim que z_1 i z_2 són arrels terceres de la unitat llavors $f(z_2) - f(z_1) = z_2^3 - z_1^3 = 1-1 = 0$. Volem saber si hi ha $w \in \overline{z_1 z_2}$ de manera que $0 = 3w^2(z_2-z_1) = 3w^2(-\sqrt{3}i)$. Però això només passa si $w = 0$ que no pertany al segment entre z_1 i z_2. Llavors el teorema del valor mitjà tal com es coneix per les funcions reals no és cert en el cas complex.

3.2 Les equacions de Cauchy-Riemann

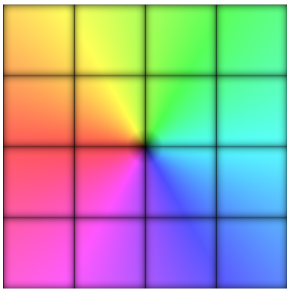
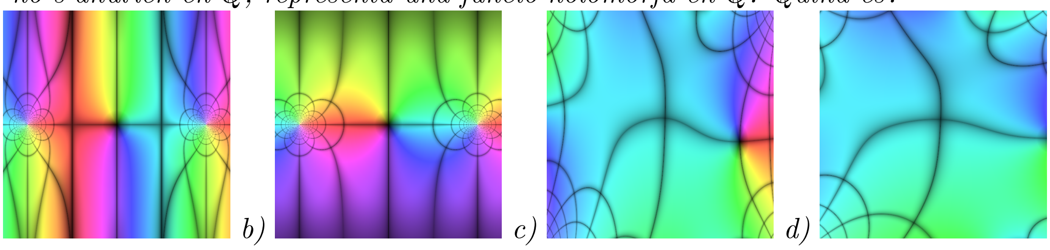


Figura 3.1: Graella en el pla complex entre $-2-2i$ i $2+2i$.

Exercici 3.2.1. *Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat $Q = \{x+iy : x, y \in (-2,2)\}$ és la primera imatge de la figura 3.1. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en Q, representa una funció holomorfa en Q. Quina és?*



a) *b)* *c)* *d)* ◁

Solució: És la d).

La primera no ho pot ser ja que té les preimatges de la graella ortogonal tallen en angles que no són rectes. També podem observar que hi ha punts on la funció no és contínua (el seu mòdul va a infinit), i que canvia l'orientació.

La segona la descartem per la presència de singularitats també: Hi ha dos punts del quadrat on la funció no està definida (el seu mòdul va a infinit). De fet es tracta de la tangent complexa, i els punts són $\pm\pi/2$.

La tercera no ho pot ser ja que les preimatges de la graella ortogonal tallen en angles que no són rectes.

Ha de ser la quarta.

Exercici 3.2.2. *Trobar els valors de les constants a, b, c de manera que $f(z)$ sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z.*

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$. ◁

Solució: Demanem que es compleixin les equacions de Cauchy-Riemann. Llavors a) $c = 1$ i $a = -b$ i $f(z) = (1 - ia)z$. b) Veiem que $a = b = -1$ per Cauchy-Riemann i $f(z) = \cos(z) + i \sin(z)$.

Exercici 3.2.3. *Sigui $f = u + iv$ holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques (una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i el seu* laplacià $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$.*)* ◁

Solució: Usant les equacions de Cauchy-Riemann i el teorema de les derivades creuades de Schwarz, $u_{xx} \overset{\text{CR}}{=} v_{yx} = v_{xy} \overset{\text{CR}}{=} -u_{yy}$, llavors $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i u és harmònica. Amb v podem fer el mateix.

Exercici 3.2.4. *Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$*

a) Provar que u és harmònica.

b) Trobar una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobar una expressió compacta de $f(z)$. ◁

Solució: a) Comprovem que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ és feixuc però elemental (podeu fer servir `Sage`). b) Resolem l'equació $v_y = u_x = e^{-x}(y \cos y - (x - 1) \sin y)$ respecte de y i trobem que $v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + C(x)$. Fent servir l'altra equació de Cauchy-Riemann veiem que $C = \text{ct.} \in \mathbb{R}$ i

$$v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + C.$$

c) Fem servir que el candidat natural és $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, i obtenim $f(z) = ize^{-z} + iC$.

Exercici 3.2.5. *Trobar els polinomis harmònics de la forma* $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. *Trobar la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent.* ◁

Solució: Si imposem la condició de ser harmònica (veure un exercici anterior) veiem que $c = -3a$ i $b = -3d$. Llavors per que el polinomi de l'enunciat sigui harmònic ha de ser $u = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$. Ara volem trobar v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa, cal que $v_x = -u_y$ i $v_y = u_x$. De la segona equació obtenim que $v = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + C(x)$. Imposant ara la primera equació veiem que $C(x) = dx^3 + K$ on K és una constant d'integració. Llavors ja tenim una f (que no és única). Es veu fàcilment que $f(z) = (a + id)z^3 + iK, K \in \mathbb{R}$ (feu servir el truc de l'apartat c de l'exercici anterior, per exemple).

Exercici 3.2.6. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un domini (és a dir, un obert connex) i* f *una funció holomorfa en* Ω.

1. *Proveu que si* f *només pren valors imaginaris purs, aleshores* f *és constant.*
2. *Proveu que si* $|f|$ *és constant, aleshores* f *també és constant. Equivalentment si* f *només pren valors en una circumferència, llavors* f *és constant.* ◁

Solució: *Solució del primer apartat proposada per Clara Valls Moreso*: Suposem que $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ és una funció holomorfa tal que per a tot $z \in \Omega$, $f(z) \in i\mathbb{R}$. Això vol dir que la part real de f és nul·la.

Escrivim $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, on $u(x, y) = 0$ per a tot $(x, y) \in \Omega$.

Com que f és holomorfa, les parts real i imaginària verifiquen les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Però com que $u \equiv 0$, tenim que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

i per tant,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Això implica que v és constant en Ω, ja que Ω és connex (vegeu la proposició 3.14).

Demostrem el segon apartat: Suposem primer que $|f| \equiv 0$. Aleshores efectivament $f \equiv 0$ és constant.

Si, en canvi $|f| \equiv \widetilde{C} > 0$, aleshores escrivint les parts real i imaginària de f com $f = u + iv$, tenim que

$$u^2 + v^2 \equiv C = \widetilde{C}^2.$$

Derivant l'expressió respecte de les parts real i imaginària, obtenim gràcies a les equacions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0, \\ 2uu_y + 2vv_y = 0, \end{cases} \overset{\text{CR}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} uu_x + vv_x = 0, \\ -uv_x + vu_x = 0, \end{cases}$$

Ara multiplicant la primera equació per u, la segona per v i sumant, obtenim

$$\begin{cases} u^2u_x + uvv_x = 0, \\ -uvv_x + v^2u_x = 0, \end{cases} \implies Cu_x = (u^2+v^2)u_x = 0 \implies u_x = 0.$$

Ara multiplicant la primera equació per v, la segona per u i restant, obtenim

$$\begin{cases} uvu_x + v^2v_x = 0, \\ -u^2v_x + uvu_x = 0, \end{cases} \implies Cv_x = (u^2+v^2)v_x = 0 \implies v_x = 0.$$

Hem vist que $u_x = v_x = 0$ a tot Ω. Per les equacions de Cauchy-Riemann, tenim que la diferencial és 0 a tot Ω. Com que aquest conjunt és connex, deduïm que f és constant.

Exercici 3.2.7. *Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x+iy) = u(x) + iv(x,y)$.* ◁

Solució: Vegem que la solució és $f(z) = \alpha z + \beta$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{C}$.

Com que la part real de f depèn només de x, per les equacions de Cauchy-Riemann, tenim que $0 = u_y = -v_x$. En particular, $v(x,y) = \widetilde{v}(y) + C$. Altra volta per les equacions de Cauchy-Riemann deduïm que $u_x = v_y$ i, per tant, $u_x = \widetilde{v}_y$.

Prenem x_0 fixat. Aleshores

$$\widetilde{v}_y(y) = v_y(x_0, y) = u_x(x_0),$$

és a dir que $\widetilde{v}_y$ és una funció constant d'una variable real. Per tant, $\widetilde{v}(y) = Cy + D$, amb $C = u_x(x_0)$ i $D \in \mathbb{R}$.

Prenem ara y_0 fixat. Aleshores

$$u_x(x) = v_y(x, y_0) = \widetilde{v}_y(y_0) = v_y(x_0, y_0) = u_x(x_0),$$

és a dir que u_x és una funció constant d'una variable real. Per tant, $u(x) = Ax + B$, amb $A = u_x(x_0)$ i $B \in \mathbb{R}$.

Tot plegat,

$$f(x,y) = Ax + B + i(Cy + D) = u_x(x_0)(x + iy) + B + iD.$$

Dit d'una altra manera,

$$f(x,y) = \alpha z + \beta, \qquad \text{on } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ i } \beta \in \mathbb{C}.$$

Exercici 3.2.8. *(a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals*

$$v_\lambda(x,y) = 2\sin x \sinh y + x^3 - \lambda xy^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ.

(b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i\frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ? ◁

Solució: (a) $\lambda = 3$ i $f_3 = u_3 + iv_3$ amb $u_3(x,y) = -2\cos x \cosh y - 3x^2y + x + y^3 + C$, on $C \in \mathbb{R}$; (b) g_λ és entera i $ig_\lambda(z) = f'_\lambda(z)$.

Exercici 3.2.9. *Decidiu on no són holomorfes les funcions següents*

a) $\dfrac{1}{z-2+3i}$, *b)* $\dfrac{iz^3+2z}{z^2+1}$, *c)* $\dfrac{3z-1}{z^2+z+4}$, *d)* $\dfrac{z^2}{(2z^2-3z+1)^2}$. ◁

Solució:

a) $\mathbb{C}\backslash\{2-3i\}$, b) $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, c) $\mathbb{C}\backslash\{-1/2 \pm i\sqrt{15}/2\}$, d) $\mathbb{C}\backslash\{1, 1/2\}$.

Exercici 3.2.10. *Provar que $|z|^2$ és $\mathbb{C}$-derivable en $z=0$ però enlloc més.* ◁

Solució: Fora de zero no es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann però $\lim_{z\to 0} |z|^2/z = \lim_{z\to 0} \bar{z} = 0$ i és diferenciable al 0.

Alternativa: A la següent secció veurem que $f(z) = z\bar{z}$ implica que $\bar{\partial} f(z) = z$ i per tant $\bar{\partial} f(z) = 0$ si i només si $z = 0$.

Exercici 3.2.11. *Sigui*

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & si\ z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0. \end{cases}.$$

Demostreu que

a) $f(z)$ satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt $z \in \mathbb{C}$.

b) f no és contínua al 0 i per tant f no és holomorfa a un entorn del 0. ◁

Solució: Podem fer el càlcul i la comprovació de que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann amb `Sage`. Fem-ho a mà i comprovem que $f_x + if_y = 0$, que equival a les equacions de Cauchy-Riemann. Tenim que

$$f_x(z) = e^{-1/z^4}\left(\frac{-1}{z^4}\right)_x = e^{-1/z^4}\left(\frac{4z^3 z_x}{z^8}\right) = 4e^{-1/z^4}\frac{1}{z^5}.$$

Anàlogament $f_y(z) = 4e^{-1/z^4}\dfrac{i}{z^5}$. Llavors $f_x + if_y = 0$ i es compleixen les equacions. No obstant si ens acostem a 0 seguint l'eix de les x el límit és 0 i si ens acostem seguint el raig $\lambda(1+i), \lambda > 0$ el valor de f s'acosta a infinit. Llavors f no és contínua en 0 i no pot ser holomorfa.

Exercici 3.2.12. *Si u i v s'expressen respecte a les coordenades polars (r, θ), proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Indicació*: estudieu el límit incremental seguint* $\arg z = \theta_0$ *i* $|z| = r_0$. ◁

Solució:

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso:

Podem expressar $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en polars fent el canvi $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Aplicant la regla de la cadena tenim que

$$u_r := \frac{\partial u(r\sin\theta, r\cos\theta)}{\partial r} = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta,$$

$$u_\theta := \frac{\partial u(r\sin\theta, r\cos\theta)}{\partial \theta} = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta,$$

on u_x i u_y són les parcials respecte x i y. Notem que per v són les mateixes expressions canviant u_x i u_y per v_x i v_y respectivament.

Assumim que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann. Aleshores,

$$ru_r = ru_x\cos\theta + ru_y\sin\theta \overset{\text{C.R.}}{=} rv_y\cos\theta - rv_x\sin\theta = v_\theta$$

i

$$rv_r = rv_x\cos\theta + rv_y\sin\theta \overset{\text{C.R.}}{=} -ru_y\cos\theta + ru_x\sin\theta = -u_\theta.$$

Hem arribat a les relacions de l'enunciat.

Recíprocament, si es compleix la relació de l'enunciat, escrivint $s_\theta := \sin\theta$ i $c_\theta := \cos\theta$,

$$\begin{cases} ru_r = v_\theta \\ rv_r = -u_\theta \end{cases} \iff \begin{cases} u_x c_\theta + u_y s_\theta = v_y c_\theta - v_x s_\theta \\ v_x c_\theta + v_y s_\theta = u_x s_\theta - u_y c_\theta. \end{cases}$$

Multiplicant la primera equació per s_θ i la segona per c_θ i sumant-les ens queda $u_y = -v_x$. Finalment, multiplicant la primera per c_θ i la segona per $-s_\theta$ i sumant-les, ens queda $u_x = v_y$. En resum, tenim que

$$\text{(C.R.)}\colon \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Exercici 3.2.13. *Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:*

a) $w = z^2$;

b) $w = z^2 + 2z$;

c) $w = \frac{1}{z}$;

d) $w = e^z$;

e) $w = \log(z-1)$. ◃

Solució: a) $|w'| = 2|z| < 1$ si i només si $|z| < 1/2$ és la zona on es contreu, si $|z| > 1/2$ s'expandeix. b) $|w'| = |2z+2| < 1$ si i només si la distància a -1 és menor que $1/2$, es contreu en el disc de radi $1/2$ al voltant de -1. c) Es contreu si $|z| > 1$. d) $|w'| = e^x$, si $x > 0$ expansió, si $x < 0$ contracció. e) $|w'| = |1/(z-1)| < 1$ fora del disc de radi 1 al voltant de 1, és on es contreu. La zona de dilatació és a l'interior d'aquest. Cal treure en els dos casos la branca que no és del domini de $\log(z-1)$, és la branca $\{x \leqslant 1, y = 0\}$.

3.3 Càlcul de les derivades

Exercici 3.3.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω. Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^*.* ◃

Solució: Primer argument: Considerem les descomposicions en parts reals i imaginàries $f^* := u^* + iv^*$, i $f = u + iv$. Segons l'enunciat, tenim que $u^*(x+iy) = u(x-iy)$ i $v^*(x+iy) = -v(x-iy)$. Comprovem les equacions de Cauchy-Riemann de f^* usant les de f:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x-iy) \overset{\text{CR}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x-iy) = -\frac{\partial v^*}{\partial y}(x+iy)(-1) = \frac{\partial v^*}{\partial y}(x+iy),$$

i

$$\frac{\partial u^*}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x-iy)(-1) \overset{\text{CR}}{=} \frac{\partial v}{\partial x}(x-iy) = -\frac{\partial v^*}{\partial x}(x+iy).$$

Segon argument: apliquem la regla de la cadena complexa. Considerem la funció conjugar $g(z) = \overline{z}$. Notem que $\partial g = 0$ i $\overline{\partial} g = 1$. Aleshores tenim que $f^* = g \circ f \circ g$ i aplicarem dues vegades la regla de la cadena complexa: en primer lloc

$$\overline{\partial} f^* = \partial g \overline{\partial}(f \circ g) + \overline{\partial} g \overline{\partial(f \circ g)} = 0\, \overline{\partial}(f \circ g) + 1\, \overline{\partial(f \circ g)},$$

així que només cal calcular el segon sumand. Continuant l'argument, obtenim

$$\overline{\partial} f^* = \overline{\partial(f \circ g)} = \overline{\partial f \partial g + \overline{\partial} f \overline{\overline{\partial} g}} = \overline{\partial f\, 0 + \overline{\partial} f \overline{1}} = \overline{\overline{\partial} f}.$$

Com que f és holomorfa, per les equacions de Cauchy-Riemann tenim que $\overline{\partial} f = 0$, és a dir que f^* també és holomorfa.

Exercici 3.3.2. *Trobeu els punts on la funció f té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que $f' = f_x$.)*

a) $f(z) = |z|^4$

b) $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

e) $f(z) = |z|$

f) $f(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

g) $\cos |z|^2$

h) $f(z) = z + z\bar{z}$ $\triangleleft$

Solució: (a) 0; (b) $\mathbb{C}$ i $f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$; (c) $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$; (d) $\mathbb{C}\backslash\{1, \pm\sqrt{2}i\}$ i $f'(z) = \frac{-4z^2+2z-4}{(z-1)^3(z^2+2)^2}$; (e) $\varnothing$; (f) $\mathbb{C}$ i $f'(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$; (g) $\{z = re^{it} : r^2 \in \pi\mathbb{N} \cup \{0\}\}$; (h) 0.

Il·lustrem com resoldre en els casos c, d i g. Notem que $f(z) = z + 1/z$ és la suma de dues funcions holomorfes a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Per tant, f és també holomorfa. Com que per funcions holomorfes tenim que $f' = f_x$ (és a dir que podem derivar usant les regles habituals respecte a la z), podem calcular

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 1 - \frac{1}{z^2}.$$

En el cas $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$ també tenim un polinomi, que és una funció holomorfa, al denominador. Per tant, f és holomorfa allà on està definida, que és el pla complex llevat dels zeros del polinomi en qüestió. Així, el domini és $\{z \in \mathbb{C} : (z-1)^2(z^2+2) \neq 0\}$, és a dir $\mathbb{C}\backslash\{1, \pm\sqrt{2}i\}$. Aquí podem derivar també usant les regles de càlcul per trobar

$$f'(z) = \frac{-2(z-1)(z^2+2) - (z-1)^2 2z}{(z-1)^4(z^2+2)^2} = \frac{-4z^2+2z-4}{(z-1)^3(z^2+2)^2}.$$

En el cas (g) tenim que $f(z) = \cos |z|^2 = \cos(z\overline{z}) = F(z, \overline{z})$, on $F(z,w) := \cos(zw)$. Aquesta funció és la composició de la funció $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, que és holomorfa, amb el polinomi en dues variables zw, que és holomorf respecte a z i respecte a w. Per tant, F és holomorfa respecte a les dues variables. Per tant, les derivades de Wirtinger de f es poden calcular usant que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, \overline{z})$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \overline{z}).$$

Les darreres derivades, en ser F holomorfa respecte a les dues variables, es poden calcular per les regles habituals. Així

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z,w) = -\sin(zw)w$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z, \overline{z}) = -\sin(zw)z.$$

Obtenim que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z,\overline{z}) = -\overline{z}\sin(|z|^2)$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z,\overline{z}) = -z\sin(|z|^2).$$

Ens interessa només saber quan s'anul·la la darrera derivada. Serà doncs quan $z = 0$ (és a dir a l'origen) o bé quan $|z|^2 = k\pi$, és a dir si $x^2 + y^2 = k\pi$, amb $k \in \mathbb{N}$. En aquests punts, precisament

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = -\overline{z}\sin(|z|^2) = 0.$$

Exercici 3.3.3. *Donat un polinomi de dues variables reals $P(x,y)$, demostreu que identificant $z = x + iy$ són equivalents:*

1. *P es pot expressar com un polinomi en z.*
2. *P és una funció entera.*
3. *$\bar\partial P = 0$ en $\mathbb{C}$.* ◁

Solució:

1. $\Longrightarrow$ 3., ja que per la proposició 3.27 tenim que $\bar\partial P = 0$.
3. $\Longrightarrow$ 2. pel teorema 3.13 és una funció entera.
2. $\Longrightarrow$ 1., ja que $P(x,y) = P((z+\bar z)/2, (z-\bar z)/(2i)) = Q(z,\bar z)$, on $Q \in \mathbb{C}[z,w]$. Pel teorema 3.13 tenim que $\bar\partial Q = 0$ i la proposició 3.27 es diu que el polinomi Q és independent de $\bar z$.

3.4 Funcions analítiques

Exercici 3.4.1. *Discutir l'analiticitat de*

a) $8\bar z + i$,

b) $\dfrac{z}{\bar z + 2}$,

c) $\dfrac{z^3 + 2z + i}{z - 1}$ *(vegeu la figura 3.6),*

d) $x^2 - y^2 + 2xyi$,

e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,

f) $\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$,

g) $|z|^2 + 2z$,

h) $\dfrac{|z|^2 + z}{2}$. ◁

Solució: a) No, b) No, c) Sí, excepte a $z = 1$, d) Si, és z^2, e) No es compleixen C.R. enlloc, f) Si, excepte a $z = 0$: és $z + 1/z$, g) No, h) No.

Exercici 3.4.2. *Trobeu la suma de les sèries* *a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+i)^n}{n!}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ *si* $|z|<1$. ◁

Solució: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n = 1/(1-(1+i)/3)-1 = (1+i)/(2-i)$, b) $e^{(3+i)}-1$, c) $z/(1-z)^2$.

Exercici 3.4.3. *Sigui* $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ *per* $|z|<R$ *on* R *és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si* $f(z_k)=0$ *per una successió* $(z_k)_k$ *tal que* $z_k \neq 0$ *i* $z_k \to 0$ *quan* $k\to\infty$*, aleshores* $f(z)\equiv 0$ *(i.e.* $c_n = 0$ *per a tot* $n\geqslant 0$*).* Indicació*: Calculeu* $f(0)$ *i considereu la sèrie* $f(z)/z$*.* ◁

Solució: Com que f és holomorfa (és una sèrie de potències) també és contínua. Aleshores
$$f(0) = f(\lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$
D'altra banda
$$0 = f(0) = c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + \ldots = c_0$$
i per tant $c_0 = 0$. Suposem ara que haguéssim demostrat que $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$ i anem a veure que $c_{n+1} = 0$ també. Escrivim
$$f(z) = c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \ldots = z^{n+1}(c_{n+1} + c_{n+2}z + \ldots) =: z^{n+1}g(z).$$
Per hipòtesi, per a tota $k\in\mathbb{N}$
$$0 = f(z_k) = z_k^{n+1}g(z_k).$$
la qual cosa, atès que $z_k\neq 0$, implica que $g(z_k)=0$ per a tots els punts de la successió. La funció g és també contínua al 0 i pel mateix raonament anterior veiem que
$$0 = g(0) = c_{n+1},$$
com volíem demostrar. Aquest raonament per inducció prova que $c_n = 0$ per a tota n i que per tant $f\equiv 0$.

Exercici 3.4.4. *Demostreu que si dues sèries* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *i* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió* $(z_k)_k$ *tal que* $z_k\neq 0$ *i* $z_k\to 0$ *quan* $k\to\infty$ *aleshores* $a_n = b_n$ *per a tot* $n\geqslant 0$*.* ◁

Solució: Siguin $S(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ i $T(z) := \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, i considerem $f(z) := S(z) - T(z) = \sum_{n\geqslant 0}(a_n - b_n)z^n$. Aleshores $f(z_k) = S(z_k) - T(z_k) = 0$ per hipòtesi. L'exercici anterior ens implica que $a_n - b_n = 0$ per a tot $n\in\mathbb{N}$ o, equivalentment, que $f(z)\equiv 0$ o que $S\equiv T$.

Exercici 3.4.5. *Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.8.1.*

Solució: (a) $-\mathrm{Log}\,(1-z)$;

(b) La suma és $(1-z)(\mathrm{Log}\,(1-z)-1)+1$, si $z\in\mathbb{D}\backslash\{1\}$ i és 1 si $z=1$;

(c) La suma és $-1/3\mathrm{Log}\,(1-z)-e^{i2\pi/3}/3\mathrm{Log}\,(z-e^{i2\pi/3})-e^{i4\pi/3}/3\mathrm{Log}\,(z-e^{i4\pi/3})-\pi\sqrt{3}/9$: Si anomenem $S(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{3n+1}$, a l'interior del conjunt, tenim que $S'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{3n}$. Calculem-ne la primitiva: sabem que

$$S'(z)=\frac{1}{1-z^3}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{e^{\frac{2\pi i}{3}}-z}+\frac{C}{e^{\frac{-2\pi i}{3}}-z}.$$

Sumant i igualant numeradors, obtenim

$$A(1+z+z^2)+B(1-z)(e^{\frac{-2\pi i}{3}}-z)+C(1-z)(e^{\frac{2\pi i}{3}}-z)=1.$$

Substituïnt $z=1$ obtenim

$$3A=1.$$

Substituïnt $z=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ obtenim

$$B(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})(e^{\frac{4\pi i}{3}}-e^{\frac{2\pi i}{3}})=1,$$

és a dir

$$1=Be^{\frac{4\pi i}{3}}(e^{\frac{4\pi i}{3}}-1)(e^{\frac{2\pi i}{3}}-1)=3Be^{\frac{4\pi i}{3}},$$

i $3B=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Anàlogament $3C=e^{\frac{-2\pi i}{3}}$. Hem vist que

$$3S'(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{2\pi i}{3}}-z}+\frac{e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{e^{\frac{-2\pi i}{3}}-z}.$$

Per tant

$$3S(z)=-\mathrm{Log}\,(1-z)-e^{\frac{2\pi i}{3}}\mathcal{L}_1(e^{\frac{2\pi i}{3}}-z)-e^{\frac{-2\pi i}{3}}\mathcal{L}_2(e^{\frac{-2\pi i}{3}}-z)+C.$$

Notem que les determinacions del logaritme $\mathcal{L}_j$ en els dos darrers casos es pot prendre qualsevol determinació a $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$, en particular podem agafar $\mathcal{L}_j(z):=\mathrm{Log}\,(-z)+\pi i$. Trobem doncs

$$3S(z)=-\mathrm{Log}\,(1-z)-e^{\frac{2\pi i}{3}}(\mathrm{Log}\,(z-e^{\frac{2\pi i}{3}}))-e^{\frac{-2\pi i}{3}}(\mathrm{Log}\,(z-e^{\frac{-2\pi i}{3}}))+C.$$

Per tenir $S(0)=0$, cal

$$0=-\mathrm{Log}\,(1)-e^{\frac{2\pi i}{3}}(\mathrm{Log}\,(e^{\frac{-\pi i}{3}}))-e^{\frac{-2\pi i}{3}}(\mathrm{Log}\,(e^{\frac{-\pi i}{3}}))+C=0-e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{-\pi i}{3}-e^{\frac{-2\pi i}{3}}\frac{\pi i}{3}+C.$$

Obtenim

$$C=\frac{\pi i}{3}(e^{\frac{-2\pi i}{3}}-e^{\frac{2\pi i}{3}})=\frac{\pi i}{3}2i\mathrm{Im}\,(e^{\frac{-2\pi i}{3}})=\frac{-\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Per continuïtat, aquesta funció s'estén a tot el domini de convergència de S.

(d) $\mathrm{Log}\,(1+z)$:

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$, aleshores $S(z) = -T(-z)$, on $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és la sèrie estudiada a l'apartat (a). Així deduïm que S té suma $S(z) = -T(-z) = -(-\text{Log}\,(1+z)) = \text{Log}\,(1+z)$.

(e) $\frac{1}{5(1-\frac{z-i}{5})^2}$.

Estudiem la sèrie $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. Definim $T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$. Aleshores T té el mateix radi de convergència que S, que és $R = 5$. A l'interior del disc tenim que $T'(z) = S(z)$, i

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{z-i}{5}} = \frac{5}{5+i-z}.$$

Per tant,

$$S(z) = T'(z) = \frac{5}{(5+i-z)^2}.$$

Exercici 3.4.6. *Considereu la sèrie*

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot z del disc de convergència.

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}.$$

◁

Solució: a) El radi de convergència és 1. En la circumferència unitat tenim una sèrie divergent quan $z = \pm 1$, ja que

$$S(\pm 1) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\pm 1)^{2n-1}}{2n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{2n} = -\infty.$$

En canvi, si $z \neq \pm 1$, aleshores tenim que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^{2n-1}\right| = |z| \left|\frac{1-z^{2N}}{1-z^2}\right| \leqslant \frac{2|z|}{|1-z^2|}.$$

Tenim, pel criteri de Dirichlet, que $S(z)$ convergeix uniformement en qualsevol arc tancat de $\partial\mathbb{D}\backslash\{\pm 1\}$, ja que $\frac{1}{|1-z^2|}$ està uniformement acotat en aquests arcs. Pel teorema d'Abel, tenim doncs convergència uniforme en compactes de $\overline{D(0,1)}\backslash\{-1,1\}$;

b) Tal com hem fet a l'exercici 3, podem justificar que $zS(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n}}{2n}$, amb radi de convergència $R = 1$. Aleshores, en l'interior del disc tenim que

$$(zS(z))' = \sum_{n\geqslant 1} z^{2n-1} = \frac{z}{1-z^2}.$$

Per tant,

$$zS(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1-z^2)}{2} + C,$$

és a dir

$$S(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1-z^2) + C}{2z}.$$

Com que $S(0) = 0$ i $\operatorname{Log}(1-0^2) = 0$, inferim que cal $C = 0$ per garantir la continuïtat de S a l'origen. Per tant,

$$S(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1-z^2)}{2z}.$$

c)

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n9^n} &= 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{(i/3)^{2n}}{2n} = \frac{2i}{3}\sum_{n\geqslant 1} \frac{(i/3)^{2n-1}}{2n} \\ &= \frac{2i}{3} S(i/3) = -\frac{2i}{3}\frac{\operatorname{Log}(1-(i/3)^2)}{2(i/3)} = -\operatorname{Log}(1+1/9) = -\ln(10/9). \end{aligned}$$

Exercici 3.4.7. *Considereu la sèrie de potències*

$$\sum_{n\geqslant 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$*?* ◁

Solució: a) Pel criteri del quocient, el radi de convergència és 1. A la frontera $\{|z| = 1\}$, tenim que

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} n(n+1)z^n$$

el terme general $|n(n+1)z^n| = n(n+1)$ no convergeix a zero i per tant, mai podrà ser convergent. Així, la sèrie convergeix absolutament a $\mathbb{D}$ i ho fa de manera uniforme als compactes continguts al disc, o el que és el mateix, convergeix absolutament en tot disc $D_r(0)$ amb $r < 1$.

b) Si prenem $T(z) = \sum_{k\geqslant 0} z^k = \frac{1}{1-z}$ per $z \in \mathbb{D}$, aleshores

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = zT''(z) = z\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)z^{k-1} = \sum_{n\geqslant 1} (n+1)nz^n = S(z).$$

Tenim doncs que

$$S(z) = \frac{2z}{(1-z)^3}.$$

c) Trobem

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n} = S(-1/2) = \frac{-1}{(3/2)^3} = -8/27.$$

Exercici 3.4.8. *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n(2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació*: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.*

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$. ◁

Solució: (a) Amb el mètode habitual trobem $S(z) = -(z+\frac{1}{2}) + \frac{\operatorname{Log}(2z+2)}{2} + C$ per $z \in D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})$. Igualant en $z = -\frac{1}{2}$ amb la sèrie donada trobem $C = 2\pi i$. La sèrie és convergent en compactes de $\overline{D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})}\backslash\{-1\}$, usant altra vegada els mètodes habituals. També es pot resoldre per un canvi de variable $w = -2z-1$, relacionant-la amb el $\operatorname{Log}(1-w)$ (Exercici 3.4.5, apartat a).

(b) No té solució, ja que $\operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{Log}(2z+2)}{2}\right) \in [-\pi,\pi]$, mentre que $\operatorname{Im}\left(e+z+\frac{1}{2}-2\pi i\right) \in [-2\pi-\frac{1}{2}, -2\pi+\frac{1}{2}]$, de manera que no poden coincidir.

3.5 Algunes funcions holomorfes importants

Exercici 3.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ *i* $\cos z$ *són funcions enteres amb*

$$(\sin z)' = \cos z; \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$, *i també* $\sin(-z) = -\sin z$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z sinw$. ◁

Solució: i) Són suma de funcions exponencials compostes amb funcions $\mathbb{C}$-lineals. Per tant són enteres. Vegem per exemple la derivada del sinus:

$$\sin'(z) = \frac{e^{iz}i - e^{-iz}(-i)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

ii) $\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \cos(z)$. El sinus es veu anàlogament.
iii)

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}{-4} + \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}{4} = \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

iv) Raonant de la mateixa manera tenim que

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}{4} - \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)}{-4} = \cos(z+w)$$

i anàlogament pel sinus.

Exercici 3.5.2.
Resoleu les següents equacions:

a) $\sin z = 4$ *b)* $\cos z = i$. ◃

Solució: (a) $z = \pi/2 + 2k\pi \pm i \operatorname{arccosh} 4$, $k \in \mathbb{Z}$ (dos valors per cada k); vegeu l'apartat d) de l'exercici 2.3.6.
(b) $z = \pi/2 + 2k\pi - i \operatorname{arcsinh} 1$; $z = 3\pi/2 + 2k\pi + i \operatorname{arcsinh} 1$.

Exercici 3.5.3. *a) Proveu que* $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$ *i que* $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$*, per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

b) Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.

c) Deduïu de (b) que, per a z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$*, es verifica:*
- *i)* $\cos z_1 = \cos z_2$ *si, i només si,* $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- *ii)* $\sin z_1 = \sin z_2$ *si, i només si,* $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ *o bé* $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *se satisfà:*
- *i)* $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ *(vegeu l'exercici 1.3.2).*
- *ii)* $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.
- *iii)* $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.
- *iv)* $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) Sobre quines rectes està acotada la funció sinus? I la funció cosinus? ◃

Solució: a) Es conseqüència directe del fet que $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$.

b) Vegeu l'apartat d) de l'exercici 2.3.6: Per fer $\cos z = 0$, posem $w = e^{iz}$, resolem l'equació de segon grau que obtenim i resulta $w = \pm i = e^{\pm i\pi/2}$. Per tant, $z = \pm\pi/2 + 2k\pi - i\ln(1) = \pi/2 + k\pi$. De la mateixa manera, pel sinus obtenim $\sin z = 0 \iff z = k\pi$.

c) Expressem $z_1 = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}$ i $z_2 = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_2-z_1}{2}$. Aleshores, per l'exercici 3.5.2, tenim que

$$\begin{aligned}\cos(z_1) &= \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)\end{aligned}$$

i anàlogament,

$$\cos(z_2) = \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$$

Restant, tenim que

$$\cos(z_1) - \cos(z_2) = 2\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right) = 0 \iff \frac{z_1 \pm z_2}{2} = k\pi$$

Per tant, el sinus és $2k\pi$ periòdica en $\mathbb{C}$ i té simetria central respecte a $\pi/2 + k\pi$. El cosinus funciona de manera similar, i resulta ser també $2k\pi$ periòdica en $\mathbb{C}$ amb simetria central en $k\pi$ (vegeu la figura 3.2).

d) Es tracta d'un mer càlcul usant els resultats de 1.3.2 que deixem al lector.

Exercici 3.5.4. *(a) Proveu que per a cada $w \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, l'equació $\tan z = w$ té infinites solucions, que són la funció multivaluada*

$$\arctan w := \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ l'equació no té cap solució.

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ difereixen de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ als anells $\{r < |w-i| < R\}$, $\{r < |w+i| < R\}$, $0 < r < R < 2$, però que sí que n'hi ha si $2 < r < R < +\infty$.

