

# Introducció a l'anàlisi complexa

Llistes de problemes, v26.1

Carme Cascante\*, Núria Fagella, Eduardo Gallego†  
Jordi Pau, Martí Prats

28 de gener de 2026

\*CC: [cascante@ub.edu](mailto:cascante@ub.edu), NF: [nfagella@ub.edu](mailto:nfagella@ub.edu), JP: [jordi.pau@ub.edu](mailto:jordi.pau@ub.edu):  
*Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia*

†EG: [Eduardo.Gallego@uab.cat](mailto:Eduardo.Gallego@uab.cat) MP: [marti.prats@uab.cat](mailto:marti.prats@uab.cat):  
*Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia*



# 1. El cos dels nombres complexos

## 1.1. El cos dels nombres complexos

1.1.1. Doneu en forma  $a + bi$ :

$$\begin{array}{lll} a) (-1 + i)^2, & c) \frac{-1+5i}{2+3i}, & e) \left( \frac{2+i}{6i-(1-2i)} \right)^2, \\ b) \frac{8i-1}{i}, & d) \frac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}, & f) ((3-i)^2 - 3)i. \end{array}$$

1.1.2. Demostreu o doneu un contraexemple:

$$a) \operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad b) \operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w), \quad c) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}. \quad \triangleleft$$

1.1.3. Sigui  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . Proveu que  $\operatorname{Im}(1/z) < 0$ .  $\triangleleft$

1.1.4. Si  $z = x + iy$  on  $x, y \in \mathbb{R}$ , trobeu les parts real i imaginària de:

$$\begin{array}{lll} a) z^2, & c) \frac{1}{z-3}, & e) \frac{z+1}{2z-5}, \\ b) z(z+1), & d) \frac{1}{z^2}, & f) z^3. \end{array} \quad \triangleleft$$

1.1.5. Sigui  $(x + iy)/(x - iy) = a + ib$ . Proveu que  $a^2 + b^2 = 1$ .  $\triangleleft$

1.1.6. Proveu que  $-1 + i$  satisfà  $z^2 + 2z + 2 = 0$ .  $\triangleleft$

1.1.7. Escriviu l'equació complexa  $z^3 + 5z^2 = z + 3i$  com dues equacions reals.  $\triangleleft$

1.1.8. a) Si  $z_1, z_2$  són complexos amb  $z_1 + z_2$  i  $z_1 z_2$  reals negatius proveu que  $z_1, z_2$  són reals.

b) Proveu que el vector  $z_1$  és paral·lel al vector  $z_2$  si i només si  $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .  $\triangleleft$

1.1.9. Proveu analíticament i gràfica que  $|z - 1| = |\bar{z} - 1|$ .  $\triangleleft$

1.1.10. Demostreu que  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$  si  $|a| = 1$  o bé  $|b| = 1$ . Quina excepció cal fer si  $|a| = |b| = 1$ ?

Demostreu també que  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$  si  $|a| < 1$  i  $|b| < 1$ .

Per acabar, si per  $a \in \mathbb{D}$  definim  $\varphi_a(z) := \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ , demostreu que  $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , i és bijectiva en  $\mathbb{D}$  i en  $\partial\mathbb{D}$ , i doneu-ne la inversa.  $\triangleleft$

## 1. El cos dels nombres complexos

### 1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial

**1.2.1.** *Describeu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

- a)  $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$ ,                      c)  $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ ,                      e)  $|z - 2| > |z - 3|$ ,  
b)  $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$ ,                      d)  $|z - 1| = |z + i|$ ,                      f)  $|z - 1| + |z + 1| = 7$ .                      ◁

**1.2.2.** *Suposem que  $a_n \rightarrow a$  i  $b_n \rightarrow b$ . Demostreu que  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  i  $a_n b_n \rightarrow ab$ , sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.*                      ◁

**1.2.3.** *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

- a)  $i^n + \frac{1}{n+i}$ ,                      b)  $\frac{n+i}{n-i}$ ,                      c)  $\frac{3in^2}{n^2-2i}$ .                      ◁

**1.2.4.** *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

- a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ ,                      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ .                      ◁

**1.2.5.** *Demostreu el teorema de Mertens.*                      ◁

**1.2.6.** *Tota successió convergent  $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$  satisfà que  $|z_{n+1} - z_n| \rightarrow 0$ .*                      ◁