Solució: a) Si $w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = \frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$. Aleshores, aïllant e^{2iz} trobem

$$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} = \frac{i-w}{i+w},$$

és a dir que

$$2iz = \log\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

Per tant, podem definim la funció multivaluada

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

També es pot resoldre tenint en compte que $\tan(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$, on $f_1(z) = 2iz$ és una funció $\mathbb{C}$-lineal bijectiva, $f_2(\xi) = e^{\xi}$ és una funció $2\pi i$-periòdica i que pren imatge a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, de manera bijectiva en franges horitzontals semiobertes d'amplada 2π , i $f_3(\zeta) = -i\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$. D'aquí també recuperem l'expressió de l'arctangent, però a més a més podem argumentar per què $\pm i \notin \tan(\mathbb{C})$:

Notem que $f_3(\zeta) = w$ equival a $\zeta = \frac{i-w}{i+w} = f_3^{-1}(w)$, i que si $w = -i$ no existeix ζ tal que $f_3(\zeta) = -i$, ja que $\zeta - 1 \neq \zeta + 1$. Finalment, si $w = +i$, aleshores necessàriament tenim que $\zeta = 0 \notin f_2(\mathbb{C}) = f_2 \circ f_1(\mathbb{C})$. En particular, $f_3 : \mathbb{C}\backslash\{0, -1\} \to \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ és bijectiva, i

$$\tan z = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \pm i$$

no pot tenir solucions.

b) Si h_j són determinacions de l'arctangent amb $j \in \{1, 2\}$, volem veure que $h_1(w) - h_2(w) = k\pi$. Notem que $f_3 : \mathbb{C}\backslash\{0, -1\} \to \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ és bijectiva, tal com hem vist abans. Per tant,

$$\tan(h_1(w)) = \tan(h_2(w)) \iff f_2 \circ f_1(h_1(w)) = f_2 \circ f_1(h_2(w)) \iff e^{2ih_1(w)} = e^{2ih_2(w)}$$

Per acabar, usem la proposició 1.45: cal que

$$h_1(w) = h_2(w) + k\pi.$$

c) Suposem que $\tan(h(w)) = w$ per tot $w \in A_{\pm} = \{r < |w \pm i| < R\}$ amb $r < R$ i $2 < r$ o bé $R < 2$. Aleshores, com que f_3 és bijectiva en la preimatge de l'anell, trobem que per cada w existeix un únic ζ amb $f_3(\zeta) = w$ i per tant,

$$e^{f_1(h(f_3(\zeta)))} = f_2(f_1(h(f_3(\zeta)))) = f_3^{-1}(\tan(h(w))) = \zeta.$$

Per tant, $f_1 \circ h \circ f_3$ és una determinació contínua del logaritme en $f_3^{-1}(A)$. Notem que en l'eix imaginari tenim que

$$f_3^{-1}(iy) = \frac{i - iy}{i + iy} = \frac{1-y}{1+y}.$$

Per tant, $f_3^{-1}(i(-1, 1)) = \mathbb{R}_+$, mentre que $f_3^{-1}(i\,[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]) = \mathbb{R}_-$.

Quan $r > 2$ tenim que

$$A \cap i\mathbb{R} \subset i\,[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$$

i per tant, $f_3^{-1}(A_{\pm}) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing$. En canvi, si $R < 2$, aleshores A_- talla $i(-1, 1)$ i també $i(-\infty, -1)$, i A_+ talla $i(-1, 1)$ i també $i(1, +\infty)$. Per tant, hi ha una corba en A que té per preimatge una corba que rodeja l'origen, on no hi pot haver una determinació de l'argument i, per tant, no n'hi pot haver del logaritme. Així, hem arribat a una contradicció i h no pot existir.

Exercici 3.5.5. *Demostra que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\text{Arctan}w := \frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

és $\mathbb{C}\backslash\{iy : |y| \geqslant 1\}$. ◁

Solució: Vegeu el darrer apartat de l'exercici anterior:

$$f_3^{-1}\left(\mathbb{C}\backslash\{iy : |y| \geqslant 1\}\right) = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0],$$

i aquesta regió és precisament l'obert maximal on tenim definida la branca contínua del logaritme principal.

Exercici 3.5.6. *a) Sigui* $\mathcal{L}$ *la determinació del logaritme en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *que compleix que* $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$. *Definim* $f(z) := -\mathcal{L}(2-2z)$. *Demostreu que* f *és holomorfa en* $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty)$. *Calculeu* $f(0)$ *i* $f(-i)$.

b) Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(2z-1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\text{Log}\,(2-2z)$, *per tot* $z \in D := \mathbb{D}(1/2, 1/2)$, *on* Log *és la determinació principal del logaritme.*

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ *i* $f(z)$*?* Indicació*: Relacioneu primer* $\mathcal{L}(z)$ *amb* $\text{Log}\,(z)$ *per* $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. ◁

Solució: El primer apartat és molt similar a l'exercici 2.3.2, ara trobem $k = 2$. Per tant, $\mathcal{L}(z) = \text{Log}\,(z) + 4\pi i$, i trobem $f(z) := -\text{Log}\,(2-2z) - 4\pi i$. Per tant $f(0) = -\ln(2) - 4\pi i$ i $f(-i) = -\text{Log}\,(2+2i) - 4\pi i = -\ln(2\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}$.

Pel segon apartat,

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n(z-1/2)^n}{n}.$$

és una sèrie centrada en el punt 1/2 i amb radi de convergència 1/2. Notem que

$$S'(z) = \sum_{n\geqslant 1} 2(2z-1)^{n-1} = 2\sum_{n\geqslant 0}(2z-1)^n = \frac{2}{1-(2z-1)} = \frac{2}{2-2z}$$

. Per tant, en el disc de convergència trobem

$$S(z) = C - \text{Log}\,(2-2z).$$

Per expressar S com a funció contínua, ens cal observar que el centre del disc és 1/2 i el radi de convergència és també $R = 1/2$. Així, $2-2z = 1 + 2(1/2 - z)$ té part real positiva:

$$\text{Re}\,(2-2z) = 1 + 2\text{Re}\,(1/2 - z) \geqslant 1 - 2|1/2 - z| \geqslant 1 - 2 \cdot 1/2 = 0.$$

Per tant, té sentit prendre la branca principal del logaritme, ja que hi és contínua. Per determinar la constant, notem que

$$S(1/2) = 0$$

i

$$\text{Log}\,(2 - 2(1/2)) = \text{Log}\,(1) = 0.$$

Trobem $C = 0$ i

$$S(z) = -\text{Log}\,(2 - 2z),$$

tal com volíem veure.

Del primer apartat sabem que $\mathcal{L} = \text{Log} + 4\pi i$. Tenim doncs que

$$f(z) = S(z) - 4\pi i.$$

Exercici 3.5.7. *Sigui* $\sqrt{\cdot}$ *la determinació de l'arrel quadrada en* $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ *complint que* $\sqrt{-1} = i$ *i sigui* $f(z) = \sqrt{3z+2}$.

1. *Expresseu* $\sqrt{\cdot}$ *en termes d'una determinació del logaritme i argument.*

   Recordem que
   $$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg z)}.$$

2. *Quina és la regió més gran of* f *és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix* z *tal que* $f(z) = -i$*?*

3. *Què val* $f(\frac{i-2}{3})$*?* ◁

Solució:

1. Observem que $3z + 2 \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ si i només si $z \in \mathbb{C}\backslash[-2/3,\infty)$. Per tant, el domini de f és $\mathbb{C}\backslash[-2/3,\infty)$.

Per a determinar la imatge, observem que donat que $\sqrt{-1} = i$, s'ha de complir que $i = e^{\frac{1}{2}((2k+1)\pi i)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, cal que k sigui un múltiple de 2 i podem triar $\arg z$ que sigui la determinació de l'argument en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ complint que $\arg z \in (0, 2\pi)$ (observeu que si triem una altre determinació de la forma $\arg z + 4\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, llavors les corresponents arrels quadrades coincideixen).

2. El domini ja l'hem comentat. Com que $\arg z \in (0, 2\pi)$, $\frac{1}{2}\arg z \in (0, \pi)$ i per tant la imatge de f és el semiplà superior. En particular, no hi ha cap z tal que $f(z) = -i$.

3. $f(\frac{i-2}{3}) = \sqrt{i - 2 + 2} = \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercici 3.5.8. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt* $a = 1$ *de la funció* $f(z) = \sqrt[3]{z}$ *on* $\sqrt[3]{\cdot}$ *denota la determinació de l'arrel cúbica definida a* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. ◁

Solució: Anomenem $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Escrivim $z = 1 + w$ i desenvoluparem la funció $g(w) = \sqrt[3]{1+w} = (1+w)^{1/3}$ en $a = 0$, que serà vàlida per $|w| < 1$.

Aleshores
$$g(w) = g(0) + \frac{g'(0)}{w} + \frac{g''(0)}{2}w^2 + \cdots .$$
Utilitzant la determinació que ens indiquen, tenim que

$$\begin{aligned}
g(0) &= (1+0)^{1/3} = \sqrt[3]{1} = \zeta;\\
g'(w) &= \frac{1}{3}(1+w)^{-2/3}; \quad g'(0) = \frac{1}{3}(1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\zeta;\\
g''(w) &= \frac{-2}{3^2}(1+w)^{-5/3} \quad g''(0) = \frac{-2}{3^2}(\sqrt[3]{1})^{\frac{1}{3}-2} = \frac{-2}{3^2}\zeta;\\
&\dots\\
g^{(n)}(w) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)(1+w)^{\frac{1}{3}-n};\\
g^{(n)}(0) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)(1)^{\frac{1}{3}}(1)^{-n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)\zeta.
\end{aligned}$$

En conseqüència
$$g(w) = \zeta + \sum_{n\geqslant 1}\binom{\frac{1}{3}}{n}\zeta w^n,$$
on definim
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n|}.$$
Desfent el canvi
$$f(z) = \zeta\left(1 + \sum_{n\geqslant 1}\binom{\frac{1}{3}}{n}(z-1)^n\right), \quad \text{per } |z-1| < 1.$$

Observem que $f(z) = \zeta(\tilde{f}(z))$ on $\tilde{f}(z)$ és la determinació de l'arrel cúbica tal que $\tilde{f}(1) = 1$.

Exercici 3.5.9. *Els* polinomis de Legendre $P_j(\zeta)$ *són els coeficients de* z^j *en el desenvolupament de Taylor*
$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z + z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta)z^j.$$
Provar que $P_j(\zeta)$ *és un polinomi de grau* j *i calcular* P_0, P_1, P_2 *i* P_3.

$\triangleleft$

Solució:

$$(1-2\zeta z+z^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}z^n(z-2\zeta)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}z^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^{n-k}z^k\zeta^{n-k}=$$
$$=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{-1/2}{n}z^{n+k}\zeta^{n-k}=\sum_{j=0}^{\infty}P_j(\zeta)z^j.$$

Si $n+k=j$ amb $k\leqslant n$, el valor més gran de $n-k$ és j que s'assoleix quan $n=j$ i $k=0$ llavors $P_j(\zeta)$ pot tenir grau com a molt j. De fet

$$P_j(\zeta)=(-2)^j\binom{-1/2}{j}\zeta^j+\cdots.$$

Els polinomis que es demanen són

$$1,\quad \zeta,\quad \frac{3}{2}\zeta^2-\frac{1}{2},\quad \frac{5}{2}\zeta^3-\frac{3}{2}\zeta.$$

Els polinomis de Legendre es fan servir en moltes disciplines, en particular en l'estudi de xarxes neuronals.

4 Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.1 Corbes

Exercici 4.1.1. *Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t), t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i $z(t)$ és injectiva. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular).* ◁

Solució: Parametritzem $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ amb $t \in [0, 2\pi]$. Llavors $z'(t) \neq 0$.

Exercici 4.1.2. *Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtex $-1-i, 1-i, 1+i, -1+i$ seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud?* ◁

Solució: En general si volem $z : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ tal que $z(a) = p$ i $z(b) = q$ fem

$$z(t) = \frac{1}{b-a}((b-t)p + (t-a)q)).$$

En el nostre cas fem que el paràmetre variï als intervals $[0, 1), [1, 2), [2, 3), [3, 4)$. La longitud és clarament 8.

4.2 Integració sobre corbes

Exercici 4.2.1. *Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{dz}{|z^m|}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{|z^m|}.$$ ◁

Solució: Parametritzant $z = \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tenim que $|z| = 1$, $dz = ie^{it}dt$, $|dz| = dt$, i per tant

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{imt}}\, dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1 \\ 2\pi i & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{z^m} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{imt}} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{|z^m|} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{1}\, dt = 0,$$

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z^m|} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1} = 2\pi.$$

Exercici 4.2.2. *Sigui $\gamma = \partial D(0,r)$. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz$.* ◁

Solució: Llavors si $n \geqslant 0$, $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ és una primitiva holomorfa a $\mathbb{C}$. Per tant, $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz = 0$.
Si $n < -1$, $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ és una primitiva holomorfa a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Per tant, $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz = 0$.
Finalment, si $n = -1$, parametritzem γ com $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Obtenim

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i.$$

Exercici 4.2.3. *Sigui $\gamma = [i+1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:*

a) $\int_\gamma \sin(2z)\,dz$ *b)* $\int_{|z|=1} ze^{z^2}\,dz$ *c)* $\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z}\,dz$ ◁

Solució: (a) $(\cos(2+2i) - \cos(2i))/2$; (b) 0; (c) 0.

Es poden obtenir totes mitjançant el teorema fonamental del càlcul. Per exemple, la primitiva de $\sin(2z)$ és $-\cos(2z)/2$, així que

$$\int_\gamma \sin(2z)\,dz = [-\cos(2z)/2]_{i+1}^{-i} = -\cos(-2i)/2 + \cos(2(i+1))/2.$$

Alternativa: també podem usar la definició d'integral de línia: $\gamma(t) = (1-t)(1+i)+t(-i)$, $\gamma'(t) = -1-2i$. Així

$$\int_\gamma \sin(2z)\,dz = \int_0^1 \sin(2[(1-t)(1+i)+t(-i)])(-1-2i)\,dt.$$

Usant la regla de la cadena complexa, veiem que $-\cos(2[(1-t)(1+i)+t(-i)])/2$ és la primitiva de l'integrand, així que podem fer servir el teorema fonamental del càlcul en variable real per acabar el càlcul

$$\int_\gamma \sin(2z)\,dz = [-\cos(2[(1-t)(1+i)+t(-i)])/2]_0^1 = -\cos(-2i)/2 + \cos(2(i+1))/2.$$

Exercici 4.2.4. *Avaluar les següents integrals.*

a) $\displaystyle\int_C \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2\right) dz$ *si C és $|z-i| = 4$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.*

b) $\displaystyle\int_\gamma (x - 2xyi)dz$ *al llarg del contorn $\gamma : z = t + it^2$ amb $t \in [0,1]$.*

c) $\displaystyle\int_\gamma (|z-1+i|^2 - z)dz$ *al llarg de la semicircumferència* $\gamma : z = 1 - i + e^{it}$ *on* $t \in [0, \pi]$.

d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ *(per què?) al llarg de* $|z| = 1$ *recorreguda un cop en sentit antihorari.* ◁

Solució: a) $1/(z-i)^2$ i $(z-i)^2$ tenen antiderivada en un entorn obert del disc de vora C llavors les integrals corresponent són zero, en canvi $1/(z-i)$ no i cal integrar amb una parametrització. Posem $z = i + 4e^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi)$. Finalment la integral val $4\pi i$.

b) La funció no és holomorfa, no té antiderivada, cal substituir. Val $13/10 + i/6$.

c) Sobre la corba la integral és la de $(1-z)$ fem la primitiva i obtenim $-2i$.

d) No satisfà les equacions de Cauchy-Riemann, no pot ser holomorfa i per tant tampoc analítica. Considerem $z = \cos t + i \sin t$, substituïm $x = \cos t, y = \sin t$ calculem i obtenim $-\pi i$.

Exercici 4.2.5. *Calcular les següents integrals al llarg del camí* γ *que s'indica.*

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ *per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de* $-3i$ *a* $3i$. *Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre?* Indicació*: considerar la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si* $y = 0, x \leqslant 0$.

b) $\displaystyle\int_\gamma e^z \cos z dz$ *per un camí d'origen* $a = i$ *i final* $b = \pi$.

c) $\displaystyle\int_\gamma z^{1/2} dz$ *per la branca principal de* $z^{1/2}$ *per un camí d'origen* $a = i$ *i final* $b = \pi$ *que no talli la semirecta* $(-\infty, 0]$. ◁

Solució: a) Pel costat on $x > 0$ no tenim problema ja que $1/z$ té per primitiva la branca principal del logaritme, llavors la integral val $[\mathrm{Log}(z)]_{-3i}^{3i} = \mathrm{Log}(3i) - \mathrm{Log}(-3i) = \pi i/2 - (-\pi i/2) = \pi i$. Per l'altra banda cal fer la integral directament o jugar amb el teorema integral de Cauchy. Sigui C la circumferència de radi 3 centrada en l'origen recorreguda en sentit antihorari tenim que $\int_C 1/z = 2\pi i$. Si γ_1 és un camí de $-3i$ a $3i$ pel costat dret i γ_2 pel costat esquerre amb $C = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ llavors $2\pi i = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} + \pi i$. Llavors la integral de $-3i$ a $3i$ pel costat esquerre és $-\pi i$. No hi ha independència del camí.

b) La funció és entera, una primitiva és $\frac{1}{2}(\cos(z) + \sin(z))e^z$, llavors la integral val $-\frac{1}{2}e^\pi - \frac{1}{2}\cosh(1)\, e^i - \frac{1}{2} i\, e^i \sinh(1)$ (encara podem simplificar més).

c) El camí està en el domini de la branca principal de l'arrel quadrada. Tenim primitiva. La integral val

$$2/3(e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}\,\pi} - e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}\,i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}i\mathrm{Arg}\,i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3\pi}{4}i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}(-1+i)).$$

Exercici 4.2.6.

Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ *que és holomorfa a* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ *i positiva a* $(1, \infty)$.

(a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2-1}$ *omet l'eix real negatiu si* $z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 1]$*, de manera que la determinació principal* $\operatorname{Log}(z+\sqrt{z^2-1})$ *està definida a* Ω*.*

(b) Vegeu que $\operatorname{Log}(z+\sqrt{z^2-1})$ *és una primitiva de* $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ *a* Ω*.*

(c) Avalueu $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$*, on* γ *és el tros de cercle* $|z-1| = \sqrt{2}$ *que va de* i *a* $-i$ *passant pel semiplà de la dreta (*$\operatorname{Re} z > 0$*).*

Indicació*: comproveu que* $\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(z-1)+\operatorname{Log}(z+1))}$ *s'estén a* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ *de manera contínua.* ◁

Solució:

Observem que les expressions

$$\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))},$$

on $\log w$ és alguna determinació del logaritme, són arrels de z^2-1 en alguna regió del pla. Si triem el logaritme principal tenim directament que

$$\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(z-1)+\operatorname{Log}(z+1))}$$

és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 1]$ i positiva a $(1, +\infty)$.

Comprovem en primer lloc que efectivament aquesta és la funció de la que ens parla l'enunciat.

Mètode 1: Si ens hi fixem, veiem que també ho és als punts reals $x < -1$. Escrivint $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w$ veiem que per a comprovar això només cal veure que

$$F(z) := e^{\frac{i}{2}(\operatorname{Arg}(z-1)+\operatorname{Arg}(z+1))}$$

és contínua a aquests punts $x < -1$. Si ens acostem a x pel semiplà de dalt tenim que

$$F(x+i0^+) = e^{\frac{i}{2}(\pi+\pi)} = e^{i\pi} = -1,$$

i si ens hi acostem pel semiplà de baix tenim anàlogament

$$F(x+i0^-) = e^{\frac{i}{2}(-\pi-\pi)} = e^{-i\pi} = -1.$$

Per tant hi ha continuïtat de F aquests punts. Un cop hem vist que la funció és contínua, l'holomorfia de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ definida a dalt a tot $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ se segueix: per $z_0 \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$, podem trobar $\delta > 0$ tal que si $z \in B(z_0, \delta)$, aleshores $|z^2 - z_0^2| < |z_0^2 - 1|$ per continuïtat i, en particular, $0 \neq z^2 - 1$. Així, com que $F(z)$ té només dues alternatives que són nombres complexos oposats, l'elecció està unívocament determinada quan $z \in B(z_0, \delta)$ i, donada una determinació del logaritme log a $B(z_0^2 - 1, |z_0^2 - 1|)$, F ha de coincidir amb $e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$ o bé amb el seu oposat, és a dir, $F(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$. En qualsevol cas, la seva derivada és $F'(z) = \pm e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}\frac{z}{z^2-1} = \frac{zF(z)}{F(z)^2} = \frac{z}{F(z)}$.

Mètode 2: Prenent una determinació del logaritme a $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$, tenim que per $z \notin [-1,\infty)$ la funció

$$e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))}$$

està ben definida i, si $z \notin \mathbb{R}$ tenim que $\log(z-1) = \operatorname{Log}(z-1) + 2k\pi i$ i $\log(z+1) = \operatorname{Log}(z+1) + 2k\pi i$, amb k constant en els semiplans de part imaginària positiva i negativa. Aleshores tenim que

$$e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(z-1)+\operatorname{Log}(z+1))+2k\pi i} = F(z).$$

Però aquesta segona definició és contínua i holomorfa a $z \notin [-1,\infty)$, mentre que la definició amb logaritmes principals és contínua i holomorfa a $z \notin (\infty, 1]$. Així doncs F és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. A més

$$F'(z) = e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))}\frac{1}{2}(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}) = F(z)\frac{z}{F(z)^2} = \frac{z}{F(z)},$$

i el mateix podem fer amb els logaritmes principals de manera que la derivada de F és $\frac{z}{F(z)}$ a tot arreu on la tenim definida.

(a) Mirem per a quins punts $z \in \mathbb{C}$ tenim que $z + \sqrt{z^2-1} \in (-\infty, 0]$, i veurem que cap d'aquests punts no és a Ω. L'equació

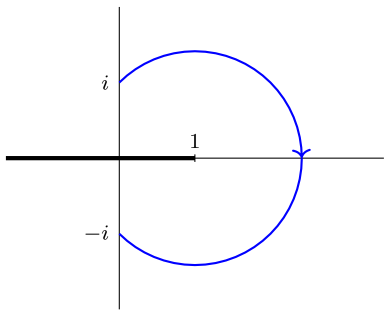
$$z + \sqrt{z^2-1} = -x, \quad x > 0,$$

dona per solució $z = -\dfrac{1+x^2}{2x}$. Observem que tots aquests punts són reals negatius, i per tant queden fora d' Ω.

(b) Ara sabem que aquesta funció és holomorfa, ja que és composició de funcions holomorfes (tant l'arrel com el logaritme són holomorfs allà on no tenen discontinuïtats). Per tant, per la regla de la cadena,

$$\left(\operatorname{Log}(z+\sqrt{z^2-1})\right)' = \frac{1}{z+F(z)}(1+F'(z)) = \frac{1}{z+F(z)}\left(1+\frac{z}{F(z)}\right) = \frac{1}{F(z)}.$$

(c) L'arc d'integració (en blau) és dins del domini on la primitiva de la funció a integrar és holomorfa.



Utilitzant el teorema 4.9, és a dir, la regla de Barrow de les integrals de línia, i dient $G(z) = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ tenim:

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = G(-i) - G(i) = \operatorname{Log}(-i + \sqrt{(-i)^2-1}) - \operatorname{Log}(i + \sqrt{i^2-1}).$$

Notem que la notació $\sqrt{(-i)^2-1}$ es refereix a una funció avaluada en $z = -i$, que no coincideix en principi (de fet, no coincideix) amb $\sqrt{i^2-1}$! En realitat, per ser rigorosos, haurem de parlar de $F(i)$ i $F(-i)$. Aquí

$$\begin{aligned}\sqrt{i^2-1} &= e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(i-1)+\operatorname{Log}(i+1))} = e^{\frac{1}{2}(\ln\sqrt{2}+i\operatorname{Arg}(i-1))+\ln\sqrt{2}+i\operatorname{Arg}(i-1))} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\ln 2+i\frac{3\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})} = i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Anàlogament, es comprova que,

$$\sqrt{(-i)^2-1} = -i\sqrt{2}.$$

Llavors

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \operatorname{Log}(-i - i\sqrt{2}) - \operatorname{Log}(i + i\sqrt{2}).$$

Tenim que

$$\operatorname{Log}(-i - i\sqrt{2}) = \ln|-i - i\sqrt{2}| + i\operatorname{Arg}(-i - i\sqrt{2}) = \ln(1+\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{2},$$

i anàlogament

$$\operatorname{Log}(i + i\sqrt{2}) = \ln(1+\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{2}.$$

Finalment

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln(\sqrt{2}-1) - i\frac{\pi}{2} - \ln(\sqrt{2}-1) - i\frac{\pi}{2} = -i\pi.$$

Exercici 4.2.7. *Siguin* $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *i* $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. *Demostreu que:*

a) $\left|\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+2}\right| \leqslant \pi$

b) $\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$

c) $\left|\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,dz\right| \leqslant 2\pi e$

d) $\left|\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz\right| \leqslant \pi e^2.$ ◁

Solució: Afitem com a exemple la integral

$$\left|\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz\right| \leqslant \int_{|z|=1} \left|\frac{\sin z}{z^2}\right| |dz| \leqslant ML(\gamma) = 2\pi M$$

on γ és la circumferència unitat i

$$M = \max_{|z|=1} \frac{|\sin z|}{|z|^2} = \max_{|z|=1} |\sin(z)|.$$

Sabem que si $z = x + iy$ aleshores

$$|sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y).$$

El primer terme té 1 com a valor màxim, mentre que el segon terme és una funció creixent per $y \geqslant 0$ i parell. Donat que $|z| = 1$ tenim que $y \leqslant 1$ i per tant

$$|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2 y} \leqslant \sqrt{1 + \sinh^2 1} = \sqrt{(2 + e + e^{-1})/2} \leqslant \sqrt{e},$$

ja que $e^{-1} < 0.5$ i $2.5 < e$. Concloem doncs que $M \leqslant e$ i per tant l'afitació queda provada.

Exercici 4.2.8. *(a) Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors*

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz.$$

(b) Deduïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$ ◁

Solució: Escrivim $f = u + iv$ i $\gamma = r + is$ per les parts reals i imaginàries. Aleshores tenim que $\overline{\gamma} = r - is$, i

$$\begin{aligned}\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} &= \int_a^b \overline{f \circ \gamma(t)\gamma'(t)}\, dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) - iv(\gamma(t)))(r'(t) - is'(t))\, dt \\ &= \int_a^b (u(\overline{\overline{\gamma}(t)}) - iv(\overline{\overline{\gamma}(t)}))(\overline{\gamma}'(t))\, dt = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz.\end{aligned}$$

Per l'apartat b), si considerem $\gamma = e^{it}$ la circumferència unitat resseguida en sentit antihorari, aleshores $\overline{\gamma} = e^{-it}$ és el mateix camí resseguit en sentit horari, i

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\, (-ie^{-it})\, dt$$

és a dir que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = -\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\, (ie^{it})\, \frac{dt}{e^{2it}} = -\int_\gamma \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$

4.3 Teorema de Cauchy

Exercici 4.3.1. *Recordeu que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ *per a tot* $a > 0$. Indicació: *Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle* $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(nx)\,dx = \sqrt{2\pi}e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

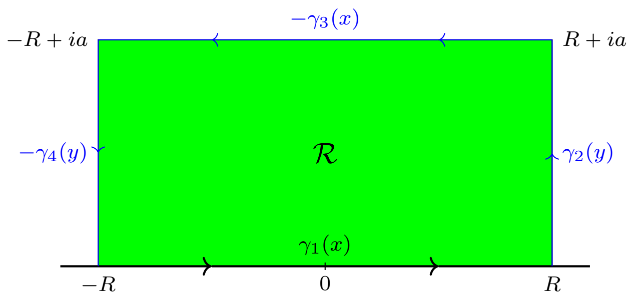
Solució:

(a) Considerem la funció entera $f(z) = e^{-z^2}$ i apliquem el teorema de Cauchy a la vora del rectangle $\mathcal{R}$ que donen a la *Indicació*:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\,dz = 0.$$

Parametritzem cadascun dels quatre costats del rectangle:
1) $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$. Aquí $dz = dx$.
2) $\gamma_2(y) = R + iy$, amb $y \in [0, a]$. Aquí $dz = i\,dy$.
3) $\gamma_3(x) = x + ia$, amb $x \in [-R, R]$. Ara $dz = dx$.
4) $\gamma_4(y) = -R + iy$, amb $y \in [0, a]$. Aquí $dz = i\,dy$.

Amb aquestes parametritzacions tenim, tenint en compte l'orientació, que $\partial\mathcal{R} = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$.



Aleshores

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2}i\,dy - \int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2}dx - \int_0^a e^{-(-R+iy)^2}i\,dy$$

Observem que les dues integrals en y, corresponents als costats del rectangle, tendeixen a 0 quan R tendeix a $+\infty$: $(\pm R + iy)^2 = R^2 - y^2 \pm 2iyR$, de manera que

$$\left|e^{-(\pm R+iy)^2}\right| = e^{-R^2+y^2} \leqslant e^{-R^2}e^{a^2}.$$

Aleshores
$$\left|\int_0^a e^{-(\pm R+iy)^2} i\,dy\right| \leqslant \int_0^a e^{-R^2} e^{a^2} dy = ae^{a^2}e^{-R^2} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Per tant, passant al límit la igualtat anterior obtenim
$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx,$$
i per tant
$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx.$$

(b) Utilitzem l'apartat anterior, reescalant x per a tenir $x^2/2$. És a dir, fem primer el canvi $x = t/\sqrt{2}$; $dt = \sqrt{2}\,dx$. Aleshores, de l'apartat (a) tenim que
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t}{\sqrt{2}}+ia)^2} dt = \sqrt{2\pi}.$$
Prenem ara $a = n/\sqrt{2}$, amb $n \geqslant 1$ (per a tenir $a > 0$). Llavors
$$\big(\frac{t}{\sqrt{2}} + ia\big)^2 = \big(\frac{t}{\sqrt{2}} + i\frac{n}{\sqrt{2}}\big)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{n^2}{2} + i\,tn$$
i per tant
$$e^{n^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-itn}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$
Prenent les parts reals d'aquesta igualtat obtenim el resultat demanat, per a $n \geqslant 1$. Per a $n \leqslant -1$, observem que $\cos(nx) = \cos(-nx)$, i per tant el valor de la integral que obtenim per a aquest n és el mateix que prenent $-n = |n|$. Per a $n = 0$ el resultat és la indicació que ens donen a l'apartat (a).

Exercici 4.3.2. *Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu perquè $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0$.*

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$,

b) $f(z) = \mathrm{Log}(z + 3)$. ◁

Solució: a) És holomorfa allà on el denominador és diferent de zero, és a dir a $\mathbb{C}$ excepte $z = 3 \pm i$. El circuit d'integració no envolta la singularitat llavors pel teorema de Cauchy la integral és zero.

b) El domini d'holomorfia de la funció és $D = \mathbb{C}\backslash\{x \leqslant -3, y = 0\}$ llavors $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2\} \subset D$ i la integral és zero pel teorema de Cauchy.

Exercici 4.3.3. *Sigui $u : D \to \mathbb{R}$ una funció harmònica en un disc D, és a dir, tal que $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial u = 0$. Demostra que existeix una funció $v : D \to \mathbb{R}$ harmònica tal que $(u + iv)$ és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada.* Indicació*: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per $F = U + iV$ es poden escriure com $\partial F = 2\partial U$ o com $\overline{\partial U} = -i\bar{\partial}V$.* ◁

Solució: Si $F = U + iV$ satisfà que

$$\bar{\partial}F = 0 \iff \overline{\partial\bar{U}} = \bar{\partial}U = -i\bar{\partial}V = \overline{i\partial\bar{V}},$$

vegeu l'observació 3.25. Com que U i V prenen valors reals tenim que $\bar{U} = U$ i $\bar{V} = V$, i trobem

$$\bar{\partial}F = 0 \iff \overline{\partial U} = -i\bar{\partial}V \iff \partial U = i\partial V \iff \partial F = 2\partial U.$$

Considerem u harmònica. Aleshores $f = 2\partial u$ és holomorfa. Pel teorema de Cauchy té una primitiva holomorfa $F = U + iV$, que ha de satisfer que $\bar{\partial}F = 0$ i $\partial F = f$. Prenem doncs $v = V$. Aleshores per Cauchy-Riemann tenim que

$$\bar{\partial}(u + iV) \overset{\text{CR}}{=} \bar{\partial}u - \overline{\partial U} \overset{\text{CR}}{=} \overline{\partial u} - \frac{\overline{\partial F}}{2} = \frac{\bar{f}}{2} - \frac{\bar{f}}{2} = 0.$$

Per veure que V és harmònica, notem que

$$4\bar{\partial}\partial V \overset{\text{CR}}{=} 4\bar{\partial}(-i\partial U) \overset{\text{CR}}{=} -2i\bar{\partial}\partial F = -2i\bar{\partial}f = 0.$$

Exercici 4.3.4. *El teorema de Green diu que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert i $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\overline{U} \subset \Omega$, aleshores tot camp vectorial $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ amb $F \in C^1(\Omega)$ satisfà que*

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dm = \int_{\partial U} (F_1\, dx + F_2\, dy)\,.$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). ◁

Solució: Suposem que $f = u + iv$ i $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Aleshores

$$\text{I} = \int_{\partial U} (f\, d\bar{z} - g\, dz) = \int_{\partial U} ((u + iv)\,(dx - idy) - (\tilde{u} + i\tilde{v})\,(dx + idy))\,.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_{\partial U} (u\, dx - iu\, dy + iv\, dx + v\, dy - \tilde{u}\, dx - i\tilde{u}\, dy - i\tilde{v}\, dx + \tilde{v}\, dy) \\ &= \int_{\partial U} (u\, dx + v\, dy - \tilde{u}\, dx + \tilde{v}\, dy) + i\int_{\partial U} (-u\, dy + v\, dx - \tilde{u}\, dy - \tilde{v}\, dx)\,. \end{aligned}$$

Apliquem ara el teorema de Green als camps $(u - \tilde{u}, v + \tilde{v})$ i $(v - \tilde{v}, -u - \tilde{u})$. Obtenim

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_U \left(-u_y + v_x + \tilde{u}_y + \tilde{v}_x + i\left(-u_x - v_y - \tilde{u}_x + \tilde{v}_y\right)\right) dm \\ &= \int_U \left(-f_y + g_y + i\left(-f_x - g_x\right)\right) = -i \int_U \left(f_x - i f_y + g_x + i g_y\right) dm \\ &= -2i \int_U \left(\partial f + \bar{\partial} g\right) dm. \end{aligned}$$

Exercici 4.3.5. *Continuant amb l'exercici 4.3.4, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, que diu que si $\phi \in C^1(\Omega)$ i $z_0 \in U$, aleshores*

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} \, dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C^1_c(\Omega)$ ens diu $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$, on $\mathcal{C}$ indica la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\psi(z)}{z - z_0} \, dm(z). \qquad \triangleleft$$

Solució: Prenem $U_\varepsilon = U \backslash B_\varepsilon(z_0)$ amb ε prou petit (tal que $B_\varepsilon(z_0) \subset U$). Aleshores prenent $g(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0}$, com que $\bar{\partial} g(z) = \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0}$ en U_ε, obtenim

$$2i \int_{U_\varepsilon} \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm = \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} \, dz - \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{\phi(z)}{z - z_0} \, dz.$$

Per passar al límit en ε, notem que per ε prou petit

$$\left| \left(\int_{U \backslash \{z_0\}} - \int_{U_\varepsilon} \right) \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm \right| \leqslant 2|\bar{\partial}\phi(z_0)| \int_{B_\varepsilon \backslash \{z_0\}} \frac{1}{|z - z_0|} \, dm \overset{\text{polars}}{=} 2|\bar{\partial}\phi(z_0)| 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

i per tant

$$2i \int_{U_\varepsilon} \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2i \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm.$$

Per altra banda, pel teorema del valor mitjà,

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} \, dz \right| \leqslant \sup_{B_\varepsilon(z_0)} |\nabla \phi| \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} |dz| \leqslant \sup_{B_\varepsilon(z_0)} |\nabla \phi| 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

i

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{\phi(z_0)}{z - z_0} \, dz = \phi(z_0) \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z} \, dz \overset{\text{Ex.4.2.1}}{=} 2\pi i \phi(z_0).$$

Passant al límit, doncs, tot plegat ens queda

$$2i \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm = \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} \, dz - 2\pi i \phi(z_0).$$

4.4 Fórmula integral de Cauchy

Exercici 4.4.1. *Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:*

a) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz$;

b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$;

d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1}$;

e) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3}$;

f) $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz$;

g) $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz$;

h) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz$. ◁

Solució:

(a) Com que $1 \in D(0,2)$, la fórmula de Cauchy per a $f(z) = z^2$ dona

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz = 2\pi i \, 1^2 = 2\pi i.$$

(b) Essent $0 \in D(0,1)$, podem aplicar la fórmula de Cauchy a $f(z) = \sin(e^z)$:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \sin 1.$$

(c) Descomponem en fraccions simples

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}$$

tenim que

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+1} = \pi i - \pi i = 0.$$

Observem que

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \, n(\gamma, 1),$$

on γ és la circumferència de radi 2. Anàlogament, l'altra integral dona $2\pi i \, n(\gamma, 1)$. És clar, tal com acabem de veure, que la diferència d'índexs és 0.

(d) Les arrels de $z^2 + z + 1 = 0$ són $\alpha = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ i $\beta = \bar{\alpha}$, totes dues dins el disc $D(0,2)$. Escrivint

$$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\right)$$

tenim que

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1} &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-\alpha} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}(2\pi i - 2\pi i) = 0.\end{aligned}$$

Observem que, llevat del factor $2\pi i$, aquesta integral equival a la diferència de dos índexs de punts de l'interior del disc $D(0,2)$, i per tant val 0.

(e) Tenim que $z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3)$. L'arrel 1 és dins $D(0,2)$, però l'arrel -3 és fora, de manera que la funció $1/(z+3)$ és holomorfa en aquest disc. Aplicant la fórmula de Cauchy a aquesta funció tenim:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3} = \int_{|z|=2} \frac{1/(z+3)}{z-1}\, dz = 2\pi i \frac{1}{1+3} = i\frac{\pi}{2}.$$

g) Descomponem en fraccions simples

$$\frac{3z-2}{z^2-z} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z}.$$

Llavors tenim que

$$\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz = \int_{|z|=3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z}\right) dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z-1} dz + \int_{|z|=3} \frac{2}{z} dz = 6\pi i.$$

h)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{|z+1|=1} \left(-\frac{1}{2\,(z+1)} + \frac{1}{2\,(z-1)}\right) dz = 2\pi i(-1/2) + 0 = -\pi i.$$

Exercici 4.4.2. *Sigui p un polinomi de grau n, amb tots els seus zeros continguts en $D(0,R)$. Demostreu que*

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n. \qquad \triangleleft$$

Solució: Convé expressar el polinomi com a producte de monomis. Tenimque $p(z) = C\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$. Aleshores calculant la derivada del producte trobem que

$$p'(z) = C\sum_{k=1}^{n} \prod_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus k} (z-\alpha_i),$$

i obtenim

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_k}.$$

Aplicant la fórmula integral de Cauchy a cada sumand obtenim el resultat demanat:

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{|z|=R} \frac{1}{z-\alpha_k}\, dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i = 2\pi i n.$$

Exercici 4.4.3. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia* $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$, *i deduïu que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,dt}{1+r^2-2r\cos(\theta - t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leqslant r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \qquad \triangleleft$$

Solució: Aplicant la fórmula integral de Cauchy tenim que

$$\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz = \int_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z-a} - \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2(2\pi i) - 2\pi i = 2\pi i.$$

Per altra part, sumant dins la integral i parametritzant $z = e^{it}$, obtenim

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz &= \int_{|z|=1} \frac{z+a}{z(z-a)}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+a}{e^{it}(e^{it}-a)}\, ie^{it}\,dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2 + ae^{-it} - \bar{a}e^{it}}{|e^{it}-a|^2}\,dt. \end{aligned}$$

Observem que $ae^{-it} - \bar{a}e^{it} = 2i\mathrm{Im}\,(ae^{-it})$. Per tant, prenent les parts imaginàries a la igualtat anterior i utilitzant la igualtat que hem vist al principi obtenim,

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}\,dt.$$

Escrivint $a = re^{i\theta}$, $r < 1$, obtenim el resultat, ja que

$$|e^{it}-a|^2 = 1 + |a|^2 - ae^{-it} - \bar{a}e^{it} = 1 + |a|^2 - 2\mathrm{Re}\,(ae^{-it}).$$

Exercici 4.4.4. *Siguin $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw. \qquad \triangleleft$$

Solució: Separem dos casos:

(i) $|a| < 1$. Per la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-a}\,dw = f(a).$$

Per altra part, com que $1/|a| > 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{ag(w)}{aw-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g(w)}{w-1/a}\,dw = 0.$$

(ii) $|a| > 1$. Aquí els papers d'a i $1/a$ es giren; com que $1/a \in \mathbb{D}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-a}\,dw = 0$$

i

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{ag(w)}{aw-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g(w)}{w-1/a}\,dw = g(\frac{1}{a}).$$

Tot plegat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1}\right) dw = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in \mathbb{D} \\ -g(1/a) & \text{si } a \notin \mathbb{D}. \end{cases}$$

Exercici 4.4.5. *Es consideren els següent exercicis relacionats amb la Fórmula Integral de Cauchy.*[1]

a) Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{z^4-1}dz$ *sobre la circumferència de radi* 3 *centrada en* 0.

b) És cert que $\oint_C \frac{e^z}{z}\,dz = 0$ *si* C *és tancada i simple?*

Solució: a)

$$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right).$$

Obtenim

$$\oint_{|z=3|} \frac{z^2}{z^4-1}dz = \frac{1}{4}\left(\oint_{|z=3|} \frac{i\,dz}{z-i} - \oint_{|z=3|} \frac{i\,dz}{z+i} + \oint_{|z=3|} \frac{dz}{z-1} - \oint_{|z=3|} \frac{dz}{z+1}\right) = 0.$$

b) Si C no envolta el 0 és cert. Si C envolta el zero la integral val $2\pi i e^0 = 2\pi i$.

4.5 Sèries de potències

Exercici 4.5.1. *Desenvolupeu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:*

a) $1/z$, $a = 1$, *c)* $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a = 0$, *e)* $\frac{e^z}{1-z}$, $a = 0$,

b) z^2e^z, $a = 0$, *d)* $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a = 0$, *f)* $\frac{1}{1+e^z}$, $a = 0$.

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). ◁

[1] De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

Solució: (a) Si $f(z) = 1/z$, aleshores si $n \geqslant 1$ tenim que $f^{(n)}(z) = \frac{n!(-1)^n}{z^{n+1}}$, com podem veure per inducció sobre n. Aleshores $f^{(n)}(1) = n!(-1)^n$ per $n \geqslant 0$, i obtenim

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (z-1)^n.$$

El radi de convergència és $R = 1$ pel criteri del quocient.

(b) Si $f(z) = z^2 e^z$, aleshores $f'(z) = (z^2 + 2z)e^z$, i si $n \geqslant 2$ tenim que $f^{(n)}(z) = (z^2 + 2nz + n(n-1))e^z$, com podem veure per inducció sobre n. Aleshores $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f^{(n)}(0) = n(n-1)$ per $n \geqslant 2$, i obtenim

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^{n+2}.$$

El radi de convergència és infinit pel criteri del quocient.

Aquesta sèrie també es pot calcular directament sabent que $e^z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$.

(c) Ara tenim que $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Per tant,

$$f^{(n)}(z) = n!(-1)^n \left(\frac{1}{(z-2)^{n+1}} - \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \right),$$

i se segueix que

$$f^{(n)}(0) = n! \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Així obtenim que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2^{n+1} - 1) z^n}{2^{n+1}},$$

i $R = 1$.

(d) Ara tenim que $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$. Per tant,

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n+2)!}{2} \frac{1}{(1-z)^{n+3}},$$

i se segueix que

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n+2)!}{2}.$$

Així obtenim que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n,$$

i $R = 1$.

Alternativament, usant el teorema de Mertens (vegeu el teorema 1.22), com que sabem que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

aleshores

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \overset{\text{T.1.22}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,$$

i

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{1-z} \overset{\text{T.1.22}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}z^n.$$

(f) Ara tenim que

$$f(z) = \frac{1}{1+e^z},$$
$$f'(z) = \frac{-e^z}{(1+e^z)^2},$$
$$f''(z) = \frac{e^{3z}-e^z}{(1+e^z)^4},$$

i

$$f'''(z) = \frac{(3e^{3z}-e^z)(1+e^z)-(e^{3z}-e^z)4e^z}{(1+e^z)^5}.$$

Obtenim que

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^3}{48} + O(z^4).$$

D'entrada no podem calcular R en no conèixer els coeficients. A la demostració del teorema 4.21, que dona el desenvolupament local en sèrie de potències, es demostra que si $D(0,r) \subset \Omega$, aleshores $R \geqslant r$. Per tant, com que la funció és holomorfa a tot arreu llevat dels pols $z = i\pi + 2k\pi i$ per tot $k \in \mathbb{Z}$, deduïm que $R \geqslant \pi$. A la vegada, precisament entorn del pol $i\pi$ la funció pren valors arbitràriament grans. Per tant la sèrie no pot ser uniformement convergent entorn del pol i, en particular $R \leqslant \pi$. Així, tenim que $R = \pi$.

Exercici 4.5.2. *Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha \mathrm{Log}(1+z)}$ llavors per $|z| < 1$*

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \cdots$$

(generalització del binomi de Newton).

Solució: Podem provar per inducció que $((1+z)^\alpha)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+z)^{(\alpha-n)}$. D'aquí el resultat. Escrivim

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

si $n > 0$ i $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Exercici 4.5.3. *Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:*

a) $f(z) = \cos^2 z$, $a = 0$.

b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a = 1$.

c) $\sqrt[3]{z}$, $a = 1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ *és la determinació de l'arrel cúbica en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *que val* $(-1 + i\sqrt{3})/2$ *en* $z = 1$. ◁

Solució: (a) Mètode estàndard: Tenim que $f(z) = \frac{\cos(2z)+1}{2}$. Per tant,

$$f'(z) = -\sin(2z)$$

i per inducció veiem que si $n \geqslant 1$ tenim que

$$f^{(2n)}(z) = (-1)^n 2^{2n-1} \cos(2z)$$

$$f^{(2n+1)}(z) = (-1)^{n+1} 2^{2n} \sin(2z).$$

Avaluant en $a = 0$ tenim que

$$f(0) = 1,$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n 2^{2n-1},$$

i

$$f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Per tant,

$$f(z) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mètode intel·ligent: Podem fer el càlcul directament notant que

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2z)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Prenem $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 g(z)$, on $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Calculem per inducció

$$g^{(n)}(z) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+2}}.$$

Per fer aquests càlculs, normalment usem intuïció + inducció. La intuïció prové de calcular un parell o tres de derivades i detectar els patrons: $g'(z) = -2/(z+1)^3 = -2!/(z+1)^{(2+1)}$, $g''(z) = 6/(z+1)^4 = 3!/(z+1)^{(2+2)}$, ... Per la inducció notem en primer lloc que és cert per $n = 1$ tal com hem vist. Per altra banda, si per un $n \in \mathbb{N}$ efectivament tenim $g^{(n)}(z) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+2}}$, aleshores pel següent nombre natural podem derivar un cop més i obtenim $g^{(n+1)}(z) = \frac{-(n+2)(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+3}} = \frac{((n+1)+1)!(-1)^{n+1}}{(z+1)^{(n+1)+2}}$, i es compleix el pas inductiu.

Un cop establerta la derivada n-èsima, és moment de calcular els valors que pren en $a = 1$:

$$g(1) = 1/4 \qquad g^{(n)}(1) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{2^{n+2}}.$$

Notem que per $n = 0$ les dues expressions coincideixen.

Escrivim ara la sèrie de potències:

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)!(-1)^n}{n!2^{n+2}}(z-1)^n$$

Simplificant els factorials i multiplicant per $z^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$ obtenim

$$f(z) = ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n.$$

Multiplicant terme a terme i reindexant, obtenim

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{(n-1)(-1)^n}{2^n}(z-1)^n + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2n(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n.$$

Ajuntant termes,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(z-1) + \sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{2^n}\left((n-1) - \frac{2n}{2} + \frac{n+1}{4}\right)(z-1)^n \\ &= \frac{1}{4} + \frac{z-1}{4} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n(n-3)}{2^{n+2}}(z-1)^n. \end{aligned}$$

(c) A l'exercici 7 de la llista 3 vam veure que si $f(z) = \sqrt[3]{z}$, aleshores tenim que

$$f^{(n)}(z) = \binom{1/3}{n} \frac{1}{f(z)^{3n-1}} = \binom{1/3}{n} \frac{f(z)}{z^n},$$

on $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(n-1))}{n!}$. Avaluant a $z = 1$ tenim que

$$f^{(n)}(1) = \binom{1/3}{n} \frac{f(1)}{1^n} = \binom{1/3}{n} \zeta,$$

on $\zeta = f(1) = (-1 + i\sqrt{3})/2$ per hipòtesi.

La sèrie de potències serà doncs

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\binom{1/3}{n}}{n!} \zeta (z-1)^n.$$

Pel criteri del quocient el radi de convergència és 1. També ho podem argumentar notant que el domini d'holomorfia exclou necessàriament l'origen.

Exercici 4.5.4. *Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ *i el punt* $a = -1$.

1. *"Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a.*

2. *Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a.* $\triangleleft$

Solució: (a) Sabem que f és holomorfa a tot arreu llevat dels zeros del denominador, que són 0, $-i$ i 1. El més proper a -1 és l'origen, que està a distància 1. Així doncs, com que la funció és holomorfa a $D(-1,1)$ obtenim que $R \geqslant 1$ i com que té un pol a l'origen no és uniformement convergent a $D(-1,1+\varepsilon)$ de manera que $R \leqslant 1$. Tenim doncs $R = 1$.

(b) Escrivim $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z} = (z+1)g(z)$, on $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z}$. Per trobar les constants A, B i C, resolem

$$A(z+i)z + B(z-1)z + C(z-1)(z+i) = 1.$$

Avaluant a $z=0$ obtenim $C = i$, a $z = -i$ obtenim $B = \frac{-i-1}{2}$ i a $z = 1$ trobem $A = \frac{1-i}{2}$. Tenim que

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n n! \left(\frac{A}{(z-1)^{n+1}} + \frac{B}{(z+i)^{n+1}} + \frac{C}{z^{n+1}} \right),$$

i a $z = -1$ trobem

$$g^{(n)}(-1) = (-1)^n n! \left(\frac{A}{(-2)^{n+1}} + \frac{B}{(-1+i)^{n+1}} + \frac{C}{(-1)^{n+1}} \right),$$

és a dir

$$g^{(n)}(-1) = -n! \left(\frac{(i-1)/2}{2^{n+1}} + \frac{(-i-1)/2}{(1-i)^{n+1}} + i \right).$$

Les sèries de potències resultants seran

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} - \left(\frac{i-1}{2^{n+2}} + \frac{-i-1}{2(1-i)^{n+1}} + i \right) (z+1)^n$$

i

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} - \left(\frac{i-1}{2^{n+2}} + \frac{-i-1}{2(1-i)^{n+1}} + i \right) (z+1)^{n+1}.$$

Exercici 4.5.5. *a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?*

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\dfrac{1}{2-z} + \dfrac{z}{3-z}$?

Solució: a) No hi ha cap disc al voltant de 0 on la funció sigui holomorfa, no ho podem fer. b) El disc més gran d'holomorfia al voltant de 0 és el disc de radi 1. c)

$$\frac{1}{2-z}+\frac{z}{3-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}-1-\frac{1}{1-z/3}.$$

Cal que $|z/2|<1$ i $|z/3|<1$. Llavors el radi de convergència al voltant de 0 és 2.

Exercici 4.5.6. *Determinar com a mínim els coeficients a_1, a_2, a_3, a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$ centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$.*

Solució: Ho podem fer amb `Sage`, amb la comanda `taylor.` Fem-ho a ma.

$$\frac{1}{1+z+z^4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z+z^4)^n=1-z+z^2-z^3+z^5+\cdots$$

i obtenim els coeficients demanats. Per controlar el radi de convergència cal que trobem el zero ω de z^4+z+1 més proper a l'origen. Llavors el radi de convergència serà $|\omega|$. Veiem si pot haver un zero a distància menor que $2/3$. Si $|z|<2/3$ llavors $|z+z^4|<2/3+16/81<1$ llavors no pot ser que $z^4+z+1=0$. Aleshores el radi de convergència és major que $2/3$. (de fet l'arrel més propera és aproximadament $-0.727+0.43i$ i la seva distància a l'origen és $0.8447>2/3$.)

Exercici 4.5.7. *Vegem com el teorema 4.21 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real f és analítica en un interval obert $I\subset\mathbb{R}$ si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostra que si f és analítica en I aleshores hi és derivable. Troba una funció infinites vegades derivable en $\mathbb{R}$ que no hi sigui analítica. Troba una funció f analítica en $\mathbb{R}$ que tingui radi de convergència* 1.

Solució: Si f es pot expressar com a série de potències en un entorn de $x\in\mathbb{R}$, la mateixa sèrie serà convergent en un disc centrat en x pel teorema de Hadamard i, per tant, hi és holomorfa, de manera que la derivada $f'(x)=\partial f(x+0i)$.

La funció $f(x)=e^{-1/x^2}$ és l'exemple més conegut de funció C^∞ de variable real que no és analítica en l'origen, ja que totes les derivades són zero i la sèrie no pot coincidir amb f que és positiva en tot punt llevat de l'origen.

La funció $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ és derivable en tota la recta real, amb sèrie $\sum(-1)^n x^{2n}$, que té radi de convergència 1. Els punts on l'extensió holomorfa deixa de ser contínua són $\pm i$, justificant també aquest radi tan petit. En general, per tot punt $a\in\mathbb{R}$, el radi de convergència de la sèrie corresponent serà la distància a $\pm i$, és a dir $\sqrt{a^2+1}$.

4.6 Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

Exercici 4.6.1. *Donat $r>0$ i $a\in\mathbb{C}$ calculeu*

$$I=\int_{|z-a|=r}\frac{e^{2z}}{(z-a)^3}dz.$$ ◁

Solució: Per la fórmula integral de Cauchy per derivades, si $f(z) = e^{2z}$ tenim que

$$\int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(a) = \pi i 4e^{2a}.$$

Exercici 4.6.2. *Siguin* $0 \leqslant m \leqslant n$ *enters. Calculeu*

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz. \qquad \triangleleft$$

Solució: Sigui $f(z) = (1+z)^n$. Aleshores

$$f^{(m)}(z) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)(1+z)^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!}(1+z)^{n-m}.$$

Així

$$f^{(m)}(0) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

i per la fórmula integral de Cauchy per derivades tenim que

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz = \frac{2\pi i}{m!} f^{(m)}(0) = 2\pi i \frac{n!}{(n-m)!m!} = 2\pi i \binom{n}{m}.$$

Exercici 4.6.3. *Intenteu calcular* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ *fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades (potser cal recordar la desigualtat* $|\int_\Gamma f(z)dz| \leqslant \int_\Gamma |f(z)||dz|$.*)*

a) Considereu la semicircumferència C *en el semiplà superior centrada a* 0 *amb radi* R *i tancada pel segment de l'eix* OX*. Calculeu* $\displaystyle\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ *on* C_1 *és el segment de* $-R$ *a* R *i* C_2 *la part restant de* C*. Fent servir la desigualtat triangular per integrals donar una fita superior de* $\left| \displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|$.

c) Fent servir els apartats anteriors calcular $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$*. Que passa si* R *tendeix a infinit?* $\triangleleft$

Solució: a) La funció $f(z) = 1/(z+i)^2 \in H(\mathbb{C}\backslash\{-i\})$, és holomorfa a l'interior de la corba C llavors

$$\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$$

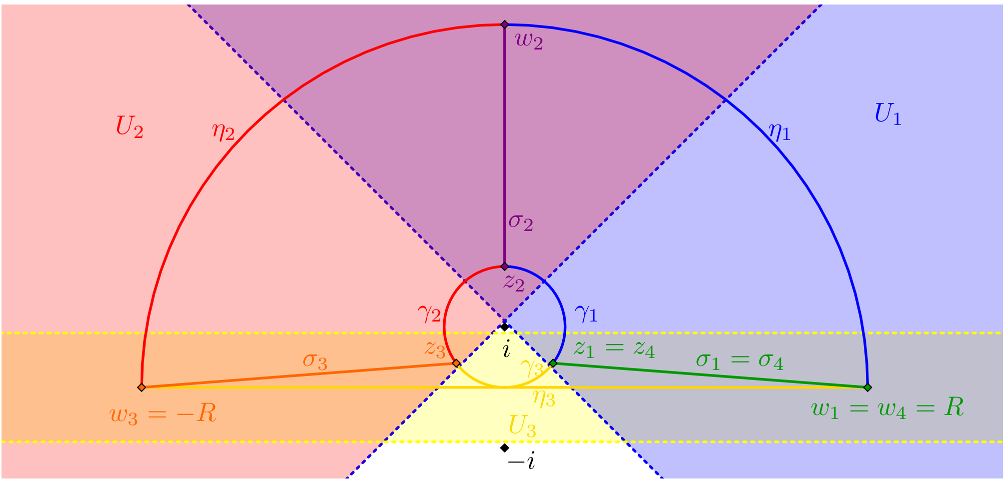
Per altra banda, la FIC dona per derivades

$$\int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(i) = \pi/2.$$

Ens falta veure doncs que

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = \int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz.$$

Notem que l'integrand és holomorf en un entorn $\bar{\Omega}$, on Ω és el domini $\Omega = D \backslash \overline{B_1(i)}$ comprès entre la corba inicial C i la bola de radi 1 centrada en i. Ara com ara no podem garantir que existeixi una primitiva holomorfa en aquest entorn, ja que el domini Ω no és convex (ni simplement connex, de fet).



No obstant, sí que són convexos els semiplans i les interseccions de semiplàns, així que definim

$$U_1 = \{z : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1 + \varepsilon\},$$

$$U_2 = \{z : \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 1 + \varepsilon\},$$

$$U_3 = \{z : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}.$$

Aleshores, si escrivim $g(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$, i notant que $g \in H(U_j)$, podem aplicar el teorema de Cauchy en cada camí contingut en U_j.

Definim doncs $t_1 = -10\varepsilon$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi + 10\varepsilon$ i $t_4 = 2\pi$, i escrivim

$$\gamma_j(t) := i + e^{it}, \quad \text{amb } t_j < t < t_{j+1},$$

$$z_j = i + e^{it_j},$$

$$w_1 = R + 0i, \quad w_2 = iR, \quad w_3 = -R + 0i, \quad \text{i} \quad w_4 = w_1.$$

Aleshores prenem els segments

$$\sigma_j = [z_j, w_j]$$

i dividim el camí C en els fragments compresos entre els punts w_j, que anomenem η_j, amb

$$\eta_j(0) = w_j \quad \text{i} \quad \eta_j(1) = w_{j+1}.$$

Aleshores, per $j \in \{1, 2, 3\}$ tenim que

$$\Gamma_j := \sigma_j \vee \eta_j \vee (\sigma_{j+1})_- \vee (\gamma_j)_- \subset U_j,$$

i pel teorema de Cauchy en cada U_j trobem

$$\int_{\Gamma_j} g(z) \overset{\text{T.4.16}}{=} 0.$$

Com que els camins es recorren en sentit antihorari, es cancel·len els valors dels fragments de camí en comú, és a dir les integrals en σ_j desapareixen, i obtenim

$$\int_C g(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\eta_j} g(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} g(z)dz = \int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = \pi/2.$$

Notem que tot aquest procediment se simplificarà quan coneguem el teorema de Cauchy global. Aquest procediment modificat convenientment, permet també deduir la FIC per a derivades no centrada de la FIC per a derivades centrada.

b)

$$\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right| \leqslant \int_{C_2} \frac{1}{|1+z^2|^2} |dz| \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \to 0 \quad \text{si } R \to \infty$$

ja que $|1 + R^2 e^{i2t}| \geqslant R^2 - 1$ (R gran).

c) Llavors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2.}$$

Exercici 4.6.4. *Sigui $\alpha > 0$ i $f \in H(D(0,1))$ complint que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1-|z|)^\alpha |f(z)| \leqslant c$. Demostreu que per a tot $n \geqslant 0$, $|f^{(n)}(0)| \leqslant cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha$.* ◃

Solució: Sigui $0 < r < 1$. Llavors $\sup_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{c}{(1-r)^\alpha}$. Aplicant les desigualtats de Cauchy, obtenim que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!c}{r^n(1-r)^\alpha} := \varphi(r).$$

Calculem el mínim de φ. Derivant,

$$\varphi'(r) = \frac{-n!c\big(nr^{n-1}(1-r)^\alpha - \alpha r^n (1-r)^{\alpha-1}\big)}{(r^n(1-r)^\alpha)^2} = \frac{-n!c\big(n(1-r) - \alpha r\big)}{r^{n+1}(1-r)^{\alpha+1}}.$$

Per tant, $\varphi'(r) = 0$ en $(0,1)$ si i només si, $r = \frac{n}{n+\alpha}$ i es verifica que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!c}{(\frac{n}{n+\alpha})^n (\frac{\alpha}{n+\alpha})^\alpha} = cn!((1+\frac{\alpha}{n})^{n/\alpha})^\alpha \frac{(n+\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} \leqslant cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha.$$

Exercici 4.6.5. *Sigui f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leqslant M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant CMe$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.*
Indicació*: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant \frac{M}{r}e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$.* ◁

Solució: Per la desigualtat de Cauchy tenim que per tot $r > 0$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(z + re^{i\theta})|}{r} \leqslant \frac{M}{r} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} e^{C|z+re^{i\theta}|} \leqslant \frac{M}{r}e^{C|z|+Cr}.$$

Per tant,

$$|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant \frac{M}{r}e^{Cr},$$

com proposa la indicació.

Un cop vist això, prenem $r = 1/C$ i trobem

$$|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant CMe.$$

Notem que $\frac{e^{Cr}}{r}$ té un mínim en $r = 1/C$, així que la cota no pot millorar, almenys seguint aquest mètode!

Exercici 4.6.6. *(a) Suposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leqslant M$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen*

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{R^k}.$$

(b) Suposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està acotat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul acotat per 1. ◁

Solució: (a) Per les desigualtats de Cauchy tenim que

$$|c_k| = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqslant \frac{M}{R^k}.$$

(b) Com abans tenim que

$$|c_k| \leqslant \frac{M_r}{r^k},$$

on $M_r = \sup_{|z|=r} |P(z)| \leqslant 1$. Prenent $r = 1$ obtenim la fita desitjada.

Exercici 4.6.7. *Proveu que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leqslant |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\, e.$$ ◁

Solució: Per les desigualtats de Cauchy tenim que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n! \frac{\sup_{\mathbb{D}} e^{|z|}}{r^n} \xrightarrow{r\to 1} n!e.$$

4.7 Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

Exercici 4.7.1. *Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim.* ◁

Solució: $f^{(4)}(z)$ fitada vol dir que el seu mòdul és fitat, pel teorema de Liouville $f^{(4)}(z) = c \in \mathbb{C}$. Integrem i obtenim un polinomi de quart grau com a màxim.

Exercici 4.7.2. *La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \to \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el Teorema de Liouville?* ◁

Solució: No el contradiu ja que $1/z^2$ no és entera, el 0 no és del seu domini.

Exercici 4.7.3. *Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu*

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. ◁

Solució: Si $a = b$, $I = 2\pi i f'(a)$ per la fórmula integral de Cauchy per derivades. Si $a \neq b$,

$$I = \frac{1}{a-b} \int_{|z|=R} \frac{(a-b)f(z)\, dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\int_{|z|=R} \frac{f(z)\, dz}{z-a} - \int_{|z|=R} \frac{f(z)\, dz}{z-b} \right),$$

i concloem per la fórmula integral de Cauchy que $I = \frac{2\pi i}{a-b}(f(a) - f(b))$.

Exercici 4.7.4. *Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leqslant |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.* ◁

Solució: És clar que $f(z) = \alpha z^2 + \beta$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $2|\alpha| \leqslant 1$ satisfà les hipòtesis. Veiem que no hi ha més solucions.

Si $|f'(z)| \leqslant |z|$, prenem $g(z) = f(z) - f(0)$ també satisfà les hipòtesis i $g(0) = 0$. Tenim que

$$|g''(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{g'(w)}{(w-z)^2}\, dw \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{|w|}{|w-z|^2}\, |dw| \xrightarrow{R\to\infty} 1.$$

Així que $g'' = f''$ és una funció entera i fitada. Pel teorema de Liouville, es tracta d'una funció constant.

Exercici 4.7.5. *Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que*

(a) Si $|f| \geqslant 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, llavors f és constant.

(c) Si $\operatorname{Im} f \leqslant 1$*, llavors* f *és constant.* ◁

(d) Si $\operatorname{Re} f$ *no té zeros, llavors* f *és constant.*

Solució: (a) Amb aquesta condició f no té zeros, i per tant $1/f$ és entera. La mateixa condició diu que $|1/f| \leqslant 1$, de manera que, pel Teorema de Liouville, $1/f$ (i per tant f) és constant.

(b) Considerem $F(z) = e^{-f(z)}$. Tenim que $|F(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leqslant 1$, i per tant F és constant.

(c) Anàlogament al cas anterior, considerem $F(z) = e^{-if(z)}$. Tenim que $|F(z)| = e^{\operatorname{Im} f(z)} \leqslant e$, de manera que F (i per tant f) és constant.

(d) Com que $\operatorname{Re} f$ és contínua (de fet, fins i tot analítica), tenim que $\operatorname{Re} f > 0$ o bé $\operatorname{Re} f < 0$. Al primer cas apliquem (b), i al segon considerem $F(z) = e^{f(z)}$ i fem com al cas (b).

Exercici 4.7.6. *Sigui* f *una funció entera tal que* $|f(z)| \leqslant Ce^{\operatorname{Re} z}$*, per a tot* $z \in \mathbb{C}$*, on* $C > 0$ *és una constant. Què es pot dir de* f*?* ◁

Solució: Notem que $e^{\operatorname{Re} z} = |e^z|$. La funció e^{-z} és entera i per tant, $e^{-z}f(z)$ és una funció entera i acotada per C. Per tant, és constant. Així doncs, $f(z) = ae^z$, amb $|a| \leqslant C$.

Exercici 4.7.7. *Sigui* f *una funció entera tal que* $|f'(z)| < |f(z)|$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$*. Què podem dir de* f*?* ◁

Solució:

Solució proposada per Miguel Puelma Martínez:

La hipòtesi sobre f implica que per a tot $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| > 0$, per tant f no té zeros i aleshores $f'/f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Com que a més per a tot $z \in \mathbb{C}$

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

pel teorema de Liouville f'/f és constant, i.e., existeix $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f' = \lambda f$. Volem concloure d'aquí que f és de la forma $z \mapsto C\mathrm{e}^{\lambda z}$ per a algun $C \in \mathbb{C}$. Proposem dues maneres alternatives de veure-ho.

Alternativa 1: Com que f és entera, es pot expressar en sèrie de potències a tot $\mathbb{C}$ com

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \quad (*)$$

Per inducció immediata, de $f' = \lambda f$ obtenim $f^{(n)} = \lambda^n f$, i per tant $(*)$ esdevé

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = f(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\lambda z)^n = f(0)\mathrm{e}^{\lambda z}$$

com volíem veure, amb $C = f(0)$.

Alternativa 2: Si ja hem intuït que les solucions seran d'aquesta forma, l'únic que cal veure és que $g\colon z \mapsto f(z)e^{-\lambda z}$ és constant —o equivalentment, que té derivada 0, perquè $\mathbb{C}$ és connex—. Efectivament,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g'(z) = f'(z)e^{-\lambda z} - \lambda f(z)e^{-\lambda z} = 0.$$

Finalment, dels candidats a solució, els que verifiquen $|f'/f| < 1$ són

$$f(z) = Ce^{\lambda z}, \quad C \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{D},$$

ja que $|f'/f| = |\lambda|$ per a tots els candidats.

Nota: com que $\mathbb{C}$ és simplement connex i f no s'hi anul·la, existeix una determinació $F(z)$ de $\log f(z)$, com veurem a la proposició 5.30. Usant això se simplifica la prova i estalviem l'argument de compacitat.

4.8 Teorema de Morera

Exercici 4.8.1. *Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz.* ◁

Exercici 4.8.2. *Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corol·lari 4.33 del teorema de Morera?* ◁

Solució: Definim $F(z) = \frac{-1}{z}$. F és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ i la seva derivada és $F'(z) = f(z)$. Per tant, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ és un camí tancat, aleshores

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

Com que f no és contínua a l'origen, tampoc pot ser analítica.

El corol·lari del teorema de Morera diu que si una funció és holomorfa en un obert llevat d'un punt però que la funció és contínua en aquest punt, aleshores la funció és holomorfa en tot l'obert. En aquest cas falla la hipòtesi de la continuïtat i falla també la conclusió, ja que f no és analítica a l'origen i, per tant, no és holomorfa.

Exercici 4.8.3. *(a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui*

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz}dt$$

(quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h; si prenem iz en el lloc de z, H s'anomena transformada de Laplace bilateral de h). Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leqslant Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) Sigui h una funció contínua a $[0,1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C} \backslash [0,1]$. ◁

Solució: (a) En primer lloc comprovem que la integral és finita per a tot $z \in \mathbb{C}$. Sigui $A > 0$ tal que $supp(h) \subset [-A, A]$. Passant el mòdul dins la integral tenim que

$$|H(z)| \leqslant \int_{-A}^{A} |h(t)||e^{-itz}|dt.$$

Essent h contínua i de suport compacte, existeix $M = \max_{t \in \mathbb{R}} |h(t)| < +\infty$. Per altra part

$$|e^{-itz}| = |e^{-it(\mathrm{Re}\,(z) + i\mathrm{Im}\,(z))}| = e^{t\,\mathrm{Im}\,(z)}.$$

Amb tot això tenim que

$$|H(z)| \leqslant \int_{-A}^{A} M e^{t\,\mathrm{Im}\,(z)} dt \leqslant M \int_{-A}^{A} e^{A\,|\mathrm{Im}\,(z)|} dt = M(2A) e^{A\,|\mathrm{Im}\,(z)|}.$$

Per a veure que H és holomorfa utilitzarem el Teorema de Morera. Haurem de veure per tant que H és contínua i que la integral al llarg de la vora de qualsevol triangle dona 0.

Que H és contínua és immediat, ja que la funció que integrem és contínua i ho fem a un conjunt compacte:

$$\lim_{z \to z_0} H(z) = \lim_{z \to z_0} \int_K h(t) e^{-itz} dt = \int_K h(t) (\lim_{z \to z_0} e^{-itz}) dt = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-itz_0} dt = H(z_0).$$

Sigui ara T un triangle qualsevol de $\mathbb{C}$. Per Fubini i pel teorema de Cauchy aplicat a les funcions enteres $f_t(z) = e^{-itz}$, tenim que

$$\int_{\partial T} H(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\int_{\partial T} e^{-itz} dz \right) dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)\, 0\, dt = 0.$$

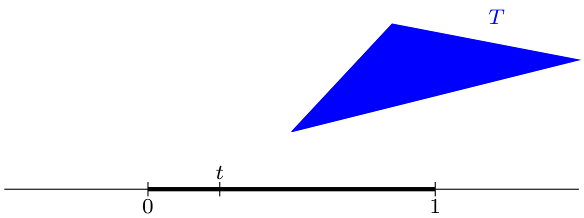
(b) Fem anàlogament a l'apartat anterior. Diem $d(z)$ a la distància de $z \notin [0,1]$ a aquest interval. Passant el mòdul dins la integral i utilitzant que h és una funció contínua al compacte $[0,1]$, veiem de seguida que la integral és finita:

$$|H(z)| \leqslant \int_0^1 \frac{|h(t)|}{|t-z|} dt \leqslant \frac{1}{d(z)} \int_0^1 |h(t)|\, dt.$$

Per veure que és holomorfa apliquem de nou el teorema de Morera. Si $z_0 \notin [0,1]$ existeix $\epsilon > 0$ tal que $D(z_0, \epsilon) \cap [0,1] = \varnothing$. Aleshores, prenent $z \in D(z_0, \varepsilon)$ tenim que

$$\lim_{z \to z_0} H(z) = \lim_{z \to z_0} \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt = \int_0^1 \lim_{z \to z_0} \frac{h(t)}{t-z} dt = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0} dt = H(z_0).$$

Sigui ara T un triangle completament contingut a $\mathbb{C} \backslash [0,1]$. Observem que per als punts $t \in [0,1]$ l'índex de ∂T a t és 0: $\mathrm{Ind}\,(\partial T, t) = 0$.



Aleshores,

$$\int_{\partial T} H(z)\,dz = \int_0^1 \left(\int_{\partial T} \frac{dz}{t-z} \right) h(t)\,dt = \int_0^1 \big(-2\pi i \operatorname{Ind}(\partial T, t)\big)\, h(t)\,dt = 0.$$

Exercici 4.8.4. *Sigui f holomorfa en un obert Ω, i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que hi ha $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat*

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z)-f(z_0)}.$$

Indicació: *proveu primer que la funció G definida per*

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & si \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω. ◁

Solució: Com que f és holomorfa, la funció G és clarament holomorfa en $\Omega \backslash \{z_0\}$. Vegem que G és contínua en z_0. Com que f és holomorfa en z_0, tenim que

$$\lim_{z\to z_0} G(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = G(z_0).$$

Per tant, $G \in C(\Omega) \cap H\big(\Omega\backslash\{z_0\}\big)$, i això implica que G és holomorfa en Ω pel corol·lari 4.33.

Com que $G(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, per continuïtat, hi ha $r_0 > 0$ de manera que $G(z) \neq 0$ per $z \in D(z_0, r_0)$. Llavors la funció

$$H(z) = \frac{1}{G(z)}, \qquad z \in D(z_0, r_0)$$

és holomorfa en $\Omega_1 = D(z_0, r_0)$. Sigui $\varepsilon > 0$ amb $0 < \varepsilon < r_0$. Com que $\overline{D(z_0,\varepsilon)} \subset \Omega_1$, aplicant la fórmula integral de Cauchy obtenim

$$H(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{H(z)}{z-z_0}\,dz.$$

És a dir,

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \frac{2\pi i}{G(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{G(z)(z-z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z)-f(z_0)}.$$

4.9 Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

Exercici 4.9.1. *Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades*

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-1/2)^2}dz.$ *b)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z-2)^4}dz.$ *c)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{e^{i\theta}}\,d\theta.$ ◁

Solució:

a) $2\pi i\sqrt{e}$. b) $\frac{-\pi i\cos(2/3)}{3^5}$. c) 2π.

4.10 Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

Exercici 4.10.1. *Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:*

a) $\displaystyle\frac{z^2+1}{z^2-1}$ *b)* $z^2\sin z$ *c)* $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}$. ◁

Solució:

a) Té zeros simples a $\pm i$.

b) Té un zero d'ordre 3 a l'origen i zeros simples a $k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

c) Té 4 zeros simples: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$.

Exercici 4.10.2. *Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2\cos z^3 + z^6 - 2$.* ◁

Solució: *Solució proposada per Clara Valls Moreso*: Trobem la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció:

$$f(z) = 2\cos(z^3) + z^6 - 2.$$

Recordem que:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^6)$$

Per tant,

$$\cos(z^3) = 1 - \frac{z^6}{2!} + \frac{z^{12}}{4!} + O(z^{18})$$

Llavors:

$$2\cos(z^3) = 2 - z^6 + \frac{z^{12}}{12} + O(z^{18})$$

I per tant:

$$f(z) = 2\cos(z^3) + z^6 - 2 = \left(2 - z^6 + \frac{z^{12}}{12} + O(z^{18})\right) + z^6 - 2 = \frac{z^{12}}{12} + o(z^{17})$$

Per tant, $z = 0$ és un zero de multiplicitat 12.

Exercici 4.10.3. *Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:*

a) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$.

b) $f(z) = (z^2 - \pi^2)\sin z/z$.

c) $f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3$.

Aquí $\sqrt{\cdot}$ *és la determinació de l'arrel quadrada en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *que val* -1 *en* $z = 1$. ◃

Solució:

(a) Tenim que $e^{z^2} - 1 = 0$ si i només si $z^2 = \log 1 = 2\pi i\, k$, $k \in \mathbb{Z}$, és a dir, $z_k^{\pm} = \pm\sqrt{2\pi i k}$.

Considerem primer l'arrel que correspon a $k = 0$, és a dir $z_0 = 0$. Prenent la sèrie de l'exponencial a l'entorn del 0 tenim que $e^{z^2} - 1 = z^2 + \cdots$, i per tant $z^2(e^{z^2} - 1) = z^4 + \cdots$. Així doncs, $z_0 = 0$ és una arrel de multiplicitat 4.

Per a $k \neq 0$ les arrels són de multiplicitat 1. Sigui z_k alguna de les arrels de dalt amb $k \neq 0$. Tenim que $e^{z_k^2} = 1$. Desenvolupem $g(z) = e^{z^2} - 1$ a l'entorn de z_k. Tenim que $g'(z) = e^{z^2} 2z$, i per tant $g'(z_k) = 2z_k \neq 0$. El desenvolupament dona doncs

$$g(z) = g(z_k) + g'(z_k)(z - z_k) = 2z_k(z - z_k) + \cdots$$

Per altra part, a l'entorn de z_k tenim que $z = z_k + (z - z_k)$, i tot plegat

$$f(z) = [z_k + (z - z_k)]^2[2z_k(z - z_k) + \cdots] = 2z_k^2(z - z_k) + \cdots$$

la qual cosa mostra que la multiplicitat de z_k és efectivament 1.

(b) La funció $\sin z$ s'anul·la als punts $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i el factor $z^2 - \pi^2 = (z - \pi)(z + \pi)$ s'anul·la $z_{\pm 1} = \pm\pi$. Considerem doncs diferents $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $k = 0$. Tenim que $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ i per tant $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \cdots$. Amb això

$$(z^2 - \pi^2)\frac{\sin z}{z} = -\pi^2 + \big(1 + \frac{\pi^2}{3!}\big)z^2 + \cdots$$

i per tant $z_0 = 0$ no és de fet un zero de la funció donada.

(ii) $k = \pm 1$. Suposem $k = 1$; el cas $k = -1$ es fa anàlogament. Fent Taylor a l'entorn de $z_1 = \pi$, trobem que

$$\sin z = -(z - \pi) + \frac{1}{3!}(z - \pi)^3 + \cdots = (z - \pi)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(\pi) \neq 0$. Per tant

$$f(z) = (z - \pi)(z + \pi)\frac{(z - \pi)h(z)}{z} = (z - \pi)^2\frac{(z + \pi)h(z)}{z}.$$

El segon factor en aquest producte és una funció holomorfa no nul·la l'entorn de π, i per tant $z_1 = \pi$ és un zero de multiplicitat 2.

(iii) $z_k = k\pi$, $k \neq 0, \pm 1$. Desenvolupant per Taylor a l'entorn de z_k com al cas anterior, tenim que

$$\sin z = (-1)^k(z - k\pi) + \frac{(-1)^{k+1}}{3!}(z - k\pi)^3 + \cdots = (z - k\pi)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(k\pi) \neq 0$. Aleshores

$$f(z) = (z - k\pi)\frac{(z^2 - \pi^2)h(z)}{z},$$

i el segon factor en aquest producte és una funció holomorfa i no nul·la un entorn de $z_k = k\pi$. Per tant, z_k és un zero de multiplicitat 1.

(c) En primer lloc mirem a quina determinació de l'argument $\arg(z)$ correspon l'arrel donada. Essent el semieix de discontinuïtats $(-\infty, 0]$ tenim que

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}\,(z) + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

on $\mathrm{Arg}\,(z)$ denota l'argument principal (amb angle a $(-\pi, \pi)$). Aleshores

$$\sqrt{1} = e^{\frac{1}{2}(\ln|1| + i\mathrm{Arg}\,(1) + 2i\pi k)} = e^{i\pi k}.$$

Ens diuen que $\sqrt{1} = -1$, d'on deduïm que $k = 1$ (o qualsevol altre k senar que vulguem; hi ha dues arrels, la que correspon als k parells, i aquesta, que correspon als k senars). Amb això, l'argument triat és tal que

$$\arg(z) \in (\pi, 3\pi).$$

Aleshores

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg(z))} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$$

és un nombre complex amb arguments a $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. En particular, veiem que $\sqrt{z}$ no pot ésser 2 (és l'altra arrel que pot valdre 2, però no aquesta), i per tant la funció $f(z)$ no té cap zero.

Exercici 4.10.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ a una regió Ω és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.* $\triangleleft$

Solució: En efecte, suposem que existeix $z_0 \in \Omega$ i $f(z_0) \neq 0$. Llavors, per continuïtat, existeix $r > 0$ complint que $f(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$. Per hipòtesi, $f \cdot g \equiv 0$ i, per tant, $g \equiv 0$ en $D(z_0, r)$. Aplicant el Principi de Prolongació analítica, com que Ω és una regió, es compleix que $g \equiv 0$ en Ω.

Com a alternativa, raonem per contradicció. Si f i g no són idènticament nul·les, els seus conjunts de zeros $Z(f)$ i $Z(g)$ són successions de punts aïllats i, en particular, conjunts com a molt numerables. Aleshores $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$ també seria numerable, en contra de la hipòtesi.

Exercici 4.10.5. *Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0,1)$ i tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:*

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n, aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n, aleshores f és constant. ◁

Solució:

(a) Observem en primer lloc que la funció $h(z) := \overline{f(\bar{z})}$ és holomorfa a $\mathbb{D}$. Amb la intenció de veure que $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$, considerem primer $g(z) = f(\bar{z})$. Com que f és holomorfa tenim que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, i per tant $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Aleshores

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial g}{\partial z}} = \overline{0} = 0.$$

Per tant la funció $F(z) = \overline{f(\bar{z})} - f(z)$ és holomorfa a $\mathbb{D}$. Per a veure que $F \equiv 0$ utilitzarem el principi de prolongació analítica, és a dir que el conjunt de zeros d'aquesta funció no pot tenir punts d'acumulació a $\mathbb{D}$, llevat que sigui 0. Observem però que, per hipòtesi,

$$F(a_n) = f(a_n) - f(a_n) = 0.$$

Com que $\{a_n\}_n$ s'acumula a 0, deduïm que necessàriament $F \equiv 0$, com volíem.

(b) De l'apartat (a) en tenim que si $x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$ aleshores $f(x) \in \mathbb{R}$. Per tant, mirant la funció només a la recta real i aplicant el teorema de Rolle tenim que existeixen punts $\beta_n \in (a_{2n+1}, a_{2n})$ tals que $f'(\beta_n) = 0$. Com que $\lim_n a_n = 0$, necessàriament també $\lim_n \beta_n = 0$. Ara el principi de prolongació analítica, aplicat a la funció $f' \in H(\mathbb{D})$, implica que $f' \equiv 0$, i per tant f és constant.

Exercici 4.10.6. *Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:*

(a) $|f(1/n)| \leqslant 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geqslant 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1+n^3) - 3\ln n$ per a $n > 1$. ◁

Solució: a) És clar que $f(0) = 0$ per continuïtat. Vegem que, de fet, $f \equiv 0$. Ho farem raonant per l'absurd, factoritzant el zero de l'origen: sabem que existeix n_0 i $a_{n_0} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ amb

$$f(z) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n z^n = a_{n_0} z^{n_0} + \mathcal{O}(|z|^{n_0+1}).$$

Així, per z prou petit (podem prendre $|z| < \frac{|a_{n_0}|}{2C}$, amb C determinat a la següent línia), tenim que

$$|f(z)| = \left|a_{n_0} z^{n_0} + \mathcal{O}(|z|^{n_0+1})\right| \geqslant |a_{n_0} z^{n_0}| - C|z|^{n_0+1} \geqslant \frac{|a_{n_0}|}{2}|z|^{n_0}.$$

Combinant-ho amb la hipòtesi, obtenim

$$\frac{1}{2^n} \geqslant \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \geqslant \frac{|a_{n_0}|}{2}(1/n)^{n_0},$$

és a dir que

$$\frac{n^{n_0}}{2^n} \geqslant \frac{|a_{n_0}|}{2},$$

la qual cosa contradiu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n_0}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n_0(\log_2 n)-n} = 0.$$

b) $f(z) = \mathrm{Log}\,(z^3+1)$ i PPA.

Exercici 4.10.7. *Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D(0,2)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$.* ◃

Solució: Tenim que $f(z) = z^2$ per a tots els $|z| = 1$. Pel principi de prolongació analítica, això obliga a que $f(z) = z^2$ a tot el disc (ja que $f(z)$ i z^2 coincideixen en un conjunt no numerable i amb punts d'acumulació a l'interior de $D(0,2)$). A més, $f(0) = 0$.

Exercici 4.10.8. *Sigui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat.* ◃

Solució: Suposem que f no és constant. Aleshores $f(\Omega)$ és un obert. Per $y \in f(\Omega)$ tenim que $y = f(z)$ i, per tant, $f(y) = f(f(z)) = f(z) = y$. Per tant, f és la identitat en un obert no buit. Pel PPA, f és la identitat en Ω.

Exercici 4.10.9. *(a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leqslant C|z|^n$, per a $|z| \geqslant R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n.*

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació*: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \ldots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z-a_1)\cdots(z-a_n)$.* ◃

Solució: (a) Escrivim f en sèrie de potències al voltant del 0: $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$. Per les desigualtats de Cauchy:

$$|a_m| = \frac{|f^{(m)}(0)|}{m!} \leqslant \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^m}, \qquad \forall r > 0.$$

Prenem $r \geqslant R$, de manera que valgui l'acotació que dona l'enunciat; aleshores,

$$|a_m| \leqslant \frac{Cr^n}{r^m}.$$

Veiem per tant que si $m > n$, fent $r \to +\infty$, obtenim $a_m = 0$. Tornant a la sèrie inicial, queda

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

(b) Per hipòtesi existeix $R > 0$ tal que $|f(z)| \geqslant 1$ si $|z| \geqslant R$. Mirem ara f a $\overline{D(0,R)}$. Com que la funció no s'anul·la la frontera del disc, el nombre de zeros que té f a $D(0,R)$ és necessàriament finit (recordem que el principi de prolongació analítica diu que els zeros són aïllats i per tant només es podrien acumular a la frontera).

Diem doncs $a_1, \ldots, a_n$ als zeros de f, comptats tantes vegades com la seva multiplicitat. Aquests punts són tots a $D(0,R)$. Aleshores la funció

$$F(z) = \frac{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}{f(z)}$$

és holomorfa als punts a_j, $j = 1, \ldots, n$, i per tant a tot arreu.

Amb la intenció d'aplicar l'apartat (a), diem $M = \max_j |a_j|$ i acotem,

$$|F(z)| \leqslant \frac{(|z|+|a_1|)\cdots(|z|+|a_n|)}{|f(z)|} \leqslant \frac{(|z|+M)^n}{|f(z)|}.$$

Prenem $R \geqslant M$ tal que $|f(z)| \geqslant 1$ si $|z| \geqslant R$. Aleshores, per a $|z| \geqslant R$ tenim que

$$|F(z)| \leqslant \frac{(2|z|)^n}{1} = C|z|^n, \qquad C = 2^n,$$

de manera que podem aplicar l'apartat (a) i concloure que F és un polinomi. Com que F no té zeros pel teorema 4.40, concloem que F és constant i, per tant, $f = C(z-a_1)\cdots(z-a_n)$.

Exercici 4.10.10. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim*

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x,0) = g(x) \quad v(x,0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega. \qquad \triangleleft$$

Solució: Com que Ω és obert i tca la recta real, la intersecció és un obert relatiu i, per tant, té punts d'acumulació. Com que per tot $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim que

$$f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = g(x) + ih(x).$$

Dit d'una altra manera, per tot $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim que

$$f(z) = g(z) + ih(z).$$

En ser funcions holomorfes, i coincidir en un conjunt amb punts d'acumulació en Ω, pel PPA han de coincidir en tot Ω.

4.11 El principi del mòdul màxim

Exercici 4.11.1. *Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.52.*

Exercici 4.11.2. *Trobeu el màxim de:*

a) $|\cos z|$ *i* $|\sin z|$ *a* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ *i* $|e^{z^2}|$ *a* $|z| \leqslant 1$. ◁

Solució: (a) Pel principi del mòdul màxim, el màxim de $f(z) = |\cos z|$ a $\bar{\Omega} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ s'assoleix a la frontera. Estudiem doncs el comportament d'aquesta funció als quatre costats del quadrat donat.

(i) $y = 0$; $x \in [0, 2\pi]$. Aquí tenim que $f(x) = |\cos x|$, i el màxim s'assoleix als punt $x = 0, \pi, 2\pi$. En aquests punts el valor de la funció és 1.

(ii) $x = 0, 2\pi$, $y \in [0, 2\pi]$. Aquí, per la periodicitat de $\cos z$, tenim que $f(2\pi + iy) = f(iy) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Aquesta funció és creixent, i per tant té el màxim a 2π. Per tant el valor màxim en aquest segments correspon a $f(2\pi\, i) = f(2\pi + 2\pi i) = \dfrac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2}$.

(iii) $y = 2\pi$, $x \in [0, 2\pi]$. Aquí $f(x + 2\pi i) = \dfrac{e^{ix}e^{-2\pi} + e^{-ix}e^{2\pi}}{2}$. Amb això

$$|\cos(x + 2\pi i)|^2 = \frac{1}{4}\big(e^{-4\pi} + e^{-2ix} + e^{2ix} + e^{4\pi}\big) = \frac{1}{4}\big(e^{4\pi} + e^{-4\pi} + 2\cos(2x)\big).$$

Això és màxim quan $\cos(2x) = 1$, és a dir, als punts $x = 0, \pi, 2\pi$. El valor màxim és aleshores $|\cos(2\pi i)| = \frac{1}{2}\big(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\big)$.

Com que $\frac{1}{2}\big(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\big) > 1$, el valor màxim és $\frac{1}{2}\big(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\big)$ i s'assoleix als punts $2\pi i$, $2\pi + 2\pi i$ i $\pi + 2\pi i$.

El cas $|\sin z|$ es fa anàlogament.

(b) Pel principi del màxim

$$\max_{|z| \leqslant 1} |e^z| = \max_{|z|=1} |e^z| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re} z}.$$

Com que la funció exponencial (real) és creixent, és clar que el màxim s'assolirà al punt del cercle on $\operatorname{Re} z$ sigui màxim, és a dir, al punt $z = 1$.

Anàlogament, si posem $z = x + iy$, tenim que

$$\max_{|z| \leqslant 1} |e^{z^2}| = \max_{|z|=1} |e^{z^2}| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re} z^2} = \max_{|z|=1} e^{x^2 - y^2}.$$

Aquí és clar que el màxim s'assoleix quan x^2 és màxim i y^2 mínim, és a dir, als punts $z = \pm 1$.

Exercici 4.11.3. *Trobeu totes les funcions holomorfes en* $\mathbb{D}$ *tals que* $f(1/2) = 3$ *i* $|f(z)| \leqslant 3$ *si* $|z| < 1$. ◁

Solució: Només pot ser $f(z) = 3$ per a tot $z \in \mathbb{D}$ pel principi del mòdul màxim.

Exercici 4.11.4. *Es considera* $f(z) = e^{\cos(z)}z^2$ *i el disc* D *de radi* 2 *centrat a* 5*. Provar que* $f(z)$ *assoleix el valor màxim i mínim del mòdul a* $|z - 5| = 2$. Indicació*: considerar* $1/f(z)$*.* ◁

Solució: La funció és holomorfa al disc donat ja que és producte d'holomorfes, llavors, pel principi del mòdul màxim, el màxim de $|f(z)|$ s'assoleix a la frontera. Com que la funció $f(z)$ només és zero quan $z = 0$ i 0 no és del disc, la funció $f(z)$ no s'anul·la mai en aquest disc, llavors la funció $g(z)$ és holomorfa en ell i el seu mòdul assoleix el màxim a la frontera. Com que el màxim de $|g| = 1/|f|$ és el mínim de $|f|$ hem acabat.

Exercici 4.11.5. *Sigui* f *una funció holomorfa en el disc* $D(0, R)$*,* $R > 0$*. Definim*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 \leqslant r < R.$$

Demostreu que si f *no és constant, aleshores* $M(r)$ *és estrictament creixent a* $[0, R)$*.* ◁

Solució: Aplicació del principi del mòdul màxim.

Exercici 4.11.6. *Sigui* f *una funció holomorfa en un obert connex* Ω *i* D *un disc obert tal que* $\overline{D} \subset \Omega$*. Suposeu que* $|f(z)| = c$ *per tot* $z \in \partial D$*, on* c *és una constant. Proveu que* f *té almenys un zero en* D *o bé* f *és constant en* Ω*.* Indicació*: Distingiu segons si* $c = 0$ *o* $c > 0$*. En el segon cas, proveu que si* f *no té zeros en* D*, aleshores* f *és constant en* D*.* ◁

Solució: Suposem que f no té cap zero a D i veurem que necessàriament ha de ser constant. En aquest supòsit sabem que $1/f \in H(D)$, i pel principi del mòdul màxim

$$\max_{\overline{D}} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \max_{\partial D} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{1}{c}.$$

Amb això tenim que $|f(z)| \geqslant c$ per a tot $z \in D$. Però per hipòtesi (i pel principi del mòdul màxim), per a aquests z:

$$|f(z)| \leqslant \max_{\partial D} |f(z)| = c.$$

Tot plegat $|f(z)| = c$ per a tot $z \in D$. Com ja vam veure, tota f holomorfa de mòdul constant és constant (conseqüència de les equacions de Cauchy-Riemann). Per tant f és constant a D. Però el principi de prolongació analítica obliga a que aleshores f sigui constant a tot Ω (la component connexa del domini de definició de f que conté D).

Exercici 4.11.7. *Sigui* f *una funció holomorfa i no constant en* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, un obert connex. Suposeu que existeix* $a \in \Omega$ *tal que* $|f(a)| \leqslant |f(z)|$ *per a tot* $z \in \Omega$*. Proveu que aleshores* $f(a) = 0$*.* ◁

Solució: Suposem que $f(a) \neq 0$. Aleshores $1/f$ seria holomorfa ja que no hi hauria cap zero de f en Ω. Per tant, pel principi del mòdul màxim, al tenir $1/f$ un extrem a l'interior ha de ser constant, en contradicció amb la hipòtesi de l'enunciat.

Exercici 4.11.8. *Sigui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,*

$$\overline{\{z;\, |f(z)| < c\}} = \{z;\, |f(z)| \leqslant c\}. \qquad \triangleleft$$

Solució: Feu servir el Teorema de l'aplicació oberta.

La inclusió $\overline{\{z;\, |f(z)| < c\}} \subset \{z;\, |f(z)| \leqslant c\}$ és conseqüència de la continuïtat de f.

Per veure la inclusió contrària, suposem que $z \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| = c$. Aleshores, com que f no és constant, el teorema de l'aplicació oberta diu que $f(D(z, 1/n))$ és un obert. Com que conté c, contindrà una bola centrada en c i en particular conté $(1 - \varepsilon)c$ per un cert ε prou petit, és a dir que existeix $z_n \in D(z, 1)$ tal que

$$|f(z_n)| = (1 - \varepsilon)|c| < |f(z)|.$$

Per construcció tenim que $z_n \to z$, i hem vist que $z_n \in \{z;\, |f(z)| < c\}$. Per tant, $z \in \overline{\{z;\, |f(z)| < c\}}$, tal com volíem veure.

5 Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

5.1 Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

Exercici 5.1.1. *Considerem el camí* $\gamma(t) = 4e^{it}\cos\frac{2}{3}t$, $(0 \leqslant t \leqslant 6\pi)$. *Calculeu* $\operatorname{Ind}(\gamma, 3)$ *i* $\operatorname{Ind}(\gamma, 1)$.
Indicació*: Comproveu que si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *és una corba,* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *és una partició de* $[a, b]$ *i diem* γ_k *a la restricció de* γ *a l'interval* $[t_{k-1}, t_k]$, *per* $k = 1, \ldots, n$, *llavors l'increment de l'argument de* γ *és igual a la suma dels increments dels arguments de les* γ_k*'s.* ◃

Solució: Per definició,

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 3) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-3}.$$

Com que la primitiva és un logaritme, per poder fer el càlcul cal trencar la integral en trossos cada vegada que $z - 3$ talli la semirecta dels reals positius, per exemple, en aquest cas per poder usar alguna determinació del logaritme log en $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$. Busquem doncs solucions de

$$4e^{it}\cos\frac{2}{3}t - 3 = x$$

amb $x > 0$. En particular, tindrem que $4e^{it}\cos\frac{2}{3}t \in \mathbb{R}$ amb $4e^{it}\cos\frac{2}{3}t > 3$. Això passa quan $e^{it} = \pm 1$ i el cosinus contribueix favorablement, ja que quan $\cos\frac{2}{3}t = 0$ la segona condició no pot ocórrer. Vegem primer els valors de t tals que $\gamma(t)$ és un nombre real no nul:

- $t = 0$: $\gamma(t) = 4\cos 0 = 4$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) = \operatorname{Im}(4ie^{i0}\cos 0 - 4e^0 \sin 0) = 4$. Creua doncs del semiplà de part imaginària negativa cap al de part imaginària positiva.
- $t = \pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{2\pi}{3} = -4(-1/2) = 2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) = 4e^{i\pi}\cos\frac{2}{3}\pi > 0$. Ara també creua de baix a dalt. Notem que no hi ha cap contradicció, entremig ha creuat l'origen perquè s'ha anul·lat el cosinus!
- $t = 2\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{4\pi}{3} = 4(-1/2) = -2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 3\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{6\pi}{3} = -4$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 4\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{8\pi}{3} = 4(-1/2) = -2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 5\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{10\pi}{3} = -4(-1/2) = 2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) > 0$.

- $t = 6\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{12\pi}{3} = 4$, $\mathrm{Im}\,(\gamma'(t)) > 0$.

Veiem que en estudiar l'índex de γ respecte a 3, no cal fer res, ja que la determinació del logaritme només falla als extrems d'integració:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,(\gamma,3) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-3} = \frac{1}{2\pi i}\left[\log(\gamma(t)-3)\right]_0^{6\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{t\nearrow 6\pi}\log(\gamma(t)-3) - \lim_{t\searrow 0}\log(\gamma(t)-3)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\ln 1 + i(2\pi+2\pi k_0) - \ln 1 - i(2\pi k_0)\right] = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1.\end{aligned}$$

Per calcular els límits laterals, hem usat que la corba creua els dos cops de baix cap a dalt, i això determina l'argument en els valors propers.

Per calcular l'índex al voltant de 1, ara creuarem tres vegades la semirecta $[1,\infty)$, però el primer camí no fa cap volta,ja que roman a la part imaginària positiva i el darrer camí roman a la part real negativa, i cada vegada haurem acumulat un argument de 2π, ja que en tots els casos, el camí creua de la part imaginària negativa cap a la positiva. Així,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,(\gamma,1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2\pi i}\Big(\left[\log(\gamma(t)-1)\right]_0^{\pi} + \left[\log(\gamma(t)-1)\right]_\pi^{5\pi} + \left[\log(\gamma(t)-1)\right]_{5\pi}^{6\pi}\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\left([i2k\pi] + [i2k\pi] + [i2k\pi]\right) = \frac{6\pi i}{2\pi i} = 3.\end{aligned}$$

5.2 El teorema global de Cauchy

Exercici 5.2.1. *Considerem el camí $\gamma(t) = (1+e^{it}+e^{-it})e^{it}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu*

$$\int_\gamma \frac{3z-3}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\,dz. \quad \triangleleft$$

Solució: La corba és una corba parametritzada en polars: $1+e^{it}+e^{-it} = 1+2\cos t$, talla l'eix real a l'origen per $t = 2\pi/3$ i $t = 4\pi/3$, en els punt $x = 3$ per $t = 0$ i en $x = 1$ per $t = \pi$. Podem comprovar gràficament que té index 2 respecte la component interior i índex 1 respecte la component intermitja. Diguem $\mathrm{Ind}\,(\gamma, 1/2) = 2$ i $\mathrm{Ind}\,(\gamma, 2) = 1$. Finalment, pel teorema de Cauchy global trobem que

$$\int_\gamma \frac{3z-3}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\,dz + 2\int_\gamma \frac{1}{z-2}\,dz = 2\pi i(1\cdot 2 + 2\cdot 1) = 8\pi i.$$

Exercici 5.2.2. *Considerem el camí $\gamma(t) = (2\sin(2t-\frac{\pi}{3}), 2\sin(3t))$, amb $t \in [0, 2\pi]$. Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$, i trobeu el valor de*

$$\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1}\,dz. \quad \triangleleft$$

Solució:

Es tracta d'una corba mecànica anomenada corba de Lissajous, vegeu `https://ca.wikipedia.org/wiki/Corba_de_Lissajous`. L'índex és 0 a les components que contenen ± 1, és 0 a la component no fitada, i és ± 1 a les altres components. En particular, $\operatorname{Ind}(\gamma, i) = -1$ i $\operatorname{Ind}(\gamma, -i) = 1$, mentre que $\operatorname{Ind}(\gamma, \pm 1) = 0$. Considerem $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{\pm 1\}$ i trobem que $\Gamma \approx 0$ en Ω. Com que

$$\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1}\, dz = \int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}/2i}{z-i}\, dz - \int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}/2i}{z+i}\, dz,$$

definint $h(z) = e^{\frac{1}{z^2-1}}/2i \in H(\Omega)$, per la FIC global trobem

$$\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Ind}(\gamma, i) h(i) - \operatorname{Ind}(\gamma, -i) h(-i)\right) = -\frac{2\pi}{\sqrt{e}}.$$

5.3 Homotopia i teorema de Cauchy

5.4 Dominis simplement connexos

Exercici 5.4.1. *Sigui $u : D \to \mathbb{R}$ una funció harmònica en un domini simplement connex Ω. Demostra que existeix una funció $v : D \to \mathbb{R}$ harmònica conjugada d'u (vegeu l'exercici 4.3.3).* ◁

Solució: Si $F = U + iV$ satisfà que

$$\bar\partial F = 0 \iff \overline{\partial \bar U} = \bar\partial U = -i\bar\partial V = \overline{i\partial \bar V},$$

vegeu l'observació 3.25. Com que U i V prenen valors reals tenim que $\bar U = U$ i $\bar V = V$, i trobem

$$\bar\partial F = 0 \iff \overline{\partial U} = -i\bar\partial V \iff \partial U = i\partial V \iff \partial F = 2\partial U.$$

Considerem u harmònica. Aleshores $f = 2\partial u$ és holomorfa. Per la proposició 5.29 té una primitiva holomorfa $F = U + iV$, que ha de satisfer que $\bar\partial F = 0$ i $\partial F = f$. Prenem doncs $v = V$. Aleshores per Cauchy-Riemann tenim que

$$\bar\partial(u + iV) \overset{\mathrm{CR}}{=} \bar\partial u - \overline{\partial U} \overset{\mathrm{CR}}{=} \overline{\partial u} - \frac{\overline{\partial F}}{2} = \frac{\overline{f}}{2} - \frac{\overline{f}}{2} = 0.$$

Per veure que V és harmònica, notem que

$$4\bar\partial\partial V = 4\bar\partial(-i\partial U) = -2i\bar\partial\partial F = -2i\bar\partial f = 0.$$

Exercici 5.4.2. *Siguin $f, g \in H(\mathbb{C})$ tals que $f^2 + g^2 \equiv 1$. Demostra que existeix $h \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos(h)$ i $g = \sin(h)$.* ◁

Solució: Tenim
$$(f+ig)(f-ig)=1.$$
Com que $\mathbb{C}$ és simplement connex, $f+ig\in H(\mathbb{C})$ i $f+ig:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\backslash\{0\}$, de la proposició 5.30 n'inferim que existeix una funció $\mathcal{L}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que
$$e^{\mathcal{L}(z)}=f(z)+ig(z).$$
A més, com que
$$f(z)-ig(z)=\frac{1}{f(z)+ig(z)}=e^{-\mathcal{L}(z)},$$
sumant i restant convenientment trobem que
$$f(z)=\frac{e^{\mathcal{L}(z)}+e^{-\mathcal{L}(z)}}{2}=\cos(-i\mathcal{L}(z)),$$
i
$$g(z)=\frac{e^{\mathcal{L}(z)}-e^{-\mathcal{L}(z)}}{2i}=\sin(-i\mathcal{L}(z)).$$

Exercici 5.4.3. *Demostra que si $\mathbb{C}_\infty\backslash\Omega$ és connex i Ω és un obert connex, aleshores tota corba tancada γ és homòtopa a 0.* ◁

Solució: Per començar, notem que γ^* i totes les components fitades de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ estan contingudes en Ω per la hipòtesi. Per tant, el compacte K format per la unió de tots aquests conjunts, també, i està a distància positiva de Ω^c, diguem-ne d.

Si la corba γ és una poligonal, aleshores n'hi ha prou amb connectar cada vèrtex de la corba amb un punt z_0 de K i per tant, com que Ω és arc-connex, podem unir z_0 amb qualsevol d'aquests vèrtexs p_j per un camí γ_j que comença en z_0 i acaba en p_j. Ara, per la resta de punts de la corba interpolem entre els dos camins: si $z=(1-t)p_j+tp_{j+1}$, aleshores definim $\gamma_z:=(1-t)\gamma_j+t\gamma_{j+1}$. A pratir d"aquí, la creació de l'homotopia entre el camí γ i el camí constant z_0 és un exercici elemental.

Si γ és una corba qualsevol, podem trobar una poligonal a distància $d/2$ de γ, i veure'n l'homotopia es pot fer mitjançant el lema 5.23.

5.5 Funcions harmòniques

Exercici 5.5.1. *Demostra el lema 5.34 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament.* ◁

Solució: Tenim
$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=(u_x)_x+(u_y)_y\overset{\mathrm{CR}}{=}(v_y)_x-(v_x)_y=0,$$
on hem usat el teorema d'igualtat de les derivades creuades. De la mateixa manera,
$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=(v_x)_x+(v_y)_y\overset{\mathrm{CR}}{=}-(u_y)_x+(u_x)_y=0.$$

Exercici 5.5.2. *Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre $\mathbb{D}$ i Ω amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6, les derivades de les quals estenen contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i a $\partial\Omega$ respectivament. Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que*

$$\mathcal{L}(\varphi'(z_0)) = \operatorname{Re}\mathcal{L}(\varphi')(0) + \frac{i}{2\pi r}\int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}(\varphi'(z))H(z,z_0)|dz|. \qquad \triangleleft$$

Solució: Notem que $\varphi' \neq 0$ per hipòtesi, i $\mathbb{D}$ és simplement connex. Per la proposició 5.30 existeix una determinació del logaritme $\mathcal{L}$ i prenem $\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{L}$. Com que $\mathcal{L}(\varphi')$ és holomorfa, obtenim el resultat per la fórmula de representació de Herglotz aplicada a $\mathcal{L}\circ\phi'$. Notem que aquesta serà per radis menors que 1, però es pot estendre per continuïtat a radi 1.

Exercici 5.5.3. *El* problema de Dirichlet *consisteix en trobar una funció harmònica en un domini obert Ω que sigui contínua fins la seva frontera $\partial\Omega$ i amb un valor prefixat a $\partial\Omega$. Suposem que ϕ_1 i ϕ_2 són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Provar que si Ω és simplement connex, aleshores $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt d'Ω.* Indicació*: trobar la funció v harmònica conjugada de $\phi_1 - \phi_2$ i aplicar el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2 + iv$.* $\triangleleft$

Solució: Considerem la funció conjugada v de $\phi_1 - \phi_2$ (existeix pel problema anterior). Aleshores la funció $e^{\phi_1-\phi_2+iv}$ és holomorfa en Ω. Pel principi del mòdul màxim i mínim, els extrems s'assoleixen a la vora, on tenim que

$$|e^{\phi_1-\phi_2+iv}| = 1.$$

Per tant, la funció és constant i també ho serà $\phi_1 - \phi_2$.

Exercici 5.5.4. *Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem que la temperatura val $\operatorname{Im} z$ als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular veieu que la temperatura al centre del disc és $1/\pi$.* $\triangleleft$

Solució: Per l'exercici anterior, estem buscant la solució del problema de Dirichlet amb dada de frontera $f(x+iy) = y\chi_{y>0}$. Pel teorema 5.39, i argumentant per continuïtat, trobem

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)P(z,0)|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi}.$$

6 Sèries de Laurent

6.1 Sèries de Laurent i singularitats

Exercici 6.1.1. *Calcular la sèrie de Laurent de*

a) $\dfrac{z-1}{z(z-4)^3}$ *a* $0 < |z-4| < 4$.

b) $1/e^{(1-z)}$ *per* $|z| > 1$. ◁

Solució:

$$\frac{z-1}{z(z-4)^3} = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{4+(z-4)}\right) =$$

$$\frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{4}\frac{1}{1+(z-4)/4}\right) = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^n}{4^n}\right) =$$

$$\frac{3}{4}\frac{1}{(z-4)^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(z-4)^2} - \frac{1}{64}\frac{1}{z-4} + \sum_{n\geqslant 3}(-1)^{n+1}\frac{(z-4)^{n-3}}{4^{n+1}}.$$

Nota: amb `Sage` podem fer servir `taylor`.

b) Està centrada al zero,

$$\frac{1}{e^{(1-z)}} = e^{z-1} = e^{-1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}.$$

Exercici 6.1.2. *Per a la funció* $f(z) = \dfrac{\sin z\cos 3z}{z^4}$

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a* $z=0$.
2. *Calcular* $\oint f(z)dz$ *si es recorre* $|z|=1$ *un cop i en sentit antihorari.* ◁

Solució: a) Si fem servir la identitat $2\cos a\sin b = \sin(a+b)-\sin(a-b)$ podem escriure $\sin z\cos 3z = \frac{1}{2}(\sin(4z)-\sin(2z))$ llavors

$$\sin z\cos 3z = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4z)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2z)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}-2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}.$$

Llavors

$$f(z) = \frac{1}{2z^4}\left(2z - \frac{4^3-2^3}{3!}z^3 + \sum_{n\geqslant 3}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}-2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{14}{3}\frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 3}\frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{4^{2n-1}-2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-5}.$$

b) La integral és $2\pi i(-14/3)$.

Exercici 6.1.3. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ *a les corones: (a)* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$*, (b)* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$*, (c)* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ *i (d)* $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$*.* ◁

Solució: a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, el centre és $z = 0$

$$-\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, el centre és $z = 1$

$$\frac{1}{z-1}\frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1}(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}(z-1)^n.$$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, sigui $w = 1/z$, desenvolupem al voltant de $w = 0$ (z amb centre a ∞)

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{w^2}{1-w} = w^2(\sum_{n\geqslant 0} w^n) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots$$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. Aquí posem $z - 1 = 1/w$ i

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{w^2}{1+w} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \cdots$$

Exercici 6.1.4. *Sigui* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$*, donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a* 0 *allà on* f *és analítica (*$|z| < 1, 1 < |z| < 3$ *i* $|z| > 3$*).* ◁

Solució: Primer veiem que $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-3}$. Tenim casos

- Si $|z| < 1$, $\dfrac{1}{z-1} = -\sum_{n\geqslant 0} z^n$.
- Si $|z| > 1$, $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z(1-1/z)} = \dfrac{1}{z}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{z^n}$.

- Si $|z| < 3$, $\dfrac{1}{z-3} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-z/3} = -\dfrac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{z^n}{3^n}$.
- Si $|z| > 3$, $\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{z(1-3/z)} = \dfrac{1}{z}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{3^n}{z^n}$.

Combinem aquestes expressions i obtenim

a) Si $|z| < 1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} z^n - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$$

b) Si $1 < |z| < 3$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{6}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{3^n}.$$

c) Si $|z| > 3$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{-1+3^{n-1}}{z^n}.$$

Exercici 6.1.5. *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent de*

a) $f(z) = z^2\cos\left(\dfrac{1}{3z}\right)$ *per* $|z| > 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ *per* $0 < |z| < R$. ◁

Solució: a) La singularitat es dona quan $z = 0$, fem el canvi $z = 1/w$, llavors

$$f(z) = f(1/w) = \frac{1}{w^2}\cos(w/3) = \frac{1}{w^2}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{w^{2n}}{3^{2n}2n!} = z^2 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n)!}\frac{1}{z^{2(n-1)}}.$$

b) Veiem que les singularitats es donen quan $e^z = 1$. Això passa si $e^{x+iy} = 1$ que equival a $x = 0$, $y = 2k\pi$. Com que el terme no nul més proper al zero i que anul·la el denominador és $\pm 2\pi i$ tenim que $R = 2\pi$ i la sèrie de Laurent la tenim per $0 < |z| < 2\pi$.

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z+z^2/2!+z^3/3!+\cdots} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z/2+z^2/3!+\cdots} =$$
$$= \frac{1}{z}\left(1-(z/2+z^2/3!+\cdots)+(z/2+z^2/3!+\cdots)^2-(z/2+z^2/3!+\cdots)^3+\cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{720}z^4+\cdots\right).$$

Nota: els coeficients (multiplicats per $n!$) de la sèrie de $z/(e^z-1)$ són els famosos nombres de Bernoulli, molt importants en teoria de nombres.

Exercici 6.1.6. *Quina és la corona (o anell) de convergència de* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$*?* ◁

Solució: Estudiem la part regular i la part singular.

- Regular. $1 + z/2 + z^2/2^2 + z^3/2^3 + \dots$
- Singular $1/2z + 1/2^2z^2 + 1/2^3z^3 + \dots$

Fem servir el criteri del quocient per trobar el radi de convergència:

- Per la part regular volem que z sigui tal que $\lim |c_{n+1}/c_n| < 1$. Tenim que

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(z^{n+1}/2^{n+1})}{(z^n/2^n)}\right| = |z/2| < 1.$$

  Hi ha convergència si $|z| < 2$.

- Per la part singular fem el mateix

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(1/2^{n+1}z^{n+1})}{(1/2^n z^n)}\right| = |1/(2z)| < 1.$$

  Hi ha convergència si $|z| > 1/2$.

  L'anell de convergència és $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$.

6.2 Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Exercici 6.2.1. *Construcció de funcions*

1. *Trobar una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.*
2. *Trobar una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$.* ◁

Solució: a) Per exemple

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-i)^2} + e^{1/z} + e^{1/(z-1)}.$$

b) Per exemple

$$g(z) = \frac{z^2 + 2z}{\sin(z)} + \frac{1}{(z-1)^6} + e^{1/(z-i)}.$$

Exercici 6.2.2. *Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0. Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que* *a) Si $n > m$ $h(z)$ té un zero d'ordre $n-m$ a z_0,*

b) si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m-n$ a z_0,

c) si $n = m$ $h(z)$ és holomorfa i no nul·la a z_0. ◁

Solució: Per hipòtesi $f(z) = a_n(z-z_0)^n + \cdots$ i $g(z) = c_m(z-z_0)^m + \cdots$ amb $a_n, c_m \neq 0$. Aleshores

$$h(z) = \frac{a_n(z-z_0)^n}{c_m(z-z_0)^m}\lambda(z) = \frac{a_n(z-z_0)^n}{c_m(z-z_0)^m}(d_0 + d_1(z-z_0) + \cdots)$$

amb $\lambda(z)$ holomorfa a z_0 amb $\lambda(z_0) = d_0 \neq 0$. D'aquí es dedueix a) b) i c).)

Exercici 6.2.3. *Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f, calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per a què f sigui holomorfa en un entorn d'a, i si a és un pol de f, determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).*

a) $f(z) = z\cos(1/z)$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3(z-1)^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{(1-e^z)^2}$. ◁

Solució: (a) L'única possible singularitat és a $z = 0$, ja que la funció $\cos z$ és entera. Utilitzem la sèrie del cosinus: $\cos w = \sum_{n\geqslant 0} \frac{w^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{w^2}{2} + \cdots$ Prenent $w = 1/z$ obtenim

$$f(z) = z\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}}.$$

Per tant, el punt $z = 0$ és una singularitat essencial.

(b) Tenim una funció racional, i per tant les úniques singularitats són els zeros del denominador: $z = 0$ i $z = 1$.

$z = 0$. La funció $g(z) := \dfrac{1+z^2}{(z-1)^2}$ és holomorfa a un entorn de 0 i té $g(0) = 1 \neq 0$. Per tant, tenim que

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\,g(z),$$

i deduïm que f té un pol de multiplicitat 3 a $z = 0$. Trobem la part singular del desenvolupament a partir del desnvolupament de g a l'entorn de 0: si $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ aleshores

$$f(z) = \frac{1}{z^3}[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots] = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \cdots$$

Cal doncs trobar $a_0 = g(0)$, $a_1 = g'(0)$ i $a_2 = g''(0)/2$. Utilitzant l'expressió de g i derivant, veiem que aquests valors són $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$, de manera que la part singular de la sèrie de Laurent al pol $z = 0$ és

$$\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z} \ .$$

$z = 1$. Procedim com al cas $z = 0$. La funció $h(z) := \dfrac{1+z^2}{z^3}$ és holomorfa a l'entorn de 1, amb valor $h(1) = 2$. Tenim doncs que $z = 1$ és un pol de multiplicitat 2:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\, h(z),$$

i la part singular de la sèrie de Laurent a aquest punt sortirà de mirar el desenvolupament de h a l'entorn del punt 1. Derivant h i avaluant al punt 1 tenim que

$$h(z) = 2 - 4(z-1) + \cdots ,$$

i per tant la part singular de la sèrie de Laurent a aquest punt és

$$\frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1} \ .$$

(c) La funció $1 - e^z$ és entera; per tant les singularitats de f es troben només allà on $e^z - 1 = 0$, és a dir, als punts $z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mirem quin tipus de singularitat tenim a cada punt z_k.Desenvolupant e^z al punt z_k tenim que

$$e^z = e^{z_k} + e^{z_k}(z - z_k) + \frac{e^{z_k}}{2}(z - z_k)^2 + \cdots = 1 + 1(z - z_k) + \frac{1}{2}(z - z_k)^2 + \cdots$$

i per tant

$$e^z - 1 = (z - z_k)\,[1 + \frac{1}{2}(z - z_k) + \cdots] = (z - z_k)\, g(z),$$

amb g holomorfa a l'entorn de z_k i amb $g(z_k) = 1 \neq 0$. Amb això veiem que

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_k)^2}\frac{1}{g^2(z)},$$

i $1/g^2$ és una funció holomorfa a l'entorn del punt z_k, amb $1/g^2(z_k) = 1 \neq 0$.

Per tant z_k és un pol de multiplicitat 2. La part singular la trobem mirant el desenvolupament a l'entorn de z_k de la funció $h = 1/g^2$. Tenim que $h(z_k) = 1$. Derivant,

$$h'(z_k) = -\frac{2}{g^3(z_k)} g'(z_k) = -1,$$

ja que, pel que veiem al desenvolupament de g, tenim que $g(z_k) = 1$ i $g'(z_k) = 1/2$.

Per tant

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_k)^2}\left[1-(z-z_k)+\cdots\right],$$

i la part singular de la sèrie de Laurent a aquests punts és

$$\frac{1}{(z-z_k)^2} - \frac{1}{z-z_k}\ .$$

Exercici 6.2.4. *Sigui $f \in H(D(a,r)\setminus\{a\})$. Suposem que existeix una successió $(z_n)_n$ tal que $z_n \to a$ i*

$$\lim_{n\to\infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \qquad \left|f\left(z_n+\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant 1-\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f en el punt a. ◁

Solució: Determinem el tipus de singularitat mirant el comportament de f al voltant del punt a.

La primera condició diu que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(z_n) = -\infty$, i per tant la singularitat no és evitable.

Per altra part, els punts $z_n + 1/n$ tendeixen a a, i en aquest punts la funció té un mòdul proper a 1; això exclou que a pugui ser un pol. Si ho fos tindríem $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, i per tant, per a tot $M > 0$ existiria $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z)| \geqslant M, \quad \text{per a tot } z \text{ amb} \quad 0 < |z-a| < \epsilon.$$

Això donaria, per a n prou avançat,

$$|f(z_n + \frac{1}{n})| \geqslant M,$$

en contra de la hipòtesi.

Per tant, a és una singularitat essencial.

Exercici 6.2.5. *a) La funció $\tan(1/z)$ té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?*

b) Sigui 0 singularitat aïllada de $f(z)$. Suposem que $|f(z)| \leqslant |z|^{-\alpha}$ on $0 < \alpha < 1$. Demostreu que 0 és una singularitat evitable. ◁

Solució: a) $\tan(1/z) = \sin(1/z)/\cos(1/z)$, tenim singularitat a $z = 0$, les altres singularitats són quan $\cos(1/z) = 0$, és a dir, quan $1/z = \pi/2 + n\pi$, llavors les tenim quan $z = 1/(\pi/2 + n\pi) =: z_n$. Això és una successió de singularitats que tendeixen a 0. Llavors la singularitat $z = 0$ no és aïllada. Els pols a z_n són simples. En efecte

$$\lim_{z\to z_n} \frac{(z-z_n)\sin(1/z)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{(z-z_n)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{z^2}{\sin(1/z)} = z_n^2 \neq 0$$

i si $n > 1$

$$\lim_{z\to z_n} \frac{(z-z_n)^n\sin(1/z)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{(z-z_n)^n}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{z^2 n(z-z_n)^{n-1}}{\sin(1/z)} = 0$$

i els pols són simples als z_n. La singularitat a $z = 0$ és essencial. Si no fos essencial hi ha un enter $k > 0$ tal que $f(z) = b_k/z^k + b_{k-1}/z^{k-1} + \cdots$ amb $b_k \neq 0$, llavors $g(z) = z^k f(z) = b_k + b_{k-1}z + \cdots$ és holomorfa i no nul·la en un cert disc $|z| < r$. Llavors $f(z) = g(z)/z^k$ és holomorfa a $0 < |z| < r$ i contradiu que 0 sigui punt d'acumulació de punts singulars.

b) Volem veure si $b_n = 0$ per a qualsevol n. Recordem que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(w)w^{n-1}dw.$$

Però

$$\begin{aligned}\left|\oint_{C_r} f(w)w^{n-1}dw\right| &\leqslant \oint_{C_r} |f(w)||w^{n-1}||dw| \\ &\leqslant \oint_{C_r} |w|^{-\alpha}|w^{n-1}||dw| = \int_0^{2\pi} |re^{it}|^{-\alpha}|re^{it}|^{n-1}|d(re^{it})| = 2\pi r^{n-\alpha}\end{aligned}$$

que tendeix a zero si $r \to 0$ ja que $n \geqslant 1$ i $0 < \alpha < 1$. Llavors $b_n = 0$.

6.3 Teorema dels Residus

Exercici 6.3.1. *Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que* $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$*? Què passa si el pol és d'ordre 2, pot passar que* $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$*?* ◁

Solució: a) Si f té pol simple a z_0 llavors la part $b_1/(z - z_0)$ de la seva sèrie de Laurent és no nul·la, llavors $b_1 \neq 0$ i $b_1 = \mathrm{Res}(f, z_0) \neq 0$. b) Si que pot passar, per exemple $f(z) = 1/z^2$ té residu 0 a $z = 0$.

Exercici 6.3.2. *Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. ◁

Solució: (a) 1; (b) 1/6

Exercici 6.3.3. *Calculeu* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z - a}\,dz$ *pels diferents valors d'$a \in \mathbb{C}$ tals que $|a| \neq 1$.* ◁

Solució: Si $a = 0$, $I = 2\pi i$; si $|a| > 1$, $I = 2\pi i(1 - e^{1/a})$; si $0 < |a| < 1$, $I = 2\pi i$.

Exercici 6.3.4. *Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions.*

1. *Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0.*

2. *Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.*

3. *Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.*

4. *Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$.* ◁

Solució: a) Falsa, exemple $f(z) = 1/z, g(z) = -1/z$.
b) Falsa, exemple $f(z) = 1/z = g(z)$.
c) Per ser la singularitat de f essencial resulta

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{b_n}{z^n} + \text{Part regular}$$

amb infinits b_n no nuls. I per ser la de g d'ordre finit k

$$g(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{z^n} + \text{Part regular.}$$

Llavors

$$(f+g)(z) = \sum_{n>k} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n + c_n}{z^n} + \text{Part regular}$$

i $f + g$ té singularitat essencial a 0.
d) L'enunciat diu que $f(z) = h(z)/z^m$ amb h holomorfa tal que $h(z) \neq 0$. Llavors

$$f(z^2) = h(z^2)/z^{2m}$$

i l'ordre del pol de $f(z^2)$ a 0 és $2m$.

Exercici 6.3.5. *Suposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0. Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\operatorname{Res}(g, z_0) = m$.* ◁

Solució: Si f té zero d'ordre m a z_0 resulta que existeix h amb $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ amb $h(z_0) \neq 0$ i holomorfa. Llavors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} h(z) + (z - z_0)^m h'(z)}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Com que $h(z_0) \neq 0$ el quocient h'/h és analític a z_0 i $\operatorname{Res}(f'/f, z_0) = m$.

Exercici 6.3.6. *a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0, llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0.*

b) Proveu que $\operatorname{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. ◁

Solució: a) Per tenir zero simple a z_0 resulta $g(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n(z-z_0)^n$ amb $a_1 \neq 0$. Llavors

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_1(z-z_0)(1+\frac{a_2}{a_1}(z-z_0)+\dots)} = \frac{1/a_1}{z-z_0}(1-(\frac{a_2}{a_1}(z-z_0)+\dots)+(\frac{a_2}{a_1}(z-z_0)+\dots))^2+\dots)$$

i el pol de $1/g(z)$ a z_0 és simple.

b) El residu és $1/a_1$ i $a_1 = g'(z_0)$.

c) Mirem els zeros de $\sin z$, són a $z = n\pi$ per $n \in \mathbb{Z}$. Llavors, per l'apartat anterior $\mathrm{Res}(1/\sin z, n\pi) = 1/\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Exercici 6.3.7. *Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.*

a) $f(z) = \dfrac{z^3+1}{z^2(z+1)}$.

b) $g(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$.

c) $h(z) = \cos(1-1/z)$. ◁

Solució: a) La funció f té singularitats a $z = 0, -1$. Quan $z = -1$ la singularitat és evitable ja que $\lim_{z\to -1} f(z) = 3 \neq \infty$, llavors $\mathrm{Res}(f,-1) = 0$. Com que f té un pol d'ordre 2 a l'origen, $\mathrm{Res}(f,0) = g'(0)$, amb $g(z) = z^2 f(z)$. Derivem

$$g'(z) = \left(\frac{z^3+1}{z+1}\right)'_{z=0} = -1$$

i $\mathrm{Res}(f,0) = -1$.

b) Els pols són a $z = 2\pi n i$. Estudiem $\lim_{z\to 2\pi n i}(z-2\pi n i)g(z)$. Resulta

$$\lim_{z\to 2\pi n i}(z-2\pi n i)g(z) = \frac{0}{0} = \lim_{z\to 2\pi n i}\frac{1}{e^z} = 1$$

on hem fet servir la regla de l'Hôpital. Llavors $\mathrm{Res}(g(z), 2\pi n i) = 1$.

c) La singularitat és a $z = 0$. Tenim que

$$\begin{aligned}\cos(1-1/z) &= \cos(1)\cos(1/z) + \sin(1)\sin(1/z) = \\ &= \cos(1)(1-1/(2z^2)+\cdots) + \sin(1)(1/z - 1/(6z^3)+\cdots) = \cdots + \sin(1)/z + \cdots\end{aligned}$$

i el residu que volíem calcular és $\sin(1)$.

Exercici 6.3.8. *Avalueu* $\displaystyle\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)}dz$ *al llarg de la corba* $|z-3| = 3$ *recorreguda en sentit antihorari.* ◁

Solució: L'interior de la corba d'integració conté els pols simples $z = 1, 2, 3, 4, 5$. Calculem els residus en aquests punts fent servir que per un pol simple $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$. Llavors

$$\mathrm{Res}(f,1) = \frac{1}{48},\quad \mathrm{Res}(f,2) = \frac{-1}{18},\quad \mathrm{Res}(f,3) = \frac{1}{16},\quad \mathrm{Res}(f,4) = \frac{-1}{30},\quad \mathrm{Res}(f,5) = \frac{1}{144},$$

i la integral val $\pi i/360$.

Exercici 6.3.9. *Avalueu les següents integrals*

a) $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz.$ ◁

Solució: a) Té pols simples a $z = \pm 2$, calculem els residus i valen els dos $\sin(2)/4$, aplicant la fórmula del residus veiem que la integral és $\pi i \sin(2)$.

b) Els pols són simples i són les arrels cúbiques de la unitat diferents de 1, és a dir $\omega_1 = e^{i2\pi/3}$ i $\omega_2 = e^{-2\pi i/3}$. Els residus són $\pm 1/(\omega_1 - \omega_2)$ respectivament. Llavors la integral és 0.

c) Els pols a l'interior de la corba $|z| = 3$ són $z = 2$ i $z = 0$. El primer és un pol simple amb residu $e^{2i}(2 - 5i)/116$. A $z = 0$ tenim un pol d'ordre 2 llavors per calcular el residu hem d'anar més en compte.

$$\mathrm{Res}(f, 0) = (z^2 f(z))'_{z=0} = \cdots = \frac{12 - 5i}{-100}.$$

Finalment tenim que la integral és

$$\pi i \left(\frac{e^{2i}(2 - 5i)}{58} - \frac{12 - 5i}{50} \right).$$

Nota: Amb `Sage` podem fer `f.maxima_methods().residue(z,a)`

Exercici 6.3.10. *Calculeu la integral de la funció* $f(z) = \dfrac{1+z}{1+\sin z}$ *sobre la vora del disc* $D(0, 7)$. ◁

Solució: Segons el teorema dels residus

$$\int_{\partial D(0,7)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_a \mathrm{Res}(f, a)\ ,$$

o a recorre els pols de f dins el disc $D(0, 7)$.

Els pols de f són els punts on $1 + \sin z = 0$, és a dir, els punts de la forma $z = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. D'aquesta família, nomes $a_1 = -\pi/2$ i $a_2 = 3\pi/2$ són dins els disc $D(0, 7)$. Per tant

$$\int_{\partial D(0,7)} f(z)\, dz = 2\pi i\, (\mathrm{Res}(f, a_1) + \mathrm{Res}(f, a_2))\ .$$

Per trobar els valors d'aquests residus mirem quin és el desenvolupament de Laurent a cadascun dels punts.

Punt a_1. Desenvolupant la funció $\sin z$ a l'entorn d'aquest punt tenim

$$\sin z = -1 + \frac{1}{2}(z - a_1)^2 - \frac{1}{4!}(z - a_1)^4 + \cdots \ ,$$

i per tant

$$1 + \sin z = \frac{1}{2}(z - a_1)^2 - \frac{1}{4!}(z - a_1)^4 + \cdots = (z - a_1)^2 h(z) \ ,$$

on $h(z)$ és holomorfa a l'entorn de a_1 i a més $h(a_1) = 1/2$, $h'(a_1) = 0$.

Amb això tenim, a l'entorn de a_1:

$$f(z) = \frac{1}{(z - a_1)^2} \frac{1 + z}{h(z)} \ .$$

Aquest segon factor és holomorf a l'entorn de a_1, així que té un desenvolupament en sèrie de la forma

$$F(z) := \frac{1 + z}{h(z)} = b_0 + b_1(z - a_1) + b_2(z - a_1)^2 + \cdots$$

Així doncs, localment a l'entorn de a_1

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - a_1)^2} + \frac{b_1}{z - a_1} + b_2 + \cdots$$

i per tant $\mathrm{Res}(f, a_1) = b_1 = F'(a_1)$. Derivant tenim que

$$F'(z) = \frac{h(z) - (1 + z)h'(z)}{(h(z))^2} \ ,$$

i avaluant a a_1

$$\mathrm{Res}(f, a_1) = F'(a_1) = \frac{1}{h(a_1)} = 2 \ .$$

Punt a_2. Procedint de manera anàloga es veu que $\mathrm{Res}(f, a_2) = 2$.

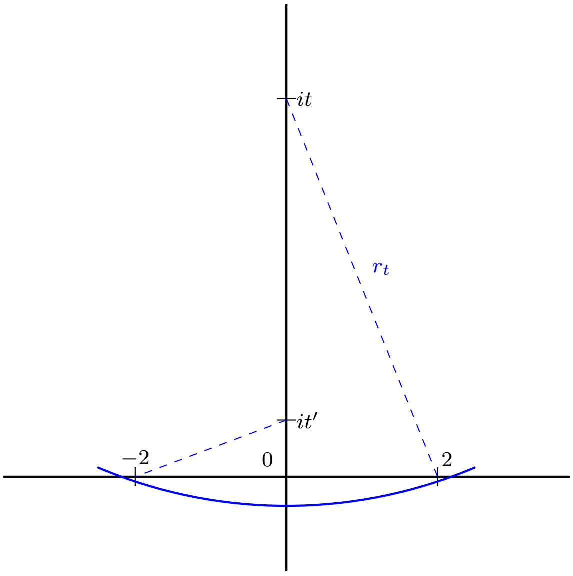
Tot plegat

$$\int_{\partial D(0,7)} f(z)\, dz = 2\pi i(2 + 2) = 8\pi i \ .$$

Exercici 6.3.11. *Per a* $t > 0$*, sigui* C_t *la circumferència de centre* it*, que passa pels punts* -2 *i* 2*. Calculeu*

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z - t)}\, dz, \quad \textit{per a } t \neq 2.$$ ◁

Solució: La circumferència de centre it que passa per ± 2 té radi $r_t = |it - 2| = \sqrt{4 + t^2}$.



Els pols de f són $z_0 = 0$ i $z_1 = t$, i els residus respectius

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{e^{i\pi 0} + 1}{(0 - t)} = -\frac{2}{t},$$
$$\operatorname{Res}(f, t) = \frac{e^{i\pi t} + 1}{t}.$$

Observem que $z_0 = 0$ sempre és dins el disc $D(it, r_t)$:

$$|0 - it| = t < r_t = \sqrt{4 + t^2}.$$

Per altra part $z_1 \in D(it, r_t)$ si i només si

$$|t - it| = t\sqrt{2} < r_t = \sqrt{4 + t^2},$$

és a dir, si i només si $t < 2$.

Separem per tant dos casos:

(i) $t < 2$. Aquí

$$f(t) = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, t)\big] = 2\pi i\big[-\frac{2}{t} + \frac{e^{i\pi t} + 1}{t}\big) = \frac{2\pi i}{t}(e^{i\pi t} - 1).$$

(ii) $t > 2$. Ara

$$f(t) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{4\pi i}{t}.$$

6.4 Residu a l'infinit

Exercici 6.4.1. *Trobar el valor la integral* $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ *calculant el residu de l'integrand a l'infinit.* ◁

Solució: La funció f que integrem té dos singularitats aïllades, a $z = 0, 1$. Llavors la integral és $2\pi i(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$. Fem el canvi $z = 1/w$ llavors

$$\frac{1}{w^2} \frac{5(1/w) - 1}{(1/w)((1/w) - 1)} = \frac{5 - w}{w(1 - w)}$$

i

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{5 - w}{w(1 - w)}, 0\right) = -5.$$

La integral és llavors igual a $10\pi i$.

Exercici 6.4.2. *Sigui* $a \in \mathbb{R}$*, calculeu, estudiant el residu a l'infinit,* $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ *on* C *és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand.* ◁

Solució: Sabem que $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(1/w)/w^2, 0)$. Tenim que

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{aw^2 - 1}{(a^2w^2 + 1)w}.$$

Llavors $\operatorname{Res}(f(1/w)/w^2, 0) = -1$ i $I = -2\pi i$.

Exercici 6.4.3. *Avaluar* $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. ◁

Solució:

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} e^w \sin(w) \sim \frac{1}{w}$$

i el residu a l'infinit és -1. Llavors la integral és $2\pi i$.

6.5 Aplicació al càlcul d'integrals

Exercici 6.5.1. *Per* $r > 0$*, considerem la corba* $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ *definida per* $\gamma_r(t) = re^{it}$*, i sigui*

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r\to\infty} I(r) = 0$. ◁

Solució: Provarem que $|I(r)| \to 0$ quan $r \to \infty$. Parametritzant la corba, tenim que

$$I(r) = \int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = i \int_0^\pi e^{ire^{it}} dt.$$

Per tant

$$|I(r)| \leqslant \int_0^\pi \left| e^{ire^{it}} \right| dt.$$

Com que

$$e^{ire^{it}} = e^{ir\cos t - r\sin t},$$

llavors

$$\left| e^{ire^{it}} \right| = \left| e^{ir\cos t} \right| e^{-r\sin t} = e^{-r\sin t}.$$

Per tant

$$|I(r)| \leqslant \int_0^\pi e^{-r\sin t}\, dt.$$

Posem

$$\int_0^\pi e^{-r\sin t}\, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}\, dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-r\sin t}\, dt$$

Fent el canvi $s = \pi - t$, i fent servir que $\sin(\pi - s) = \sin s$, veiem que

$$\int_{\pi/2}^\pi e^{-r\sin t}\, dt = \int_{\pi/2}^0 e^{-r\sin(\pi - s)}\, (-ds) = \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin s}\, ds.$$

Per tant

$$|I(r)| \leqslant 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}\, dt$$

Fent servir la desigualtat

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

tenim

$$e^{-r\sin t} \leqslant e^{-\frac{2r}{\pi} t}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Per tant,

$$\begin{aligned} |I(r)| &\leqslant 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2r}{\pi}t}\, dt = \left[-\pi \frac{e^{-\frac{2r}{\pi}t}}{r} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{r} \left(1 - e^{-r} \right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quan $r \to +\infty$.

Exercici 6.5.2. *Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$.

(a) Determineu les singularitats de f.

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor. ◁

Solució: (a) La funció $f(z)$ és racional i té com a úniques singularitats les arrels del denominador. Factoritzant $z^2+9 = (z+3i)(z-3i)$ i $z^2+4 = (z+2i)(z-2i)$ veiem que aquestes són $z = \pm 3i$ (pols simples), $z = \pm 2i$ (pols d'ordre 2).

(b) Tenim que

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+3i)(z-3i)(z+2i)^2(z-2i)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2}h(z),$$

on

$$h(z) = \frac{z^2}{(z+3i)(z-3i)(z+2i)^2} = \frac{z^2}{(z^2+9)(z+2i)^2}$$

és holomorfa a un entorn de $z = 2i$ i amb $h(2i) \neq 0$. Desenvolupant en sèrie aquesta funció a l'entorn d'aquest punt tindrem doncs

$$h(z) = h(2i) + h'(2i)(z-2i) + \frac{h''(2i)}{2}(z-2i)^2 + \cdots,$$

i per tant

$$f(z) = \frac{h(2i)}{(z-2i)^2} + \frac{h'(2i)}{z-2i} + \frac{h''(2i)}{2} + \cdots$$

Aleshores, la part principal del desenvolupament de Laurent de f al voltant de $z = 2i$ serà

$$\frac{h(2i)}{(z-2i)^2} + \frac{h'(2i)}{z-2i}.$$

Directament de la definició de h tenim que

$$h(2i) = \frac{4i^2}{(4i^2+9)(4i)^2} = \frac{1}{20}.$$

Derivant tenim també que

$$h'(z) = \frac{2z}{(z^2+9)(z+2i)^2}\Big[1 - \frac{z^2}{z^2+9} - \frac{z}{z+2i}\Big],$$

d'on veiem que

$$h'(2i) = \frac{4i}{5\,(4i)^2}\Big[1 + \frac{4}{5} - \frac{2i}{4i}\Big] = \frac{13}{200i}.$$

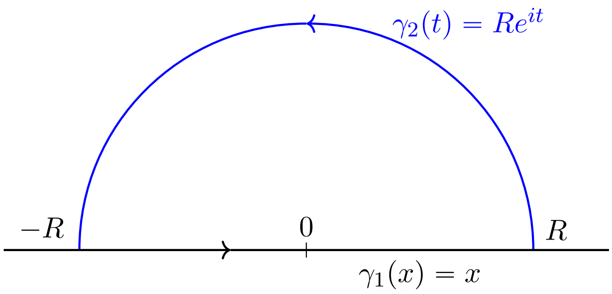
Tot plegat, la part principal buscada és

$$P_{2i}(z) = \frac{\frac{1}{20}}{(z-2i)^2} - \frac{\frac{13i}{200}}{z-2i}.$$

(c) La funció $f(x)$ és acotada a $[0, +\infty)$, i per tant només cal estudiar-ne la convergència a ∞. Pel criteri de comparació per pas al límit veiem que la integral demanada té el mateix caràcter que $\displaystyle\int^{\infty} \frac{dx}{x^4}$, és a dir, és convergent:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = 1.$$

Per calcular la integral utilitzarem el teorema dels residus a la funció $f(z)$ i el camí tancat $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, on $\gamma_1(x) = x$, $x \in [-R, R]$ és el segment $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ és la semicircumferència que va de R a $-R$ passant pel semiplà superior.



Les singularitats de f tancades per γ, si R és prou gran, són $z = 2i, 3i$, i per tant, pel teorema dels residus,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f, 2i) + \mathrm{Res}(f, 3i)\big).$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

i

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}dt.$$

Com que

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \lim_{R\to\infty} \frac{|f(Re^{it})|}{1/R^4} \leqslant 1,$$

veiem que la integral a γ_2 tendeix a 0 quan $R \to \infty$:

$$\left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}dt\right| \leqslant \int_0^{\pi} |f(Re^{it})|R dt \leqslant C\pi R\frac{1}{R^4}$$

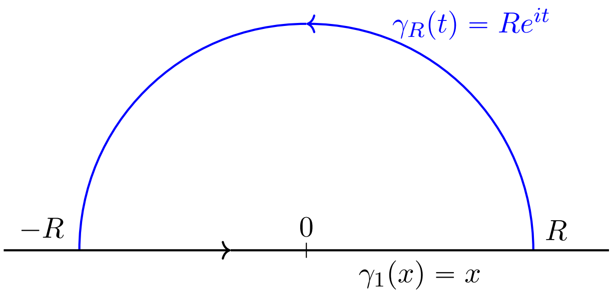
Tornant a la igualtat de dalt i passant al límit quan $R \to \infty$ tenim doncs que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f, 2i) + \mathrm{Res}(f, 3i)\big).$$

A l'apartat (b) hem vist que
$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{13}{200i}.$$
De manera anàloga, factoritzant el denominador de f com hem fet anteriorment, veiem que
$$\operatorname{Res}(f, 3i) = \frac{(3i)^2}{(3i+3i)((3i)^2+4)^2} = -\frac{3}{50i}.$$
Per tant,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(\frac{13}{200i} - \frac{3}{50i}\right) = \frac{\pi}{100}.$$
Com que la funció f és parell,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\,dx,$$
i per tant, finalment
$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{200}.$$

Exercici 6.5.3. *Demostreu que*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \triangleleft$$

Solució: Considerem la funció $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les arrels quartes de -1, que són pols simples de f. Aquestes singularitats són
$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$
Si $R > 1$, sigui $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R$ el semicercle



Com que només a_0 i a_1 es troben a l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim que
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f, a_0) + \operatorname{Res}(f, a_1)\big).$$

Calculem aquests residus. Com que són pols simples,

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = \lim_{z\to a_0} (z-a_0)f(z) = a_0^2 \lim_{z\to a_0} \frac{(z-a_0)}{1+z^4} = \frac{1}{4\,a_0}.$$

De manera semblant, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, a_1) = \lim_{z\to a_1} (z-a_1)f(z) = \frac{1}{4\,a_1}.$$

Aleshores

$$\operatorname{Res}(f, a_0) + \operatorname{Res}(f, a_1) = \frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = -i\,\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Per tant

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Per altra banda, posant $I_R = \int_{\gamma_R} f$, tenim que

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + I_R.$$

Si veiem que $I_R \to 0$ quan $R\to\infty$, llavors fent $R\to\infty$ en la identitat anterior, obtindrem el resultat desitjat (donat que és una integral impròpia convergent)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Tenim

$$I_R = \int_0^\pi \frac{R^2e^{2it}}{1+R^4e^{2it}}\,iRe^{it}dt.$$

Per tant

$$|I_R| \leqslant R^3\int_0^\pi \frac{dt}{|1+R^4e^{2it}|} \leqslant \frac{\pi R^3}{R^4-1} \to 0.$$

Exercici 6.5.4. *Calculeu*

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}.$$

◁

Solució: Considerem la funció $f(z) = \frac{1}{1+z^5}$, i integrem aquesta funció en el recinte γ amb $n=5$. Obtenim

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{5}}) = 2\pi i \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{5}}} (z-e^{i\frac{\pi}{5}})f(z) = \frac{2\pi i}{5}e^{-\frac{4\pi i}{5}}.$$

Posant $\gamma_R = Re^{it}$ per $t\in[0,\frac{2\pi}{5}]$, tenim que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[0,R]} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{[0,Re^{\frac{2\pi i}{5}}]} f(z)dz.$$

Tenim
$$\int_{[0,R]} f(z)dz = \int_0^R \frac{dx}{1+x^5} \longrightarrow I \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$
Ara, el segment $[0, Re^{\frac{2\pi i}{5}}]$ ve parametritzat per $\sigma(t) = te^{\frac{2\pi i}{5}}$ per $t \in [0,R]$. Llavors
$$\int_{[0,Re^{\frac{2\pi i}{5}}]} f(z)dz = \int_0^R \frac{1}{1+(te^{\frac{2\pi i}{5}})^5} e^{\frac{2\pi i}{5}}\,dt = e^{\frac{2\pi i}{5}} \int_0^R \frac{dt}{1+t^5} \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{5}} I \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$
Si veiem que
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$
llavors obtindrem
$$\frac{2\pi i}{5} e^{-\frac{4\pi i}{5}} = (1 - e^{\frac{2\pi i}{5}})I.$$
Per tant
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{2\pi i}{5e^{\frac{4\pi i}{5}}(1-e^{\frac{2\pi i}{5}})} = \frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{5}}}{5(e^{\frac{2\pi i}{5}}-1)} = \frac{\pi}{5\sin(\pi/5)}.$$
Finalment, com que
$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\frac{2\pi}{5}} \frac{iRe^{it}\,dt}{1+R^5e^{5it}},$$
tenim
$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \frac{2\pi}{5} \frac{R}{R^5-1} \longrightarrow 0 \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$

Exercici 6.5.5. *Donat $a \in (0,1)$ calculeu el valor de la integral*
$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx.$$
◁

Solució: Aplicant el criteri de comparació per pas al límit amb la funció $1/x^{2-a}$ veiem que aquesta integral impròpia és convergent.

Considerem la funció $f(z) = \frac{z^a}{1+z^2} = \frac{e^{a\mathcal{L}z}}{1+z^2}$, on el logaritme és l'associat a l'argument $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Donats $\epsilon, R > 0$ considerem també la corba $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ diferenciable a trossos i tancada formada pels trossos:

- $\gamma_1(x) = x + i\epsilon$, amb $x \in [0,R]$.
- $\gamma_2(\theta) = Re^{i\theta}$, amb $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$, on δ és l'argument del punt $z = x + i\epsilon$ ($\delta = \arctan(R/\epsilon)$.
- $\gamma_3(x) = x - i\epsilon$, amb $x \in [0,R]$.
- $\gamma_4(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$, amb $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Com que la funció f té els dos pols $a_1 = i$, $a_2 = -i$ dins la regió tancada per γ, el teorema dels residus dona:

$$\int_0^R \frac{e^{a\mathcal{L}(x+i\epsilon)}}{1+(x+i\epsilon)^2}dx + \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{e^{a\mathcal{L}(Re^{i\theta})}}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta - \int_0^R \frac{e^{a\mathcal{L}(x-i\epsilon)}}{1+(x-i\epsilon)^2}dx-$$
$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\mathcal{L}(\epsilon e^{i\theta})}}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\big]$$

Essent $f(z) = \frac{e^{a\mathcal{L}z}}{(z-i)(z+i)}$ veiem que

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{a\mathcal{L}i}}{i+i} = \frac{e^{ai\pi/2}}{2i}$$
$$\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{e^{a\mathcal{L}(-i)}}{-i-i} = \frac{e^{ai3\pi/2}}{-2i} \ ,$$

així que

$$2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\big) = \pi\big(e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}\big) \ .$$

Per altra part és clar que les integrals dels trossos γ_2 i γ_4 tendeixen a 0 quan $\epsilon \to 0$ i $R \to +\infty$, ja que passant els mòduls a dins de la integral tenim:

$$\left|\int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{e^{a\mathcal{L}(Re^{i\theta})}}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{a\ln R}}{R^2-1}\ Rd\theta = \frac{2\pi R^{1+a}}{R^2-1}$$

i

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\mathcal{L}(\epsilon e^{i\theta})}}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\ln\epsilon}}{1-\epsilon^2}\ \epsilon d\theta = \frac{\pi\epsilon^{a+1}}{1-\epsilon^2} \ .$$

Pel que fa al tros corresponent a γ_3 tenim que

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^R \frac{e^{a\mathcal{L}(x-i\epsilon)}}{1+(x-i\epsilon)^2}dx = \int_0^\infty \frac{e^{a(\ln x + i2\pi)}}{1+x^2}dx = e^{2\pi ia}\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\ dx \ .$$

Tot plegat tenim doncs

$$(1-e^{2\pi ia})\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\ dx = \pi\big(e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}\big) \ ,$$

d'on deduïm que

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\ dx = \pi\frac{e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}}{1-e^{2\pi ia}} \ .$$

Podem comprovar que aquest és un nombre real positiu efectuant la divisió:

$$\frac{e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}}{1-e^{2\pi ia}} = \frac{e^{ai\pi}\big(e^{-ai\pi/2} - e^{ai\pi/2}\big)}{e^{ai\pi}\big(e^{-ai\pi} - e^{ai\pi}\big)} = \frac{\sin(a\pi/2)}{\sin(a\pi)} = \frac{\sin(a\pi/2)}{2\sin(a\pi/2)\cos(a\pi/2)}$$
$$= \frac{1}{2\cos(a\pi/2)} \ .$$

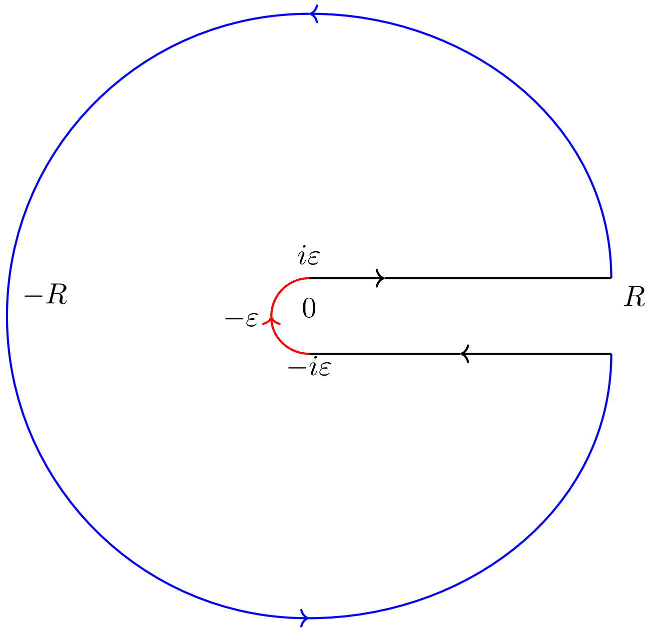
Exercici 6.5.6. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}. \qquad \triangleleft$$

Solució: Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(1+z^2)}, \qquad \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}z},$$

amb $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$, amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Llavors aquesta branca de $\sqrt{z}$ és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$. En aquest cas, prenem $R > 1$ prou gran, i $0 < \varepsilon < 1/2$ prou petit, i integrem f en el recinte "comecocos"γ de la figura



Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, amb

$$\begin{aligned}
\gamma_1(x) &= x + i\varepsilon; & x &\in [0, R^*];\\
\gamma_2(t) &= Re^{it}; & t &\in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*]\\
\gamma_3(x) &= x - i\varepsilon; & x &\in [0, R^*];\\
\gamma_4(t) &= \varepsilon e^{it}; & t &\in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].
\end{aligned}$$

amb $R^* \to \infty$ quan $R \to \infty$, i també $\varepsilon^* \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$.

Les singularitats de f a l'interior del recinte γ són $z = i$ i $z = -i$, que són pols de f d'ordre 1. Pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}\,(1+z^2)} = 2\pi i \Big(\mathrm{Res}\,(f, i) + \mathrm{Res}\,(f, -i)\Big).$$

Com que $z = i$ és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{\sqrt{z}(z+i)} = \frac{1}{\sqrt{i}\,2i},$$

amb

$$\sqrt{i} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}i} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

De manera semblant, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{1}{\sqrt{z}(z-i)} = -\frac{1}{\sqrt{-i}\;2i},$$

amb

$$\sqrt{-i} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}(-i)} = e^{\frac{i}{2}\mathcal{A}(-i)} = e^{\frac{3\pi\, i}{4}}.$$

Llavors

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) &= \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{-i}}\Big) = \frac{1}{2i}\big(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{3\pi\, i}{4}}\big)\\ &= \frac{1}{2i}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}\big(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\big) = e^{-i\frac{\pi}{2}}\sin(\pi/4) = -i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}\,(1+z^2)} = \pi\,\sqrt{2}.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + I_R - \int_{\gamma_3} f(z)dz - I_\varepsilon,$$

amb

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\varepsilon*}^{2\pi-\varepsilon*} \frac{iRe^{it}\,dt}{\sqrt{Re^{it}}(1+R^2e^{2it})}$$

i

$$I_\varepsilon = \int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{i\varepsilon e^{it}\,dt}{\sqrt{\varepsilon e^{it}}(1+\varepsilon^2e^{2it})}$$

Tenim

$$|I_R| \leqslant \frac{R}{\sqrt{R}}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1+R^2e^{2it}|} \leqslant 2\pi\frac{\sqrt{R}}{R^2-1} \longrightarrow 0$$

quan $R\to\infty$. També

$$|I_\varepsilon| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dt}{|1+\varepsilon^2e^{2it}|} \leqslant \pi\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{quan } \varepsilon\to 0.$$

Per tant,

$$\lim_{R\to\infty;\varepsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Ara, pel teorema de la convergència dominada, tenim que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{R^*} \frac{dx}{\sqrt{x+i\varepsilon}\,(1+(x+i\varepsilon)^2)} \longrightarrow \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

quan $\varepsilon \to 0$, ja que, per $x>0$, tenim que $\mathcal{A}(x+i\varepsilon) \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$, i per tant

$$\sqrt{x+i\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}(x+i\varepsilon)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|x+i\varepsilon|+i\mathcal{A}(x+i\varepsilon))} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x} \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

També, com que per $x>0$, tenim que $\mathcal{A}(x-i\varepsilon) \to 2\pi$ quan $\varepsilon \to 0$, tenim que

$$\sqrt{x-i\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}(x-i\varepsilon)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|x-i\varepsilon|+i\mathcal{A}(x-i\varepsilon))} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}(\ln x+2\pi i)} = \sqrt{x}\,e^{\pi i} = -\sqrt{x} \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

Per tant, usant el TCD

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_0^{R^*} \frac{dx}{\sqrt{x-i\varepsilon}\,(1+(x-i\varepsilon)^2)} \longrightarrow -\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

quan $\varepsilon \to 0$. Tot plegat, tenim que

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz\right) = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

d'on obtenim

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Exercici 6.5.7. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$ ◁

Solució:

Posem $f(z) = \frac{(\mathcal{L}z)^2}{1+z^2}$, on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0,2\pi)$, i integrem la funció f en la regió "comecocos"del cas anterior.

Pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_\gamma \frac{(\mathcal{L}z)^2 dz}{1+z^2} = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i)\Big).$$

Com que $z=i$ és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(\mathcal{L}z)^2}{z+i} = \frac{(\mathcal{L}i)^2}{2i},$$

amb $\mathcal{L}i = i\frac{\pi}{2}$. De manera semblant, tenim que

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{(\mathcal{L}z)^2}{z-i} = -\frac{(\mathcal{L}(-i))^2}{2i},$$

amb $\mathcal{L}(-i) = \frac{3\pi i}{2}$. Llavors

$$\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) = \frac{1}{i}\Big(\frac{-\pi^2}{8} + \frac{9\pi^2}{8}\Big) = \frac{\pi^2}{i},$$

i per tant,

$$\int_\gamma \frac{(\mathcal{L}z)^2 dz}{1+z^2} = 2\pi^3.$$

Es compleix que si $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, així que $\mathcal{L}z \to \ln x$ si $\varepsilon \to 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, de manera que $\mathcal{L}z \to \ln x + 2\pi i$ si $\varepsilon \to 0$.

A més,

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\varepsilon^*}^{2\pi-\varepsilon^*} \frac{(\mathcal{L}(Re^{it}))^2\, dt}{1+R^2e^{2it}}.$$

Per tant, tenim que

$$|I_R| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R(|\ln R + it|)^2 dt}{|1+R^2e^{2it}|} \leqslant 2\pi \frac{R(\ln R + 2\pi)^2}{R^2-1} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$.

Per altra banda,

$$|I_\varepsilon| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\varepsilon(|\ln\varepsilon + it|)^2 dt}{|1+\varepsilon^2 e^{2it}|} \leqslant \pi \frac{\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 2\pi)^2}{1-\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

Per tant

$$2\pi^3 = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\gamma \frac{(\mathcal{L}z)^2}{1+z^2}dz = \int_0^\infty \frac{\ln^2 x - (\ln x + 2\pi i)^2}{1+x^2}dx = \int_0^\infty \frac{4\pi^2 - 4\pi i \ln x}{1+x^2}dx.$$

Prenent part imaginària, deduïm que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = 0.$$

Exercici 6.5.8. *Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n = 0, 1, 2, \cdots$):*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4\cos t}\, dt.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t}\, dt.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1}\, dx.$ ◁

Solució: $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt}$

Utilitzem que

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}.$$

Parametritzant la circumferència unitat de la manera habitual, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{e^{it}-1/e^{it}}{2i}\right)^2}{5+2(e^{it}+1/e^{it})}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z-1/z}{2i}\right)^2}{5+2(z+1/z)}\frac{dz}{iz}$$
$$= -\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(5z+2z^2+2)} = -\frac{1}{8i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+1/2)(z+2)}.$$

Diem $f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+1/2)(z+2)}$. Aquesta funció té dues singularitats dins el disc unitat (0 i $-1/2$); per tant, pel teorema dels Residus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt = -\frac{\pi}{4}\big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-1/2)\big]$$

Escrivint

$$f(z) = \frac{1}{z+1/2}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2)}$$

veiem que

$$\mathrm{Res}(f,-1/2) = \frac{((-1/2)^2-1)^2}{(-1/2)^2(-1/2+2)} = \frac{3}{2}.$$

Per altra part, escrivint

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\,g(z), \quad g(z) = \frac{(z^2-1)^2}{(z+1/2)(z+2)}$$

veiem que

$$\mathrm{Res}(f,0) = g'(0).$$

Derivant g tenim que

$$g'(z) = \frac{4z(z^2-1)}{(z+1/2)(z+2)} - \frac{(z^2-1)^2}{(z+1/2)^2(z+2)} - \frac{(z^2-1)^2}{(z+1/2)(z+2)^2},$$

i avaluant a 0,

$$g'(0) = 0 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Tornant a l'expressió de dalt, obtenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt = -\frac{\pi}{4}\Big[\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\Big] = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx}$$

Solució: $\pi/2$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2+\cos t}\, dt}$$

Observem que $\mathrm{Re}(e^{int}) = \cos(nt)$ i per tant serà suficient calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt \ .$$

Expressant $\cos t = 1/2(e^{it} + e^{-it})$ i parametritzant la vora del disc unitat amb $\zeta = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{(2 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2})e^{it}}\, ie^{it} dt = \frac{2}{i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{(4+\zeta+1/\zeta)\zeta} d\zeta \ .$$

Factoritzant $\zeta^2 + 4\zeta + 1 = (\zeta + 2 - \sqrt{3})(\zeta + 2 + \sqrt{3})$ obtenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = \frac{2}{i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{(\zeta+2-\sqrt{3})(\zeta+2+\sqrt{3})} d\zeta \ .$$

La funció $f(\zeta) = \frac{\zeta^n}{(\zeta+2-\sqrt{3})(\zeta+2+\sqrt{3})}$ té una única singularitat a $\mathbb{D}$, al punt $a = -2 + \sqrt{3}$. Per tant, segons el teorema dels residus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = \frac{2}{i} 2\pi i \mathrm{Res}(f, a) = 4\pi \mathrm{Res}(f, a) \ .$$

La funció $g(\zeta) = \frac{\zeta^n}{\zeta+2+\sqrt{3}}$ és holomorfa a un entorn de $a = -2 + \sqrt{3}$, i per tant s'expressa com una sèrie de potències a l'entorn d'aquest punt. Aleshores, a l'entorn de a,

$$\begin{aligned} f(\zeta) =& \frac{1}{\zeta - a} g(\zeta) = \frac{1}{\zeta - a}\Big[g(a) + g'(a)(\zeta - a) + \frac{g''(a)}{2}(\zeta - a)^2 + \cdots\Big] \\ =& \frac{g(a)}{\zeta - a)} + g'(a) + \frac{g''(a)}{2}(\zeta - a) + \cdots \end{aligned}$$

i per tant $\mathrm{Res}(f, a) = g(a) = \frac{(-2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = (-1)^n \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$. Amb això tenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = 4\pi(-1)^n \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(-1)^n(2-\sqrt{3})^n \ .$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx}$$

Solució: $5\pi/12$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1}\, dx}$$

Solució: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sin(1/2) e^{-\sqrt{3}/2}$

Exercici 6.5.9. *Justifiqueu la convergència de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

Solució: $\pi/\sqrt[4]{12}$.

Exercici 6.5.10. *Siguin* $f(z) = e^z/z^2$ *i la recta* $\gamma = \{1 + it;\ t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

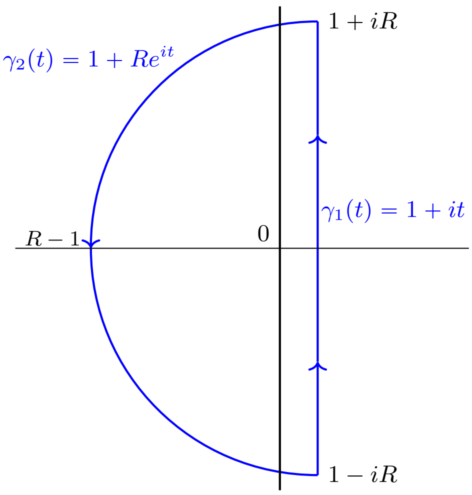
$$\int_\gamma f(z) dz.$$

Indicació*: integreu* f *sobre la vora del semidisc de centre* $z_0 = 1$ *i radi* R *amb* $\operatorname{Re} z \leqslant 1$*.*

b) Deduïu que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}$. ◁

Solució: (a) Per a cada $R > 0$ considerem la corba tancada $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, on

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 1 + it, \qquad t \in [-R, R], \\ \gamma_2(t) &= 1 + Re^{it}, \qquad t \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{aligned}$$



Com que f té una única singularitat, al punt $a = 0$, el teorema dels residus ens dona

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}(f, 0).$$

Desenvolupat $e^z = 1 + z + z^2/2 + \cdots$ a l'entorn de 0 veiem queda $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

Per altra part, la integral a γ_2 tendeix a 0 a mesura que R es fa gran: si $z = 1 + Re^{it}$ aleshores

$$|e^z| = \left|ee^{R\cos t}e^{iR\sin t}\right| \leqslant e,$$

ja que $\cos t \leqslant 0$. Per tant

$$\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(1 + Re^{it})\, iRe^{it}\,dt\right| \leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e}{(R-1)^2} R\,dt = \frac{\pi e R}{(R-1)^2}$$

efectivament tendeix a 0 quan $R \to +\infty$.

Per tant, passant al límit també la integral

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{1+it}}{(1+it)^2}\, i\,dt$$

obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+it}}{(1+it)^2}\, i\,dt = 2\pi i.$$

(b) Com que

$$\frac{1}{1+it} = \frac{1-it}{|1+it|^2} = \frac{1-it}{1+t^2},$$

obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+it}(1-it)^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\pi.$$

Utilitzant que

$$\mathrm{Re}\left[e^{1+it}(1-it)^2\right] = e\big(\cos t(1-t^2) + 2t\sin t\big)$$

i igualant parts reals obtenim finalment

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\big(\cos t(1-t^2) + 2t\sin t\big)}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\pi.$$

Exercici 6.5.11. *Considereu*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2+1)^2(z^2+4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos). ◁

Solució: (a) $\frac{1/24}{(z-2i)^2} + \frac{5i/48}{z-2i}$; (b) $-\pi/24$.

Exercici 6.5.12. *Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que*

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)dx.$$

Observació: *Podeu utilitzar que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.* ◁

Solució: Com que f és entera i γ_R és un camí tancat, aplicant el teorema de Cauchy per un disc (per exemple en $\Delta = D(0, 2R)$), obtenim que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$

i per tant

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Per altra part, tenim que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz - \int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz$$

amb $\gamma_{1,R}(x) = x$, per $x \in [0, R]$; $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$; i $\gamma_{3,R}(t) = te^{i\pi/4}$ per $t \in [0, R]$. Tenim que

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx \longrightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx + i\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

quan R tendeix a $+\infty$. També, com que $e^{i\pi/2} = i$, tenim que

$$\int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz = \int_0^R e^{i(te^{i\pi/4})^2}\, e^{i\pi/4}\,dt = e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}, dt.$$

Per tant, com que $e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, tenim que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Si podem veure que

$$I_R := \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$, llavors

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx + i\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

així que, igualant parts reals i imaginàries, obtenim

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Vegem que $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$. Com que $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi/4]$, tenim que

$$I_R = \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2it}} iRe^{it}\,dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leqslant R\int_0^{\pi/4} \left|e^{iR^2e^{2it}}\right| dt = R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin(2t)}\,dt.$$

Aquesta integral no té primitiva elemental, així que l'acotem per una quantitat que puguem calcular i que tendeixi a zero quan R tendeixi a infinit. Sabem que $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ per $x \in [0, \pi/2]$, de manera que $\sin(2t) \geqslant \frac{4t}{\pi}$ per $t \in [0, \pi/4]$, obtenint que

$$e^{-R^2\sin(2t)} \leqslant e^{-4R^2\,t/\pi}, \qquad t \in [0, \pi/4].$$

Per tant

$$|I_R| \leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-4R^2\,t/\pi}\,dt = R\left[\frac{\pi e^{-4R^2\,t/\pi}}{(-4R^2)}\right]_{t=0}^{t=\pi/4} = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

que tendeix a zero quan R tendeix a infinit.

Exercici 6.5.13. *(a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \to 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f.*

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geqslant 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=\frac{1}{n}} \frac{1}{f(z)}dz \neq \int_{|z|=\frac{1}{n+1}} \frac{1}{f(z)}dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f. Indicació*: Utilitzeu el Teorema de deformació i l'apartat anterior.* ◁

Exercici 6.5.14. *Calculeu, justificant tots els passos, la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}dx, \quad -1<\alpha<1.$$

Indicació*: Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z^\alpha}{z^2+z+1}$*. Definiu una determinació del logaritme* $log(z)$ *a* $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ *de manera que* $z^\alpha = e^{\alpha log(z)}$*. Finalment integreu la funció* $f(z)$ *a la mateixa regió que les integrals del tipus*

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln(x)dx. \qquad \triangleleft$$

Solució: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\cos(\alpha\frac{pi}{2})}e^{-i\alpha\frac{\pi}{6}}$.

6.6 Principi de l'argument

Exercici 6.6.1. *Quines de les següents funcions són meromorfes a $\mathbb{C}$?*

a) z^5 *b)* $z^{5/2}$ *c)* $e^{1/z}$ *d)* $1/\sin(z)$. ◁

Solució: a) La funció és entera, llavors meromorfa sense pols. b) No, hi ha una semirecta de singularitats si prenem, per exemple, l'arrel quadrada principal. c) No, a 0 hi ha una singularitat essencial d) Sí, totes les seves singularitats (a $z = n\pi$) són pols simples.

Exercici 6.6.2. *Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.*
I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? ◁

Solució: Considerem un semidisc tancat D, delimitat per la corba $\gamma = \gamma_1^- \vee \gamma_2$ on

$$\gamma_1(t) = it,\ t \in [-R, R]; \qquad \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

amb R és prou gran per a que tots els zeros de P a $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ estiguin dins de D.

Si mirem la imatge dels extrems de γ_1 veiem que

$$P(iR) \simeq -R^6 - 2iR; \qquad P(-iR) \simeq -R^6 + 2iR,$$

d'on obtenim que

$$\mathcal{A}(P(iR)) = \pi - \epsilon; \qquad \mathcal{A}(P(-iR)) = \pi + \epsilon,$$

per un cert $\epsilon \gtrsim 0$.

D'altra banda, si calculem la imatge sencera de γ_1 tenim que

$$P(\gamma_1(t)) = P(it) = -t^6 - t^4 - 6 - 2it.$$

Veiem que la part real no s'anul·la mai mentre que la part imaginària ho fa només per $t = 0$. Deduïm que $P(\gamma_1)$ no talla mai l'eix imaginari i només talla l'eix real una vegada, en el punt $P(\gamma(0)) = -6$.

Concloem per tant que l'increment de l'argument degut a γ_1^- és

$$\Delta(\gamma_1^-) = \pi + \epsilon - (\pi - \epsilon) = 2\epsilon.$$

La corba γ_2 és un semicercle i per tant recorre un argument de π. Donat que $|\gamma_2(t)| = R$ i R és molt gran, domina el terme de grau superior i per tant

$$P(\gamma_2(t)) \simeq \gamma_2(t)^6 = R^6 e^{6it},$$

on $6t \in [-3\pi, 3\pi]$, ja que $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tenim doncs que

$$\Delta(\gamma_2) = 6 \times \pi - 2\epsilon = 6\pi - 2\epsilon,$$

on 2ϵ ve donat pel fet que $P(\gamma_2)$ ha de connectar $P(iR)$ i $P(-iR)$.

Concloem doncs que
$$\Delta(\gamma) = 2\epsilon + 6\pi - 2\epsilon = 6\pi,$$
i que per tant,
$$\mathrm{Ind}(P(\gamma), 0) = \frac{6\pi}{2\pi} = 3.$$
El Principi de l'Argument ens diu aleshores que $P(z)$ té exactament 3 arrels dins de D comptades amb multiplicitat. Donat que R és arbitràriament gran, $P(z)$ té 3 arrels al semiplà de la dreta.

Si el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z^3 + 6$, actuaria sobre $\gamma_1(t)$ com
$$Q(\gamma_1(t)) = Q(it) = -t^6 - t^4 + 6 + 2it,$$
i per tant seguiria tallant l'eix real només per $t = 0$; però aquesta vegada ho faria en el punt $Q(0) = 6$. Independentment de quantes vegades pogués tallar l'eix imaginari, la corba imatge seria homòtopa a la de la figura 2 en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. La diferència en el càlcul resideix en la variació de l'argument de la corba $Q(\gamma_1)$ que, al rodejar el zero, provoca un augment de l'argument en gairebé 2π. En efecte,
$$\Delta(\gamma_1) = 2\epsilon - 2\pi; \quad \Delta(\gamma_2) = 6\pi + 2\epsilon,$$
i per tant
$$\Delta(\gamma) = 2\pi - 2\epsilon + 6\pi + 2\epsilon = 8\pi.$$
En conseqüència $\mathrm{Ind}(Q(\gamma, 0)) = 4$ i el polinomi Q té 4 zeros al semiplà de la dreta.

Exercici 6.6.3. *Sigui f una funció entera tal que*
$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$
Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. ◁

Solució: Considerem un cercle $\gamma(t) = Re^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi]$ de radi arbitrari $R > 0$. Aquest cercle talla l'eix real en dos punts $\gamma(0) = R$, i $\gamma(\pi) = -R$. Per $t \neq 0, \pi$, $\gamma(t) \notin \mathbb{R}$.

Per hipòtesi, només els punts reals tenen imatge real. Així doncs, la corba $f(\gamma(t))$ talla l'eix real exactament en $t = 0$ i $t = \pi$, en dos punts $f(\pm R)$ que podrien ser iguals o diferents.

Aleshores, la corba parametritzada $f(\gamma(t))$ només pot donar com a molt una volta al punt $z = 0$, és a dir
$$\mathrm{Ind}(f(\gamma(t), 0)) \leqslant 1. \qquad (*)$$
Pel Principi de l'Argument, tenim doncs que f pot tenir com a molt un zero a $\{|z| \leqslant R\}$. Però com que R és arbitrari, això demostra que f té com a molt un zero a $\mathbb{C}$.

Nota: Per a demostrar (*) formalment, podem calcular l'índex amb la definció:

$$\mathrm{Ind}(f(\gamma(t)),0) = \frac{1}{2\pi}(a(2\pi) - a(0)),$$

on $a(t)$ és una determinació qualsevol de $\arg(f(\gamma(t)))$. Combinat amb el Teorema de Bolzano, és fàcil veure que si la diferència entre els arguments és més gran de 2π, aleshores l'argument ha de prendre tots els valors al menys dues vegades, inclosos els valors 0 i π, que corresponen a punts de la recta real.

6.7 Teorema de Rouché

Exercici 6.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z+1$ té exactament una solució en el disc unitat obert.* Indicació*: Proveu que $|e^z - 1| \leqslant e-1$ si $|z| = 1$.* ◃

Solució: Apliquem el teorema de Rouché al disc unitat i les funcions $f(z) = e^z - 2z - 1$ i $g(z) = -2z$. Per a $|z| = 1$, aplicant la indicació, tindrem,

$$|f(z) - g(z)| = |e^z - 1| < e - 1 < 2 = |g(z)|,$$

i per tant

$$\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1.$$

La indicació es pot provar directament amb la sèrie de l'exponencial: si $|z| = 1$

$$|e^z - 1| = \Big|\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 = e - 1.$$

Exercici 6.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f?* ◃

Solució: Apliquem el teorema de Rouché a $F(z) = f(z) - z$ i $g(z) = -z$: per a $|z| = 1$

$$|F(z) - g(z)| = |f(z)| < 1 = |g(z)|.$$

Per tant

$$\#Z(F) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1.$$

D'aquí veiem que f té un únic punt fix.

Exercici 6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0.$

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0.$

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2.$ ◃

Solució: (a) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$ i $g(z) = -8z$ (el terme de f amb coeficient més gran). Per a $|z| = 1$, tenim que

$$|f(z) - g(z)| = |z^9 - 2z^6 + z^2 - 2| \leqslant 1 + 2 + 1 + 2 = 6 < 8 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1$.

(b) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ i $g(z) = 8$: per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |2z^5 - z^3 + 3z^2 - z| \leqslant 2 + 1 + 3 + 1 = 7 < 8 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 0$.

(c) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ i $g(z) = -5z^4$: per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \leqslant 1 + 1 + 2 = 4 < 5 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 4$.

Exercici 6.7.4. *Quants zeros té* $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ *en la regió* $\left\{z \in \mathbb{C};\ \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$*?* ◁

Exercici 6.7.5. *Considerem* $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ *són a l'anell* $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ *al primer quadrant.* ◁

Solució: **a)** Aplicarem el teorema de Rouché dues vegades: al disc unitat $\mathbb{D}$ i al disc $D(0,2)$. Notem que P és un polinomi de grau 6, per tant té exactament 6 zeros comptats amb multiplicitat. Comencem pel disc $D(0,2)$. Definim $g(z) = z^6 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Hem de buscar els zeros de la funció $P \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $D(0,2)$. Aplicarem el teorema de Rouché. Considerem $\gamma = \partial D(0,2)$ (corba simple). Notem que

$$|P(z) - g(z)| \leqslant 63 < 64 = |g(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Podem aplicar el teorema de Rouché que ens assegura que el nombre de zeros de g a $D(0,2)$ coincideix amb el nombre de zeros de P a $D(0,2)$ (comptant multiplicitats). Ara bé, g té 6 zeros a $D(0,2)$. Per tant, P té 6 zeros a $D(0,2)$.
D'una altra banda, considerem $f(z) = 9 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $\rho = \partial\mathbb{D}$ (corba simple). Notem que

$$|P(z) - f(z)| \leqslant 6 < 9 = |f(z)|, \quad \forall z \in \rho.$$

Podem aplicar el teorema de Rouché que ens assegura que el nombre de zeros de f a $\mathbb{D}$ coincideix amb el nombre de zeros de P a $\mathbb{D}$ (comptant multiplicitats). Ara bé, f no té zeros a $\mathbb{D}$. Per tant, P no té zeros a $\mathbb{D}$. Observem que la desigualtat estricte anterior sobre els punts de ρ ens assegura que P i f no s'anul·len en ρ. En resum, hem provat que P té 6 zeros al $D(0,2)$, P no té zeros al $\mathbb{D}$ (i tampoc a $|z| = 1$) i P té exactament 6 zeros al pla complex. Així, P té tots els seus zeros (és a dir, 6 zeros) a l'anell $1 < |z| < 2$.

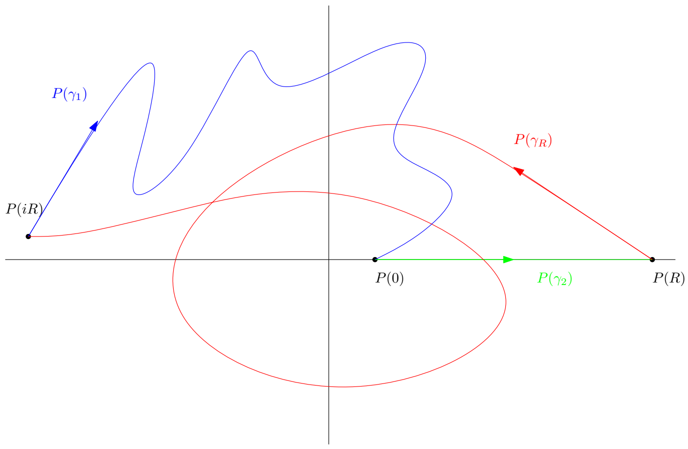
b) Anem a utilitzar el principi de l'argument per calcular el nombre de zeros de P al primer quadrant. Sigui $R > 0$ i Ω_R la regió que és intersecció del $D(0, R)$ amb el primer quadrant, és a dir,

$$\Omega_R = \left\{re^{it},\ 0 < r < R,\ 0 < t < \pi/2\right\}.$$

Per a $R > 0$ prou gran (de fet $R \geqslant 2$), tots els zeros de P pertanyen al disc $D(0, R)$, i per tant tots els zeros de P en el primer quadrant pertanyen a Ω_R. Sigui $\gamma = \partial\Omega_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_R$, on $\gamma_1(t) = i(R - t)$, $t \in [0, R]$, $\gamma_2(t) = t$, $t \in [0, R]$ i $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$. Notem que P no té zeros sobre $\mathbb{R}_+$ i $i\mathbb{R}_+$ ja que $P(t) = t^6 + 3t^4 + t^2 + t + 9 \geqslant 9 > 0$ i $P(it) = -t^6 + 3t^4 - t^2 + 9 + it$. Per tant, $\operatorname{Im}(P(it)) \neq 0$ per tot $t > 0$ i per a $t = 0$, $P(0) = 9 \neq 0$. Així, si R és prou gran (la corba γ_R no passarà per cap zero de P), P no té zeros sobre la corba γ. Pel principi de l'argument tenim que el nombre de zeros de P en el primer quadrant (comptats amb multiplicitat) és l'increment de l'argument de P sobre γ dividit per 2π (quan $R > 0$ és prou gran), és a dir, hem de mirar les voltes que dona la corba $\Gamma := P(\gamma)$ al voltant de 0 (que no és res més que $\operatorname{Ind}(\Gamma, 0)$) quan $R \to \infty$. Anem a calcular aquesta quantitat:

$$\begin{aligned}\#(Z(P) \cap \{\text{Primer quadrant}\}) &= \lim_{R\to\infty} Ind(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \Delta_\gamma P \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} (\Delta_{\gamma_1} P + \Delta_{\gamma_2} P + \Delta_{\gamma_R} P).\end{aligned}$$

Anem a calcular cada tros. Sobre la corba γ_R, si R és prou gran, $P(z) \approx z^6$ i per tant, $\Delta_{\gamma_R} P \to 6\frac{\pi}{2} = 3\pi$ (és a dir, la corba $P(\gamma_R)$ dona una volta i mitja al voltant del 0 amb punt inicial $P(R)$ i punt final $P(iR)$). Sobre la corba γ_2, tenim que $P(\gamma_2) \in \mathbb{R}$ i $P(\gamma_2(t)) \geqslant 9 = P(0)$ per tot $t \in [0, R]$. Així, qualsevol determinació de l'argument de $P(\gamma_2)$ és constant i per tant, $\Delta_{\gamma_2} P = 0$. Anem a treballar ara amb la corba γ_1. Sigui $t \in [0, R]$, aleshores $\operatorname{Im}(P(it)) > 0$ per tot $t > 0$ i val 0 si $t = 0$. Per tant, la corba $P(\gamma_1)$ viu en $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ i només toca la recta real en $t = 0$ i val $P(0) = 9$. A més a més, si $R \to \infty$, $P(iR) \approx -R^6 + iR$. Així, veiem que $\Delta_{\gamma_1} P \to -\pi$ quan $R \to \infty$ (veieu el dibuix).



Així, tenim que

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, 0) \to \frac{1}{2\pi}(0 - \pi + 3\pi) = 1, \quad R \to \infty.$$

Per tant, P té un zero al primer quadrant.

Exercici 6.7.6. *(a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.*

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 0, 1, 2, \dots$). ◁

Solució: (a)

Apliquem el T. de Rouché a les funcions $g(z) = e^z - 4z - 1$ i $h(z) = -4z - 1$.

Tenim que, per $|z| = 1$:

$$|g(z) - h(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leqslant e^1 = e.$$

D'altra banda,

$$|-4z - 1| = |4z + 1| \geqslant 4|z| - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Per tant, sobre la corba —z—=1,

$$|g - h| \leqslant e < 3 \leqslant |h|.$$

En conseqüència, g i h tenen el mateix nombre d'arrels dins del disc unitat. Com que $-4z - 1 = 0$ té una solució al disc ($z = -1/4$) doncs $e^z = 4z + 1$ té exactament una solució al disc unitat.

(b) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = e^z - 3z^n$ i $g(z) = -3z^n$. Per a $|z| = 1$, tenim que

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \leqslant e < 3 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = n$.

Que les arrels són diferents es veu immediatament, comprovant que $f(z)$ i $f'(z) = e^z - 3nz^{n-1}$ no tenen arrels comuns.

Exercici 6.7.7. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació*: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, deprés mireu d'augmentar el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.*

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leqslant 1/2^n$, llavors totes aquestes arrels són al disc $D_{1/2}(1)$. ◁

Solució: (a) Apliquem el teorema de Rouché al disc $D(1, 1)$ i les funcions

$$f(z) = (z - 1)^n e^z - a$$

i

$$g(z) = (z - 1)^n e^z.$$

Per a $|z-1|=1$, tenim que

$$|f(z)-g(z)| = |a| < 1 < e^{\operatorname{Re} z} \leqslant |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap D_1(1) = \#Z(g) \cap D_1(1) = n$. Com que $D(1,1)$ és contingut al semiplà $\operatorname{Re} z > 0$, ja tenim el que demana l'enunciat. A la vora de $D_R(1) \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, també tenim que

$$|f(z)-g(z)| = |a| < 1 \leqslant e^{\operatorname{Re} z} \leqslant |g(z)|,$$

de manera que a tot el semiplà hi ha exactament n solucions comptant multiplicitats.

Que les arrels són diferents es veu immediatament, comprovant que $f(z)$ i $f'(z) = (z-1)^{n-1}e^z(n+z-1)$ no tenen arrels comuns.

(b) En cas que $|a| \leqslant 1/2^n$, apliquem el teorema de Rouché a $D(1,1/2)$ i les mateixes funcions d'abans:

$$|f(z)-g(z)| = |a| \leqslant \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n}e^{1/2} \leqslant \frac{1}{2^n}e^{\operatorname{Re} z} \leqslant |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap D(1,1/2) = \#Z(g) \cap D(1,1/2) = n$.

Exercici 6.7.8. *Demostreu que per a tot $R > 0$ existeix $n(R) \geqslant 0$ tal que si $n > n(R)$*

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leqslant R\}$. ◃

Solució: Observem que $P_n(z) \to e^z$ uniformement en compactes del pla quan $n \to \infty$. Per tant, $|P_n(z) - e^z|$ és arbitràriament petit en el compacte $\{|z| \leqslant R\}$, si n és prou gran.

Aplicarem el Teorema de Rouché, comparant P_n i $f(z) = e^z$. Veiem que si $|z| = R$ llavors $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \geqslant e^{-R}$. Doncs sigui $n(R)$ tal que

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} \text{ per a tot } n \geqslant n(R).$$

Aleshores, si $|z| = R$,

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} \leqslant |e^z|,$$

i pel Teorema de Rouché, e^z i $P_n(z)$ tenen el mateix nombre de zeros dins del disc de radi R, sempre que $n > n(R)$.

Exercici 6.7.9. *Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \to f$ uniformement en compactes d'Ω, per una certa funció f.*

1. *(Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tot $z \in \Omega$ i tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores, $f \equiv a$ o bé $f(z) \neq a$ en Ω.*

2. *Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geqslant 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω.* Indicació: *Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.*

3. *Proveu que si f té un zero d'ordre m en $a \in \Omega$, aleshores existeix $\rho_0 > 0$ tal que per tot $\rho < \rho_0$ i per tot $n > n_\rho$, f_n té exactament m zeros en $D_\rho(a)$ comptant multiplicitats.* $\triangleleft$

Solució: Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel Teorema de Weierstrass.

1. Immediat considerant $g_n(z) = f_n(z) - a$ i $g(z) = f(z) - a$ i aplicant el teorema de Hurwitz.

2. Suposem que $f(z_1) = f(z_2) = a$ tot i que $z_1 \neq z_2$. Considerem D_1 i D_2 dos discs tancats a Ω que continguin z_1 i z_2 respectivament. Aleshores, si f no és constant igual a a, per l'apartat anterior $f_n(z) = a$ ha de tenir almenys una solució en D_1 i una altra en D_2 si n és prou gran (si no en tingues cap, $f(z) = a$ tampoc en tindria). Però això contradiu que f_n sigui injectiva per a tot n.

3. Prenem ρ de manera que f no tingui cap zero en l'adherència de $D_\rho = D_\rho(a)\backslash\{a\}$. Aleshores anomenem $\delta := \inf_{\partial D_\rho} |f| > 0$. Per la convergència uniforme existeix n_ρ tal que per $n > n_\rho$ tenim que $\sup_{\partial D_\rho} |f_n - f| < \delta/2 < \inf_{\partial D_\rho} |f|$, i per tant podem aplicar el teorema de Rouché.

7 Representació Conforme

7.1 El teorema de l'aplicació de Riemann

7.2 Projecció estereogràfica i circumferències generalitzades

Exercici 7.2.1. *Sigui p la projecció estereogràfica. Demostreu que $\lambda = \frac{1}{1-z}$, i que la inversa de p és*

$$p^{-1}(x+iy) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\left(x, y, x^2+y^2\right). \qquad \triangleleft$$

Solució:

Solució proposada per Marta Merino Sánchez: El segment que connecta $(0,0,1)$ amb $(x,y,0)$ és $Q(t) = (0,0,1) + t[(x,y,0) - (0,0,1)] = (tx, ty, 1-t)$ i volem que compleixi l'equació de l'esfera S^2, on $(x,y,z) \in S^2$ compleix l'equació:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = z.$$

Perquè el punt $Q(t)$ pertanyi a l'esfera S^2, hem de comprovar que compleixi l'equació corresponent:

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 = 1 - t.$$

Aquesta equació es pot desenvolupar de la següent manera:

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1 - 2t + t^2) = 1 - t.$$

Simplificant:

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) - t = 0$$

Aquesta equació té les solucions:

$$t(t(x^2 + y^2 + 1) - 1) = 0.$$

Per tant, les possibles solucions per a t són:

1. $t = 0$,
2. $t = \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

Això implica que per a t dins de l'interval $[0,1]$, hem de considerar la solució $t = \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

Només ens queda substituir $Q(\frac{1}{x^2+y^2+1}) = (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, 1-\frac{1}{x^2+y^2+1}) = \frac{1}{x^2+y^2+1}(x, y, x^2+y^2+1-1)$

Exercici 7.2.2. *Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi r és*

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2,$$

i la d'una recta perpendicular a α és

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m \in \mathbb{R}. \qquad \triangleleft$$

Solució:

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso: Sabem que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi $r \in \mathbb{R}_+$ és

$$|z-\alpha| = r^2.$$

Així,

$$r^2 = |z-\alpha|^2 = (z-\alpha)\overline{(z-\alpha)} = (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = |z|^2 + |\alpha|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z,$$

és a dir

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2.$$

D'altra banda, identificant $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ tenim que

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = 2\langle z, \alpha\rangle \in \mathbb{R}.$$

Finalment, sigui r una recta perpendicular a α, és a dir,

$$r : z_0 + \operatorname{Vect}(\alpha)^{\perp},$$

on $z_0 \in \mathbb{C}$. Tenim que

$$z \in r \iff \langle z - z_0, \alpha\rangle = 0 \iff \langle z, \alpha\rangle = \langle z_0, \alpha\rangle \iff 2\langle z, \alpha\rangle = 2\langle z_0, \alpha\rangle =: m \in \mathbb{R},$$

i.e.,

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m.$$

7.3 Transformacions de Möbius

Exercici 7.3.1. *Donada una homografia* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$*, definim* $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, que està definit* mòdul constant *multiplicativa. Per exemple, les matrius* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *corresponen respectivament a la translació* $z \mapsto z + b$*, a la dilatació* $z \mapsto az$ *i a la inversió* $z \mapsto 1/z$*.*

a) Donades $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$*, demostreu que* $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$ *(*mòdul constant *multiplicativa).*

b) Trobeu T^{-1}*.* ◁

Solució:

Solució proposada per Ada López del Castillo Avilés:

a) Per demostrar que
$$A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1},$$
veurem que els dos costats de la igualtat donen el mateix. Anomenem
$$T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \, T_2(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$
Per la primera part de la igualtat, hem de calcular la matriu de la composició:
$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = \frac{a'(\frac{az+b}{cz+d}) + b'}{c'(\frac{az+b}{cz+d}) + d'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}.$$
Per la segona part de la igualtat hem de calcular el producte de les dues matrius:
$$A_{T_2} A_{T_1} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + b'c & ba' + db' \\ c'a + d'c & d'd + bc' \end{bmatrix}.$$
Ja veiem que és el mateix.

b) Calculem T^-1:
$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Longrightarrow w \cdot (cz+d) = az + b \Longrightarrow dw - b = z \cdot (a - cw) \Longrightarrow \frac{dw-b}{a-cw} = z.$$
Per tant la inversa és:
$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$
Notem que coincideix amb la inversa matricial mòdul constant multiplicativa (el determinant!).

Exercici 7.3.2. *Demostreu que tota* $T \in \mathcal{M}$ *es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions.* ◁

Solució:

Solució proposada per Marta Merino Sánchez: Utilitzem la següent nomenclatura per

- la dilatació $D_a(z) = az$,
- la translació $T_b(z) = z + b$
- la inversió $I(z) = \frac{1}{z}$

Tenim que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
Si suposem que $c \neq 0$, llavors fem la divisió i tenim que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}(cz+d)^{-1}$$

Per tant, ho podem escriure com la composició següent

$$(T_{\frac{a}{c}} \circ D_{\frac{bc-ad}{c}} \circ I \circ T_d \circ D_c)(z)$$

Ara, si $c = 0$, tenim que $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$,
Per tant, ho podem escriure com la composició següent

$$(T_{\frac{b}{d}} \circ D_{\frac{a}{d}})(z).$$

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso: Identifiquem, mòdul constant multiplicativa, l'aplicació $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on $ad - bc \neq 0$ amb la matriu

$$A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com en l'exercici 7.3.1.

Com que A_T és invertible ja que $\det(A_T) = ad - bc \neq 0$ tenim que A_T és producte de matrius elementals. Si relacionem cada matriu elemental amb una de les tres homografies elementals —translacions, dilatacions i inversions— ja ho tindrem ja que el producte de matrius correspon, sota la identificació anterior, a la composició d'homografies.

Recordem quines són les matrius elementals de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: Siguin $\mu, \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$P(1,2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D(1,\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D(2,\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$E(1,2,\mu) := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } E(2,1,\mu) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Clarament, $P(1,2)$, $D(1,\lambda)$ i $E(1,2,\mu)$ són les corresponents a les homografies elementals. D'altra banda, al tenir una correspondència mòdul constant multiplicativa, tenim que les matrius

$$D(2,\lambda) \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s'identifiquen amb la mateixa homografia, $\lambda^{-1}z$. Així doncs, només queda veure qui és $E(2,1,\mu)$. Fixem-nos, però, que

$$P(1,2)E(1,2,\mu)P(1,2) = E(2,1,\mu).$$

Per tant, substituint les matrius $D(2,\lambda)$ i $E(2,1,\mu)$ si cal, la descomposició d'A_T ens dona una descomposició de T en homografies elementals.

Exercici 7.3.3. *Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.* $\triangleleft$

Solució:

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso: Com que tota homografia es pot descompondre en translacions, dilatacions i inversions i les dilatacions i translacions porten rectes a rectes i circumferències a circumferències, només hem de comprovar com actua la inversió sobre circumferències generalitzades.

Sigui $T(z) = 1/z$ i r una recta d'equació

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m$$

on $\alpha \in \mathbb{C}^*$ i $m \in \mathbb{R}$. Recordem que, si escrivim $w := T(z) = z^{-1}$, aleshores

$$w = |w|^2\bar{z},$$

i.e.,

$$z = |z|^2\bar{w}.$$

Així, si $m \neq 0$,

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m \iff \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w = |w|^2 m.$$

Podem arreglar-ho un pèl més per tal de tenir exactament l'equació descrita a l'apartat *(a)*:

$$|w|^2 - \left(\frac{\bar{\alpha}}{m}\right)\bar{w} - \overline{\left(\frac{\bar{\alpha}}{m}\right)}w = \left|\frac{\bar{\alpha}}{m}\right|^2 - \left|\frac{\bar{\alpha}}{m}\right|^2,$$

que és l'equació d'una circumferència de centre $\bar{\alpha}/m$ i radi $|\alpha/m|$, en particular passa per l'origen i la tangent a l'origen té el pendent conjugat al de la recta original.

Si $m = 0$, per a tot $z \neq 0$ tenim que

$$\bar{\alpha}\bar{w} + \bar{\bar{\alpha}}w = 0,$$

que és una recta perpendicular a $\bar{\alpha}$ —i també conté $T(0) = \infty$—. Per tant, té el pendent conjugat al de la recta original.

És a dir, T envia rectes a circumferències generalitzades. D'altra banda, sigui C una circumferència d'equació

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2,$$

on $\alpha \in \mathbb{C}$ i $r \in \mathbb{R}_+$. Tenim que, escrivint $w := T(z)$, si $r^2 - |\alpha|^2 \neq 0$,

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2 \iff 1 - \alpha w - \bar{\alpha}\bar{w} = |w|^2(r^2 - |\alpha|^2).$$

Així,

$$|w|^2 - \overline{\left(\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)} w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2} \bar{w} = \frac{1}{r^2 - |\alpha|^2},$$

és a dir, obtenim una circumferència. Si la circumferència original talla la circumferència unitat en dos punts, aleshores les imatge d'aquests dos punts són els seus conjugats, i per tant la circumferència imatge té també dos punts de tall conjugats als primers. Si l'original fos tangent exterior, aleshores la imatge seria tangent interior amb punt de tangència conjugat.

Si $r^2 - |\alpha|^2 = 0$, és a dir que $0 \in C$, aleshores per tot $z \neq 0$ tenim que

$$\bar{\bar{\alpha}} w + \bar{\alpha} \bar{w} = 1,$$

una recta —i també conté $T(0) = \infty$—. Notem que aquesta recta té el pendent conjugat al de la tangent a l'origen de la recta original.

En resum, T envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades. Per tant, tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.

Exercici 7.3.4. *Sigui $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Quina és la imatge per f de*

a) la recta real, *b) $\partial D_2(0)$,* *c) $\partial \mathbb{D}$,* *d) l'eix imaginari.*

I per $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$? ◁

Solució:

a) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \backslash \{1\}$, $g(\mathbb{R}) = \partial \mathbb{D}$

b) $f(\partial D_2(0)) = \partial D_{4/3}(5/3)$ (talla $\mathbb{R}$ en angle recte a 3 i 1/3),
$g(\partial D_2(0)) = \{$cercle que talla $\partial \mathbb{D}$ perpendicularment a $\frac{3 \pm 4i}{5}\}$

c) $f(\partial \mathbb{D}) = \{$eix imaginari$\} \cup \{\infty\}$, $g(\partial \mathbb{D}) = \{$eix imaginari$\} \cup \{\infty\}$,

d) $f(i\mathbb{R}) = \partial \mathbb{D} \backslash \{1\}$, $g(i\mathbb{R}) = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Exercici 7.3.5. *Troba l'homografia que envia $(i, 0, -1)$ a $(-i, 0, \infty)$.* ◁

Solució: $T(z) = \frac{z(-1-i)}{z+1}$.

Exercici 7.3.6. *Demostra el corol·lari 7.16.* ◁

Exercici 7.3.7. *Troba una homografia que enviï $\mathbb{D}$ a $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.* ◁

Solució: Per exemple, $(1, i, -1) \mapsto (0, 1, \infty)$, i queda $T(z) = -i \frac{z-1}{z+1}$.

Exercici 7.3.8. *Sigui $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ i definim*

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}, T(z) = \frac{z}{az+1}.$$

Trobeu

$$T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1, \quad T^m, m \in \mathbb{Z}. \qquad \triangleleft$$

Solució:

Solució proposada per Ada López del Castillo Avilés: Considerem les matrius associades a cada transformació, tenint en comte que en el cas de T_3 ens demana la inversa, llavors tenim:

$$A_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}, \quad A_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{T_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Per l'exercici 7.3.1, hem de resoldre el producte de les matrius, vigilant l'ordre:

$$A_{T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1} = A_{T_3}^{-1} A_{T_2} A_{T_1}.$$

Llavors, fent els càlculs, tenim:

$$A_{T_3}^{-1} \cdot A_{T_2} \cdot A_{T_1} = \begin{bmatrix} 3+3i & -2i \\ 2-2i & -1-i \end{bmatrix}.$$

Ara per T^m: La matriu associada de T(z) és:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calculem T^2, notem:

$$A_{T^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{bmatrix}.$$

Per inducció acabem veient que:

$$A_T^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ma & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercici 7.3.9. *Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació*

$$T(z) = \frac{2z+i}{(1-i)z+3i}. \qquad \triangleleft$$

Solució:

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso: Tal i com s'ha vist a l'exercici 7.3.2, tenim que

$$T(z) = \frac{2z+i}{(1-i)z+3i} = 1+i+\frac{3-2i}{(1-i)z+3i}.$$

Per tant, seguint la notació de la solució de l'exercici 7.3.2,

$$T = T_{1+i} \circ D_{3-2i} \circ I \circ T_{3i} \circ D_{1-i}.$$

Exercici 7.3.10. *Trobeu totes les $T \in \mathcal{M}$ que tinguin per punts fixos 0 i $-i$.* ◃

Solució:

Solució proposada per Ada López del Castillo Avilés i Miguel Puelma Martínez: Un punt fix és aquell que:

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Longrightarrow cz^2 + z(d-a) - b = 0.$$

Per tant, volem trobar a, b, c, d tals que $T(0) = 0$ i $T(-i) = -i$. Per tant,

$$cz^2 + z(d-a) - b = c(z+0)(z+i) \Longrightarrow cz^2 + z(d-a) - b = cz^2 + ciz.$$

Com que la matriu d'una homografia està determinada mòdul constant multiplicativa, podem dividir tots els coeficients per c sempre que $c \neq 0$ i suposar que $c = 1$. Així, si $c \neq 0$, veiem que els valors que satisfan la igualtat són $b = 0$, $c = 1$ i $(d-a) = i$, per tant la transformació que busquem és:

$$T(z) = \frac{az}{z+(i+a)}.$$

Si $c = 0$, aleshores $(d-a) = 0$ i $b = 0$, la transformació que busquem és:

$$T(z) = z$$

(tot i que en aquest cas 0 i $-i$ no són els únics punts fixos).

Exercici 7.3.11. *Trobeu $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(1-i) = 1+i, T(2) = i, T(1+i) = -i$.* ◃

Solució:

Solució proposada per Miguel Puelma Martínez:

Pel lema 7.15, sabem que hi ha homografies $S, U \in \mathcal{M}$ tals que $S(1-\mathrm{i}) = 0$, $S(2) = 1$, $S(1+\mathrm{i}) = \infty$, $U(1+\mathrm{i}) = 0$, $U(\mathrm{i}) = 1$ i $U(-\mathrm{i}) = \infty$. Per tant, $T := U^{-1} \circ S$ és una homografia que compleix per construcció les condicions de l'enunciat. Recordem que l'homografia que envia $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$ i $z_3 \mapsto \infty$ té matriu

$$\begin{pmatrix} z_2 - z_3 & -(z_2 - z_3)z_1 \\ z_2 - z_1 & -(z_2 - z_1)z_3 \end{pmatrix}.$$

Substituint els valors, s'obté

$$A_S = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A_U = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2(1-\mathrm{i}) \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Per tant, només cal calcular

$$A_T = A_U^{-1} A_S = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -2(1-\mathrm{i}) \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-\mathrm{i} & 6+4\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

on les igualtats són a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* I_2 =: \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ —el grup projectiu lineal—, i.e., mòdul constants multiplicatives. Obtenim que

$$T(z) = \frac{(-5-\mathrm{i})z + 6 + 4\mathrm{i}}{(-1+\mathrm{i})z + 4 + 2\mathrm{i}}.$$

Exercici 7.3.12. *Siguin C_1 i C_2 dues circumferències generalitzades i $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \backslash C_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \backslash C_2$. Demostreu que existeix $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C_1) = C_2$ i $T(z_1) = z_2$. Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu una d'elles en el cas particular*

$$C_1 = \{z : |z-1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i.$$

◁

Solució:

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso:
Considerarem primer uns quants casos i després els ajuntarem tots. Cal tenir present els resultats de l'exercici 7.3.3. Sigui r una recta, $\partial D_r(a)$ una circumferència i $z_1 \notin \partial D_r(a) \cup r$.

- Si considerem la recta r, notem que $0 \notin r - z_1$ —és a dir, estem en el cas $m \neq 0$ per la recta $r - z_1$ de l'exercici 7.3.3—. Per tant, la imatge de r per $I \circ T_{-z_1}$ és una circumferència per l'exercici 7.3.3 i $(I \circ T_{-z_1})(z_1) = \infty$.

- Si considerem la circumferència i $z_1 = \infty$ considerem $T := D_{1/r} \circ T_{-a}$, aleshores, $T(\partial D_r(a)) = \partial \mathbb{D}$ i $T(\infty) = \infty$.

- Si considerem la circumferència i $z_1 \neq \infty$ aleshores tenim que $I \circ T_{-z_1}$ verifica $(I \circ T_{-z_1})(z_1) = \infty$ i, ja que $0 \notin \partial D_r(a) - z_1$ –és a dir, estem en el cas $r^2 - |\alpha|^2 \neq 0$ per la circumferència $\partial D_r(a) - z_1$ de l'exercici 7.3.3–, $I \circ T_{-z_1}(\partial D_r(a))$ és una circumferència de radi r' i centre α'. Aleshores, $D_{1/r'} \circ T_{-\alpha'} \circ I \circ T_{-z_1}(\partial D_r(a)) = \mathbb{D}$ i $D_{1/r'} \circ T_{-\alpha'} \circ I \circ T_{-z_1}(z_1) = \infty$.

En resum, donada qualsevol circumferència generalitzada i qualsevol punt que no pertany a la circumferència generalitzada, existeix una homografia que porta aquesta circumferència generalitzada al disc $\partial \mathbb{D}$ i el punt a l'infinit. Com que tota homografia és invertible, tenim el que volíem demostrar.

Pel cas concret procedim igual. Tenim que $C_1 = \partial D_1(1)$ i $z_1 = 1$. Així, $T_{-1}(C_1) = \partial\mathbb{D}$ i, per l'exercici 7.3.3, $I(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, d'altra banda, $I \circ T_{-1}(z_1) = I(0) = \infty$. Hem arribat a on volíem. En segon lloc, l'equació de C_2 és

$$(1-i)\bar{z} + (1+i)z = 0.$$

Com que $z_2 = i$ considerem $r := T_{-i}(C_2)$ que és una recta del mateix pendent que passa pel $-i$, per tant, té equació

$$(1-i)\bar{z} + (1+i)z = 2.$$

Així, per l'exercici 7.3.3, $I(r) = \partial D_{1/\sqrt{2}}(1/2 + i/2)$. Aleshores, $(D_{\sqrt{2}} \circ T_{-1/2-i/2} \circ I \circ T_{-i})(C_2) = \partial\mathbb{D}$ i $(D_{\sqrt{2}} \circ T_{-1/2-i/2} \circ I \circ T_{-i})(z_2) = \infty$. Per tant,

$$(D_{\sqrt{2}} \circ T_{-1/2-i/2} \circ I \circ T_{-i})^{-1} \circ I \circ T_{-1}$$

és l'homografia que busquem. Usant que $T_a^{-1} = T_{-a}$, $D_r^{-1} = D_{1/r}$ i $I^{-1} = I$ podem calcular-la fàcilment.

7.4 Raó doble i simetria

Exercici 7.4.1. *Sigui $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(D(a,R)) = D(a,R)$. Demostreu que els punts fixos de T estan a $\partial D(a,R)$ o bé són simètrics respecte a $\partial D(a,R)$.* ◁

7.5 Automorfismes

Exercici 7.5.1. *Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien $1/2$ a 0. N'existeix alguna que enviï 0 a $-i/2$? I 0 a $-i/4$? Utilitzeu T per trobar una representació conforme S que enviï $\partial\mathbb{D}$ a $\partial D_2(i)$ tal que $S(1/2) = i$ i $S(0) = 0$.* ◁

Solució: Són $T(z) = e^{i\theta}\frac{2z-1}{2-z}$. Si prenem $\theta = \pi/2$, obtenim $T(z) = i\frac{2z-1}{2-z}$, amb $T(0) = -i/2$. No n'hi ha cap de les altres, ja que sigui qui sigui θ, sempre tenim que $|T(0)| = \frac{|-1|}{2} = 1/2$.

Per trobar S cal usar $f(z) = 2z + i$. Aleshores $f \circ T(1/2) = i$, i $f \circ T(0) = 0$. Prenem doncs $S = f \circ T$.

Exercici 7.5.2. *Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt $b \in \mathbb{D}$ per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir*

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}),\, T(a) = \tilde{a}\},$$

és una circumferència. ◁

Solució: Notem que donada $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $T(a) = \tilde{a}$, per la unicitat tenim que $T_{\tilde{a}} \circ T = e^{i\theta} T_a$. per algun θ. Per tant, escrivint

$$T_\theta = T_{\tilde{a}} \circ (e^{i\theta} T_a),$$

podem parametritzar el conjunt

$$F = \{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}),\ T(a) = \tilde{a}\}$$

en termes d'aquest angle:

$$F = \{w_\theta \in \mathbb{D} : w = T_\theta(b)\}.$$

Com que

$$e^{i\theta} T_a(b)$$

és una circumferència centrada a l'origen, F és la imatge d'aquesta circumferència per $T_{\tilde{a}}$, que és una homografia i envia circumferències que no passen per $T_{\tilde{a}}^{-1}(\infty) = 1/\bar{a} \notin \mathbb{D}$ a circumferències.

Exercici 7.5.3. *Troba tots els automorfismes T de $\mathbb{D}$ tals que $T(1/2) = 1/3$.* ◃

7.6 Altres transformacions conformes

Exercici 7.6.1. *Quina és la imatge del primer quadrant per z^3?* ◃

Solució: Els tres primers quadrants (l'interior de la clausura, per ser precisos).

Exercici 7.6.2. *Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a a un semiplà?* ◃

Solució: L'exponencial.

Exercici 7.6.3. *Trobeu una aplicació de Riemann del sector $\{0 < \operatorname{Arg} z < \pi/8\}$.* ◃

Solució: $\frac{z^8 - i}{z^8 + i}$.

Exercici 7.6.4. *Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia?* ◃

Solució: No, perquè es preserven els angles a tot el pla. Cal una altra representació.

Exercici 7.6.5. *Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en $D_1(1)$ que enviï $1 \mapsto 1$, $0 \mapsto 0$ i $\infty \mapsto 1 + i$.* ◃

Exercici 7.6.6. *Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ en $\mathbb{D}$ són de la forma $e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ per alguna $a \in \mathbb{H}_+$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$.* ◃

Exercici 7.6.7. *Trobeu una transformació de Möbius que enviï el primer quadrant a* $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$. *Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de* $\mathbb{H}_+$ *a* $\{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. ◁

Solució: Possible solució: Primera pregunta: $\frac{z-1}{z+1}$. Segona: $\left(\frac{1+e^{\pi i z}}{1-e^{\pi i z}}\right)^2$.

Exercici 7.6.8. *Trobeu una representació conforme de* $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ *en* $\mathbb{D}$. ◁

Solució: Possible solució: $\frac{-ie^{2iz}-1}{-ie^{2iz}+1}$

Exercici 7.6.9. *Trobeu una representació conforme d'*Ω_1 *en* Ω_2.

a) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$.

b) $\Omega_1 = \mathbb{D}$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$.

c) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Re} z > 1/2\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$.

d) $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

e) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$.

f) $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$, *que deixi invariant el segment* $(-i, i)$.

g) $\Omega_1 = \mathbb{D} \backslash [0, 1)$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \backslash [0, \infty)$.

h) $\Omega_1 = \{|\operatorname{Im} z| < \pi/2\} \backslash ((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$. ◁

8 Fluids

8.1 Qüestions generals. Escenari i notació.

Exercici 8.1.1. *Proveu que* $\Gamma = 0$ *en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe* C^2 *com a mínim).* $\triangleleft$

Solució: Per ser flux potencial tenim que $\mathbf{V} = (V_1, V_2) = \nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$ llavors si apliquem el teorema de Green a $C = \partial\Omega$ tenim

$$\oint_C V_1 dx + V_2 dy = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \int_\Omega (\varphi_{yx} - \varphi_{xy}) dxdy = 0.$$

Exercici 8.1.2. *Proveu que per fluxos definits en un domini* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial* $\varphi(x, y)$ *és una funció harmònica.* $\triangleleft$

Solució: Estem suposant $\Gamma = Q = 0$ és a dir que $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ i que $(V_1)_x + (V_2)_y = 0$. Llavors

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (V_1)_x + (V_2)_y = 0$$

i φ és harmònica.

Exercici 8.1.3. *Proveu que* $\overline{\Phi'(z)} = \boldsymbol{V}(z) = V_1 + iV_2$. $\triangleleft$

Solució:

$$\overline{\Phi'(z)} = \overline{(\varphi + i\psi)'} = \overline{\varphi_x + i\psi_x} = \overline{\varphi_x - i\varphi_y} = \varphi_x + i\varphi_y = V_1 + iV_2.$$

8.2 Fluxos bàsics.

Exercici 8.2.1. Superposició. *Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt* $-a$ *amb una pica al punt* a*:*

$$\Phi(z) = k\log(z + a) - k\log(z - a) = k\log\left(\frac{z + a}{z - a}\right).$$

Trobeu l'expressió de $\boldsymbol{V}$*,* V*,* φ *i* ψ*. Dibuixeu les línies de corrent (*$\psi = c$*).* $\triangleleft$

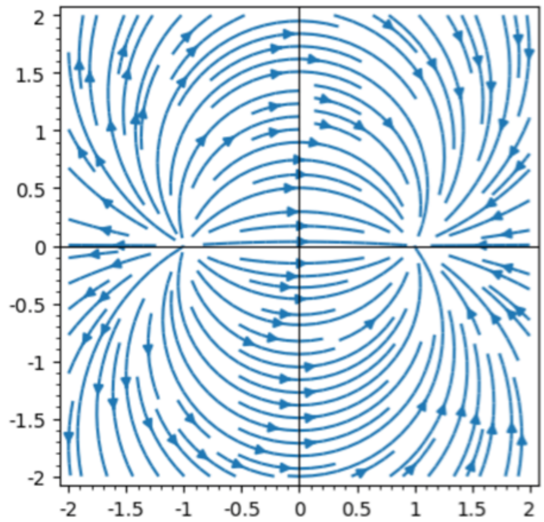


Figura 8.1: Superposició amb $a = 1$.

Solució: $\Phi(z) = k(\log\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + i\arg\left(\frac{z+a}{z-a}\right)) = \varphi + i\psi$. La condició $\psi = c$ equival a que $\operatorname{Im}(\frac{z+a}{z-a})/\operatorname{Re}(\frac{z+a}{z-a})$ és constant. Però

$$\frac{z+a}{z-a} = \frac{(z+a)(\bar{z}-a)}{|z-a|^2} = \frac{|z|^2 - a^2 + a(\bar{z}-z)}{|z-a|^2} = \frac{|z|^2 - a^2 - 2iay}{|z-a|^2}$$

i les corbes de flux venen donades per equacions de la forma $|z|^2 - a^2 = Cy$. O bé

$$x^2 + (y - C/2)^2 = a^2 + C^2/4$$

que són circumferències que passen pels punts $-a$ i a. Pel flux resulta

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = k\left(\frac{1}{\bar{z}+a} - \frac{1}{\bar{z}-a}\right) = \frac{-2ka}{(\bar{z}-a)(\bar{z}+a)} = -2ka\frac{z^2-a^2}{|z-a|^2|z+a|^2}.$$

i

$$\mathbf{V} = -\frac{2ka}{|z-a|^2|z+a|^2}(x^2 - y^2 - a^2 + 2xyi).$$

Tenim

$$V = \frac{2|ka|}{|z-a||z+a|}.$$

Exercici 8.2.2. *En l'exercici anterior, fem $a \to 0$ i $k \to \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sigui finit. Veure que al límit obtenim el potencial complex $\Phi(z) = \mu/z$ que s'anomena* doblet *o* dipol. *Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat $2\pi\mu$ s'anomena* moment *del doblet. Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V, φ i ψ. Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$).* ◁

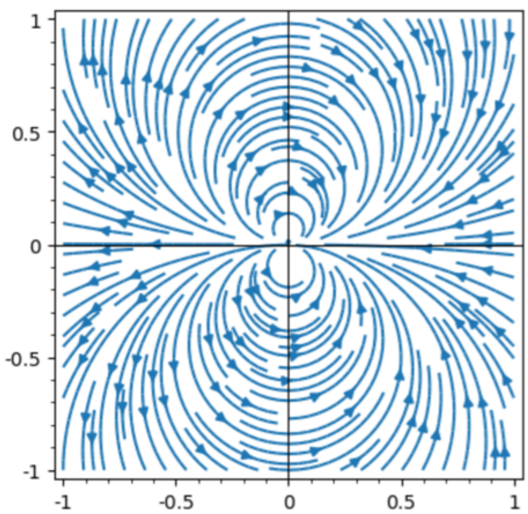
Solució: Fem el límit quan a tendeix a zero i $k = \mu/2a$. Tenim

$$\lim_{a\to 0} \frac{\mu}{2a} \log\left(\frac{z+a}{z-a}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{a\to 0} \frac{\mu(\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right))'}{2} = \lim_{a\to 0} \frac{\mu}{2}\frac{z-a}{z+a}\frac{(z-a)-(-1)(z+a)}{(z+a)^2} = \frac{\mu}{z}.$$

Com que $\Phi(z) = \mu\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ resulta que $\varphi(x,y) = \mu x/(x^2+y^2)$ i $\psi(x,y) = -\mu y/(x^2+y^2)$.m Les línies de flux ($\psi = c$) són les corbes de nivell de $y/(x^2+y^2)$, és a dir les donades per equacions $x^2+y^2+Cy = 0$ que podem escriure com $x^2+(y+C/2)^2 = C^2/4$. Es tracta de circumferències amb centre a l'eix OY que passen per l'origen.

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \overline{-\frac{\mu}{z^2}} = -\mu\frac{z^2}{|z|^4} = -\frac{\mu}{|z|^4}(x^2-y^2+2ixy), \quad V = \frac{\mu}{|z|^2}.$$

El dibuix del flux és:



Exercici 8.2.3. Font-remolí. *Estudiar el flux amb funció potencial* $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\log(z-a)$. *Discutiu segons els valors de* Γ *(circul·lació o intensitat) i* Q *(potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de* Γ *i* Q. ◁

Solució: Per simplificar l'estructura sigui $\lambda = \alpha + i\beta = \dfrac{\Gamma+iQ}{2\pi i}$. Llavors

$$\Phi(z) = (\alpha\log|z-a| - \beta\arg(z-a)) + i(\beta\log|z-a| + \alpha\arg(z-a))$$

i

$$\varphi = \alpha\log|z-a| - \beta\arg(z-a),\ \ \psi = \beta\log|z-a| + \alpha\arg(z-a).$$

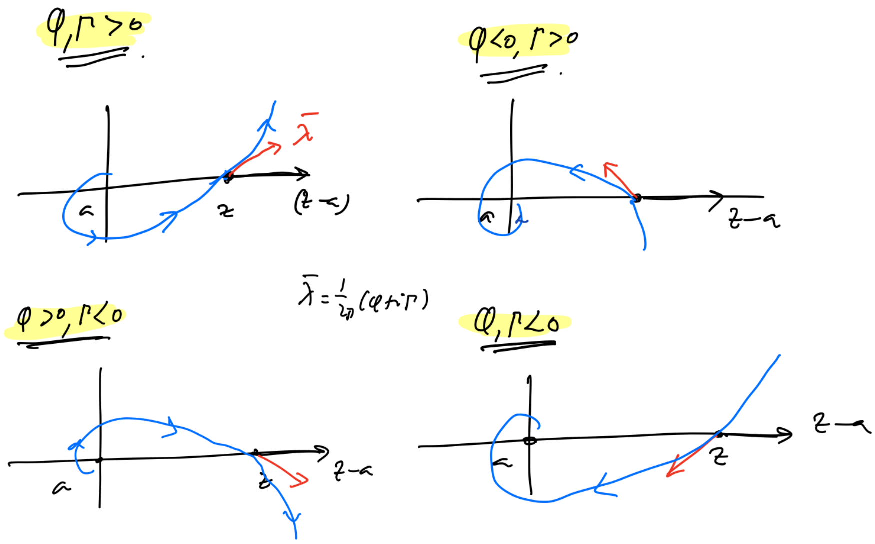
Com que $\Phi'(z) = \dfrac{\lambda}{z-a}$ resulta que

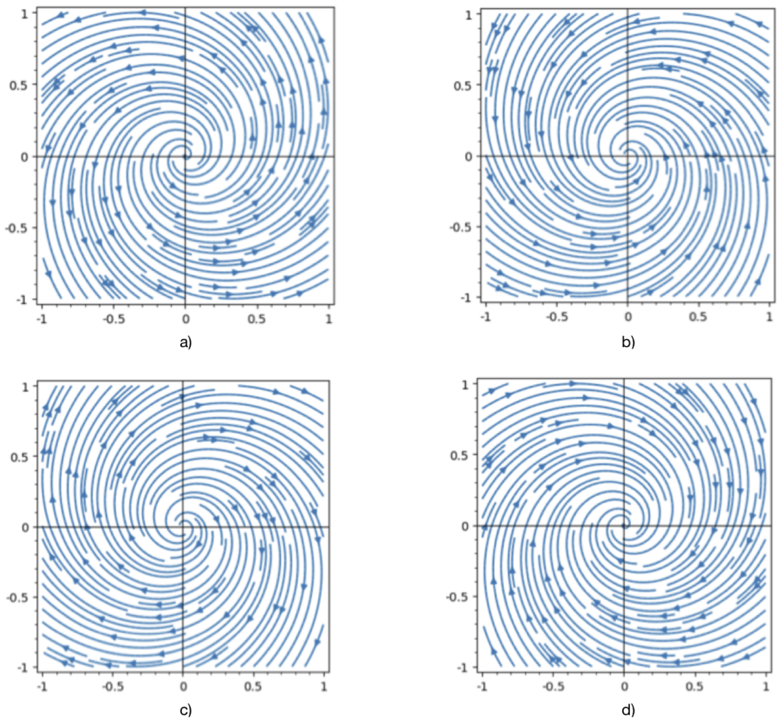
$$\oint_C \Phi'(z)dz = \Gamma + iQ$$

on C és un circuit al voltant de a recorregut en sentit antihorari. Pel camp tenim que

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \frac{\bar{\lambda}}{|z-a|^2}(z-a),\ V = \frac{|\lambda|}{|z-a|^2}.$$

Veiem que la direcció de $\mathbf{V}$ en cada punt z s'obté girant i dilatant la direcció radial $z-a$ segons el que diu la constant $\bar{\lambda} = re^{-i\delta} = (Q + i\Gamma)/2\pi$. Veure les figures adjuntes.





8.3 Obstacles

Exercici 8.3.1. *Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \log(z+2)$ que és una font sortint des del punt $z = -2$ (vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial*

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

a) Descomposeu Φ en fluxos coneguts.

b) Calculeu $\Phi'(z)$ i confirmeu el que es demostra a l'apartat anterior.

c) Vegeu que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \dfrac{1}{z+2}$ i que llavors lluny de $z = -2$ el flux associat a Φ és com una font sortint de $z = -2$.

d) Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` *i* `streamline_plot`*).* ◁

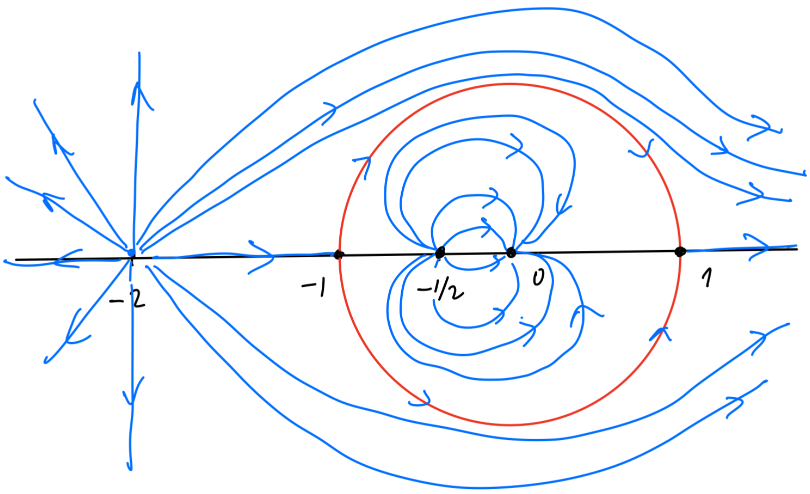
Solució: a) Abans de res observem que si $z = re^{i\theta}$ llavors $\overline{\log(z)} = \log r - i\theta = \log r + i(-\theta) = \log(\bar{z})$. Llavors $\overline{\log(1/\bar{z}+2)} = \cdots = \log(2) - \log z + \log(z + 1/2)$ i

$$\Phi(z) = \log(z+2) + \log(z+1/2) - \log(z) + \log(2).$$

Analitzem els quatre sumands

- $\log(z+2)$ és la font sortint original al punt -2.
- $\log(z+1/2)$ és una font sortint al punt $-1/2$ dins de la circumferència invariant.
- $-\log(z)$ és una font entrant a l'origen.
- $\log(2)$ és un terme constant que no afecta a les trajectòries (les corbes de nivell no canviem de forma, només de nivell d'energia').

Podem fer un esquema gràfic com es veu a la figura:

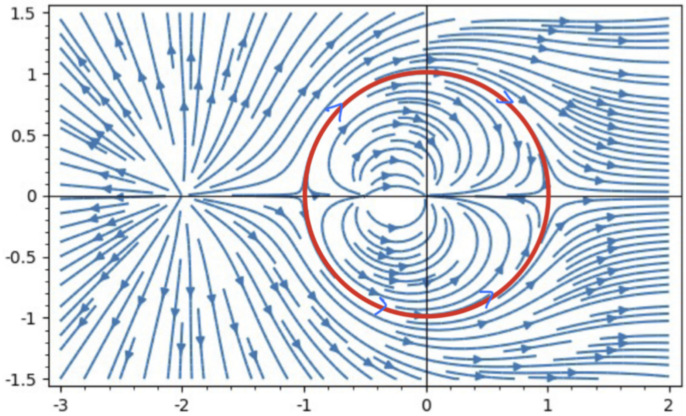


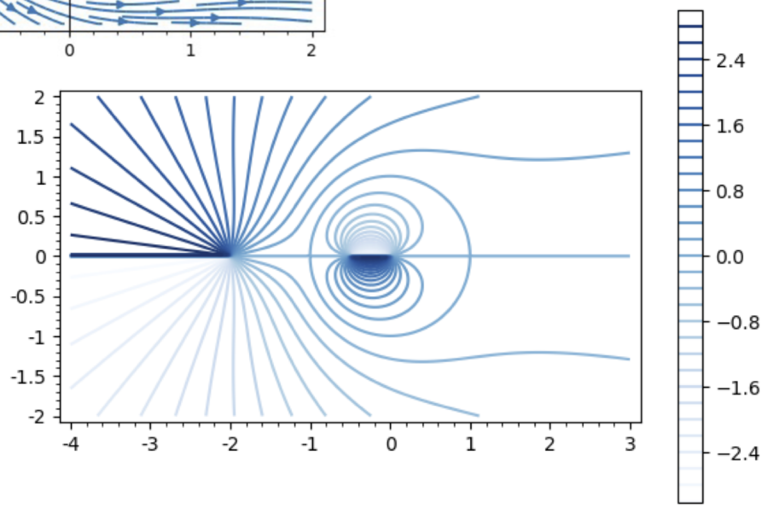
Font: -2, $-1/2$ Punts estacionaris: -1, 1
Pou: 0

b) $\Phi'(z) = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{1}{z+1/2} - \dfrac{1}{z}$ que correspon al que s'ha dit abans.

c) Quan $|z| \to \infty$ resulta que $\Phi(z) \approx \log(z+2)$ i la seva derivada s'acosta a $\frac{1}{z+2}$. Des de molt lluny el flux es veu com una font lineal des del punt $z = -2$.

d) El gràfics adjunts amb `streamline_plot` i amb `contour_plot` mostren clarament el comportament.





8.4 Expressió general (recapitulació).

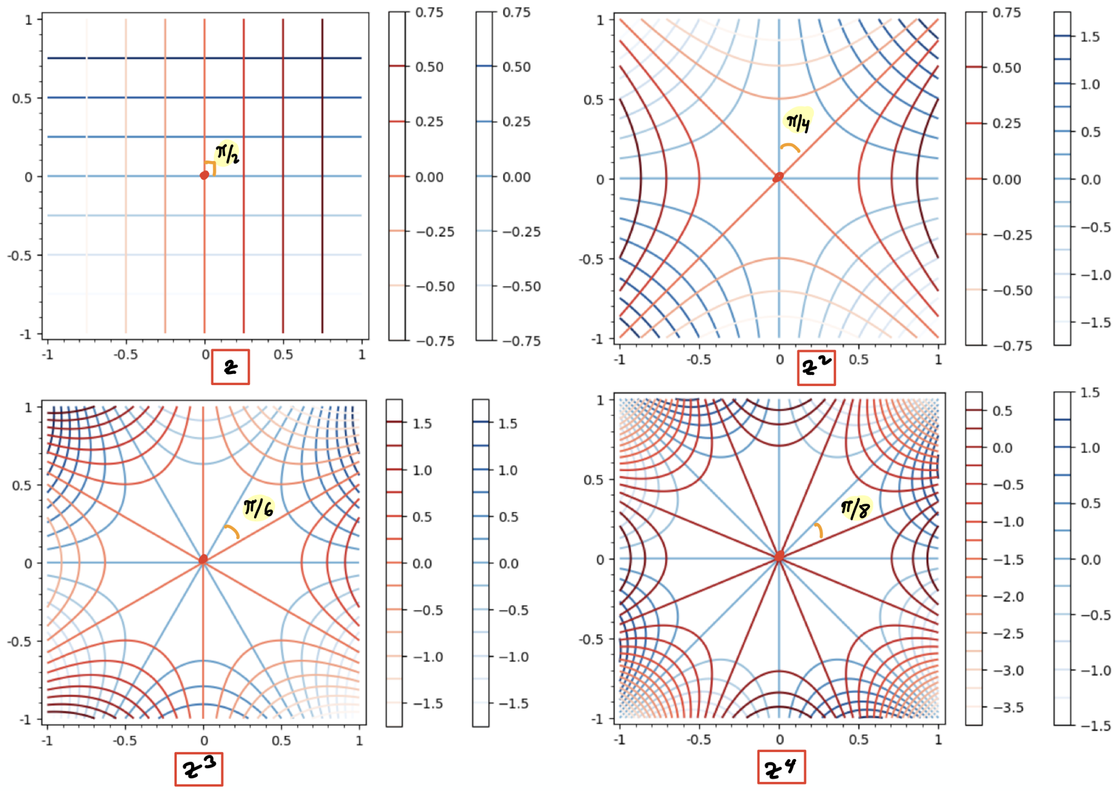
Exercici 8.4.1. *Pels z on $\boldsymbol{V}(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ diem que hi ha un* punt estacionari *del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).*

a) Per $\Phi(z) = z^n$ el 0 és un punt estacionari d'ordre $n-1$. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per $n = 2, 3, 4$.

b) Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?

c) Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = ct., \psi = ct.$) formen un angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?

Solució: a) Fem els gràfics de les corbes de nivell per φ (equipotencials, vermell) i per ψ (corrent, blau) per $z^n, n = 1, 2, 3, 4.$:



b) Mirant els gràfics es dedueix que ha de ser $\pi/2n$.

c) Fem el cas $\Phi(z) = z^n$. Si $z = re^{i\theta}$ llavors $\Phi(z) = r^n e^{i\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$. Aleshores

$$\varphi(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \qquad \psi(r, \theta) = r^n \sin n\theta.$$

Les línies de corrent i les línies equipotencials que passen 0 són aquelles que $\varphi = 0 = \psi$ respectivament. És a dir, les equipotencials per 0 són aquelles que $\cos n\theta = 0$ que equival a $n\theta = \pi/2 + k\pi$ i les línies de corrent les corbes donades per $n\theta = r\pi$.

- Equipotencials, $\varphi = 0$: $\theta = \pi/2n + k\pi/n$, $k = 0, \ldots, 2n-1$.
- Línies de corrent, $\psi = 0$: $\theta = r\pi/n$, $k = 0, \ldots, 2n-1$.

És clar que els angles entre línies de corrent i línies equipotencials consecutives és $\pi/2n$.

El cas general es pot fer amb arguments de continuïtat (no és simple).

En un punt no estacionari l'angle que formen les linies de flux i les equipotencials és $\pi/2$ (són ortogonals).

Exercici 8.4.2. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a*

a) $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ *on* $a, b \in \mathbb{C}$ *i* $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$..

b) $\Phi(z) = az + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on* $a, \Gamma > 0$.

c) $\Phi(z) = az + \dfrac{Q}{2\pi} \log(z)$ *on* $a, Q > 0$.

d) $\Phi(z) = \dfrac{p}{2\pi z} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i} \log(z)$ *on* $p, \Gamma > 0$. ◁

Solució:

a) Tenim pols a a i b on hi ha fonts-remolins. En efecte si $C = (\Gamma + iQ)/2\pi i$ llavors $\Phi' = C\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$ i si γ_a i γ_b són petits circuits al voltant de a, b respectivament

$$\oint_{\gamma_2} \Phi'(z)dz = \Gamma + iQ, \qquad \oint_{\gamma_2} \Phi'(z)dz = -\Gamma - iQ.$$

Tenim fonts-remolins (a, Γ, Q) i $(b, -\Gamma, -Q)$. Per exemple, si $\Gamma, Q > 0$ de a surt girant en sentit antihorari i a b arriba girant en sentit horari. Si $\Phi = \varphi + i\psi$ i $C = \alpha + i\beta$ llavors

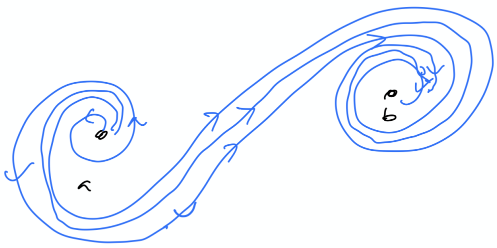
$$\varphi = \alpha \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| - \beta \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right), \qquad \psi = \alpha \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) + \beta \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right|.$$

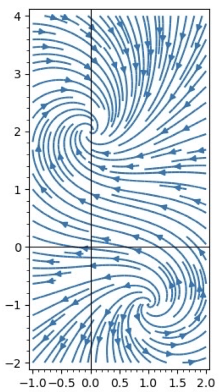
Si denotem $\dfrac{z-a}{z-b} = \rho e^{i\theta}$ les corbes de corrent $\psi = k$ venen donades per

$$\log \rho = \frac{Q}{\Gamma}\rho + k$$

que són espirals logarítmiques entre a i b. També tenim que

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma - iQ}{-2\pi i} \frac{\bar{a} - \bar{b}}{(\bar{z} - \bar{a})(\bar{z} - \bar{b})}, \qquad V = \frac{|\Gamma + iQ|}{2\pi} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|}.$$



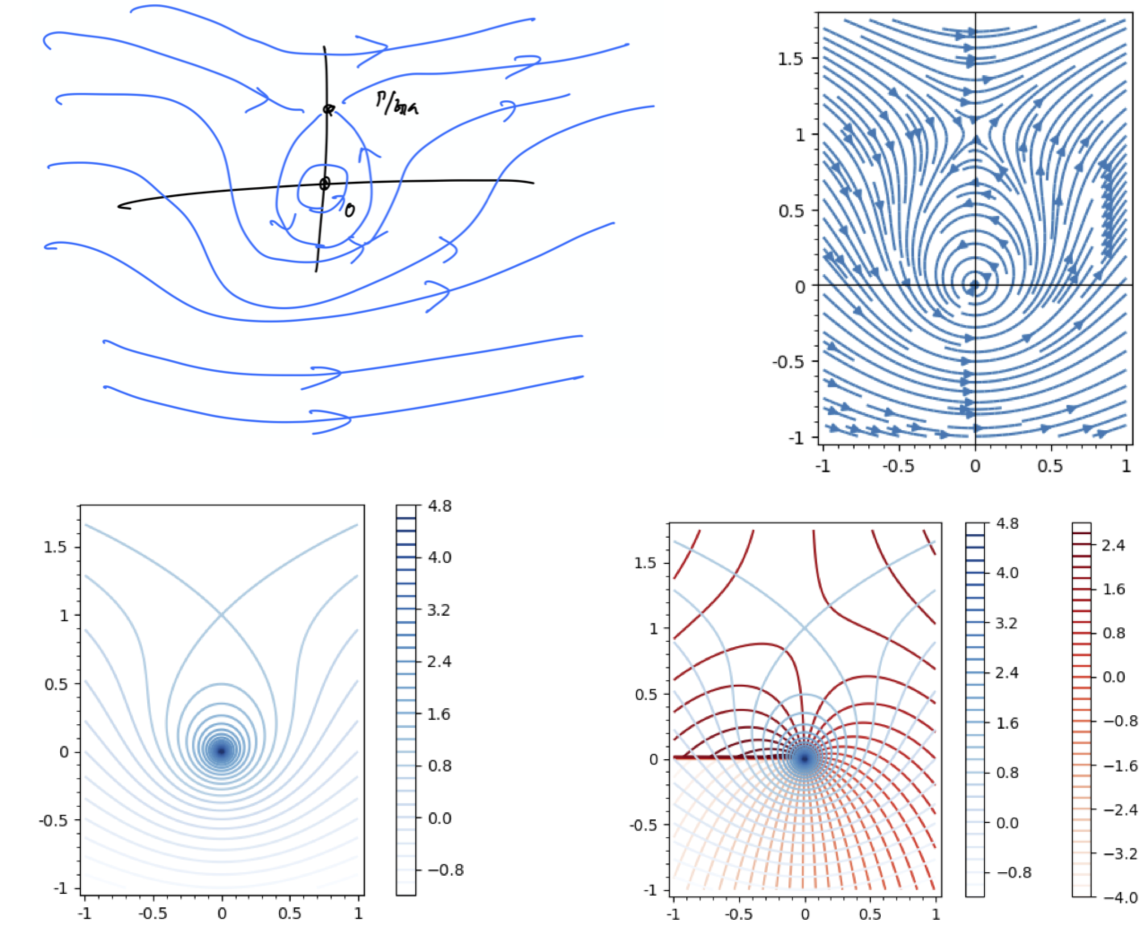


$\dfrac{3+2i}{2\pi i} \cdot \log\left(\dfrac{z-(1-i)}{z-i}\right)$

b) Aquí a $z = 0$ hi ha un remolí i quan $z \to \infty$ el flux potencial és com az, flux constant. De fet

$$\Phi'(z) = a + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}, \qquad \mathbf{V} = a + \frac{\Gamma}{2\pi r}e^{i(\theta+\pi/2)}, \qquad \mathbf{V}_\infty = a.$$

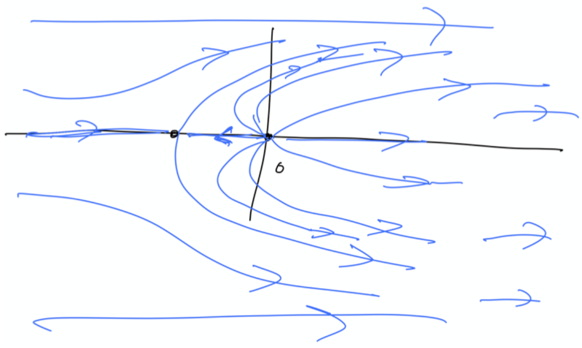
Veiem que a $z = \Gamma i/2\pi a$ tenim un punt estacionari (on la velocitat es fa zero). Amb això podem fer un esboç del flux, veure la figura següent.

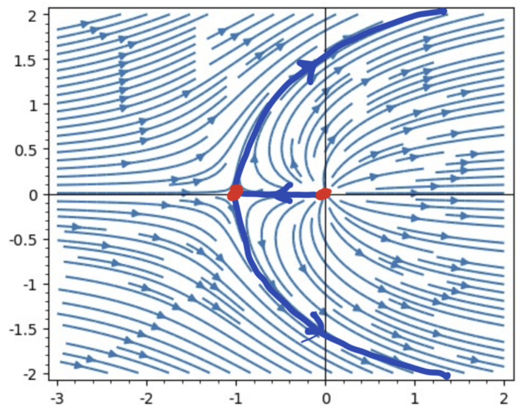


c) En aquest cas sumen un flux lineal (az) i una font/pica ($Q/2\pi \log(z)$). Tenim

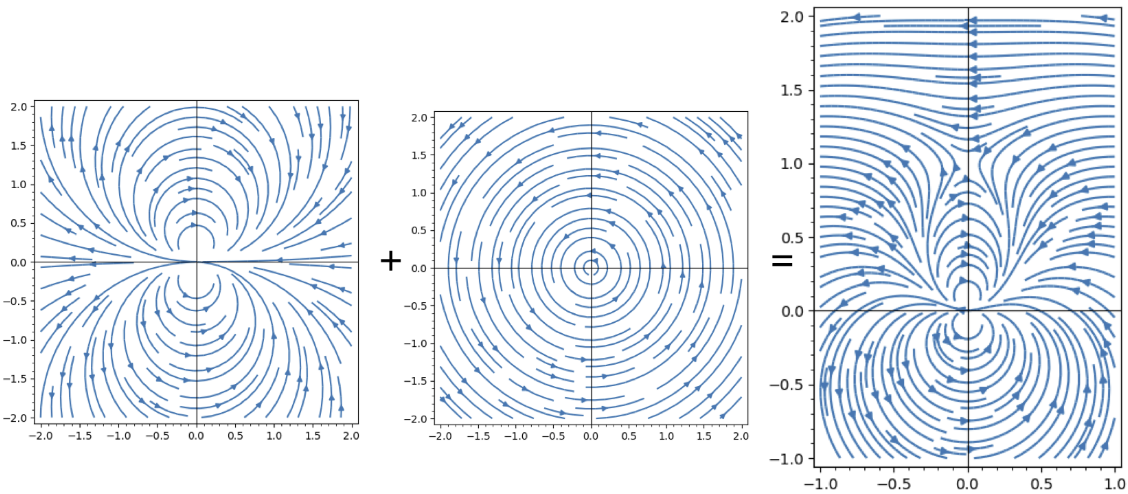
$$\Phi'(z) = a + \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{z}, \quad \mathbf{V} = a + \frac{Q}{2\pi r}e^{i\theta}, \quad \mathbf{V}_\infty = a.$$

Veure figura següent:

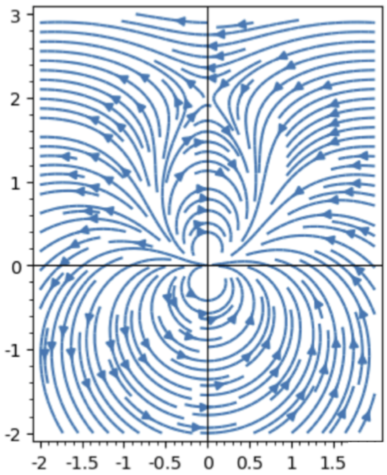


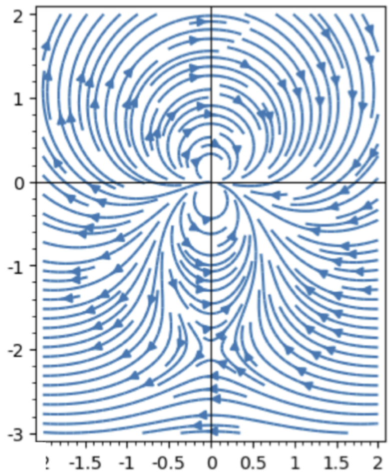


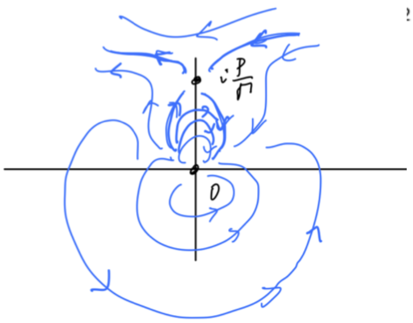
d) És la superposició d'un dipol i un remolí. Hi ha un pol a $z = 0$. Observem que $\Phi'(z) = -\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\dfrac{1}{z}$. Llavors $\Phi'(z) = 0$ per $z = ip/\Gamma$. Veure les figures següents:
Suma d'un doblet i un remolí. Punt estacionari a ip/Γ:



Suma d'un doblet i un remolí. Punt estacionari a ip/Γ. A dalt o a baix segons els signes







de p i Γ:

Exercici 8.4.3. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi R V_0$, $\Gamma > 4\pi R V_0$ *i* $\Gamma = 4\pi R V_0$. *Dibuixeu exemples de cadascun dels casos.* ◁

Solució: És la superposició d'un flux lineal a l'infinit que 'supera' la circumferència $|z| = R$ i un remolí al zero. És un flux molt interessant ja que cobreix tots els possibles fluxos que tenen a $|z| = R$ com a línia de flux i a l'infinit tenen potencial complex que s'acosta a $V_0 z$ (veure Markushevich II, p. 193). Tenim

$$\Phi(z) = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + i\left(V_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log r\right).$$

Llavors

$$\varphi(x,y) = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$
$$\psi(x,y) = V_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log r$$

i les línies de flux venen donades per $V_0\left(r-\frac{R^2}{r}\right)\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi}\log r=\beta$.

Quan $|z|=R$ resulta que $\psi=-\Gamma\log R/2\pi$ que és constant, llavors $|z|=R$ és una línia de corrent i el flux es pot pensar com un flux que circula al voltant de l'obstacle cilíndric donat per $|z|=R$. Ja em dit que a l'infinit és el flux amb velocitat constant V_0.

Els punts estacionaris o d'estancament es donen quan $\Phi'(z)=0$ i això passa quan $\Phi'(z)=V_0\left(1-\frac{R^2}{z^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}=0$. Com que $z\neq 0$ aixó passa quan

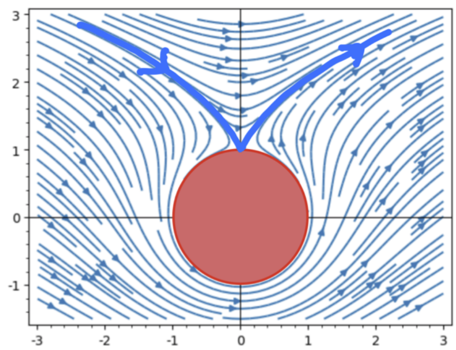
$$z=\frac{1}{4\pi V_0}\left(\pm\sqrt{16\pi^2V_0^2R^2-\Gamma^2}+i\Gamma\right).$$

Tenim tres casos interessants

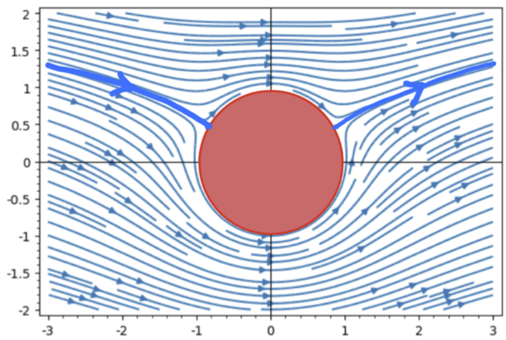
- $\Gamma=4\pi V_0R$. En aquest cas hi ha un únic punt estacionari a $z=i\Gamma/(4\pi V_0)=iR$ que està a la circumferència $|z|=R$.
- $\Gamma<4\pi V_0R$. Ara tenim com a punts estacionaris z_1,z_2 que són també a $|z|=R$, la seva part imaginària és $\Gamma/4\pi V_0$ i les parts reals són simètriques respecte de l'eix OY.
- $\Gamma>4\pi V_0R$. Ara tenim un punt estacionari dins de $|z|=R$ i un altre fora, són

$$z_1,z_2=\frac{1}{4\pi V_0}\left(\pm\sqrt{\Gamma^2-16\pi^2V_0^2R^2}+\Gamma\right)i.$$

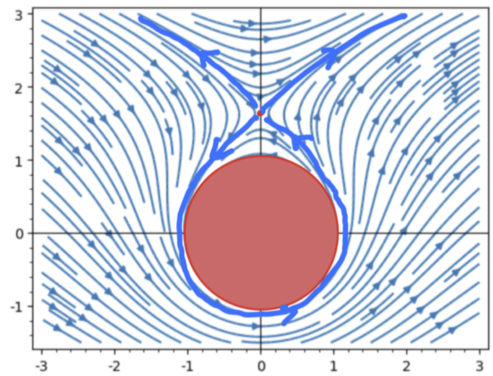
Podem veure els gràfics per cada cas a la figura següent:



$\Gamma = 4\pi V_0, \quad \Gamma > 0$



$\Gamma < 4\pi V_0, \quad \Gamma > 0$



$\Gamma > 4\pi V_0, \quad \Gamma > 0$

Exercici 8.4.4. *Donar un potencial complex que té fonts-remolins* $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \ldots, n\}$ *i velocitat* $\boldsymbol{V}_\infty = Ve^{i\alpha}$ *a l'infinit.* ◁

Solució: $\Phi(z) = Ve^{-i\alpha}z + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \log(z - a_k).$