### 1.3. Repàs de trigonometria

**1.3.1.** *Demostreu tots els resultats de la secció.*                      ◁

**1.3.2.** *Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de  $x \in \mathbb{R}$  com*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

*Demostra que se satisfan les següents identitats:*

- a)  $\sinh(0) = 0$                       i                       $\cosh(0) = 1$ .  
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$                       i                       $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$ .  
c)  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$                       i                       $\cosh(-x) = \cosh(x)$ .  
d)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .  
e)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$   
f)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ .  
g)  $(\sinh x)' = \cosh x$                       i                       $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ .                      ◁

## 1. El cos dels nombres complexos

### 1.4. L'exponencial complexa

**1.4.1.** Fent servir la fórmula de de Moivre, trobeu expressions de  $\sin 3\theta$  i  $\sin 4\theta$  en termes de  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ . ◁

**1.4.2.** Trobar les arrels de  $z^4 + 1 = 0$  i fer-les servir per veure que  $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$ . ◁

### 1.5. Representació polar d'un nombre complex

**1.5.1.** Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

a)  $3(1 + \sqrt{3}i)$ ,      b)  $2\sqrt{3} - 2i$ ,      c)  $-2 + 2i$ ,      d)  $-1 - i$ . ◁

**1.5.2.** Expresseu en forma cartesiana  $(a + ib)$  els següents nombres:

a)  $(2 + 3i)(4 + i)$ ,      c)  $\frac{1}{4+i}$ ,      e)  $(1 - 2i)^3$ ,      g)  $(1 + i)^{100} + (1 - i)^{100}$ ,  
b)  $(4 + 2i)^2$ ,      d)  $\frac{i}{2+i}$ ,      f)  $\frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}$ ,      h)  $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$ . ◁

**1.5.3.** Fent servir el producte de  $(1 + i)(5 - i)^4$  deduir la fórmula de Machin<sup>1</sup>:  $\pi/4 = 4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ . ◁

**1.5.4.** Estudiar la convergència de  $\{z_0^n\}$  si  $|z_0| < 1$  o si  $|z_0| > 1$ . ◁

**1.5.5.** Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:

a)  $z_n = \frac{i}{n}$ ,      c)  $z_n = \text{Arg}(-1 + i/n)$ ,      e)  $z_n = \left(\frac{1-i}{4}\right)^n$ ,  
b)  $z_n = i(-1)^n$ ,      d)  $z_n = \frac{n(2+i)}{n+1}$ ,      f)  $z_n = \exp\left(\frac{2n\pi i}{5}\right)$ .

Aquí hem escrit  $\exp(z) = e^z$ .

### 1.6. Equacions amb exponencials

**1.6.1.**

Resoleu les següents equacions:

---

<sup>1</sup>John Machin (1706), podeu trobar més informació a [https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula).

1. El cos dels nombres complexos

a)  $e^z = 1 + i$ ,                      b)  $e^{z^2} = i$ ,                      c)  $e^{iz} = -1$ .                      ◁

**1.7. Arrels  $n$ -èsimes**

1.7.1. Calculeu:

a)  $\sqrt[3]{-1}$ ,                      b)  $3^{1/4}$ ,                      c)  $\sqrt[4]{-i}$ ,                      d)  $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$ ,                      e)  $(3 + 4i)^{\frac{1}{2}}$ .                      ◁

1.7.2. Donat  $a \in \mathbb{C}$ , quin és el màxim de  $|z^n + a|$  per a  $|z| \leq 1$ ?                      ◁

**1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra**

1.8.1. Resoleu  $(z + 1)^5 = z^5$ .                      ◁

1.8.2. Sigui  $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$ . Considerant el polinomi  $(1 - z)P(z)$ , demostreu que tots els zeros de  $P(z)$  estan dins del disc unitat.                      ◁

## 2. Funcions de variable complexa

### 2.1. Funcions

**2.1.1.** *Escriure les següents funcions de la forma  $u(x, y) + iv(x, y)$ .*

a)  $f(z) = 1/z$ ,                      b)  $g(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$ ,                      c)  $h(z) = e^z + e^{-z}$ .                      ◁

**2.1.2.** *Trobeu el rang de*

a)  $f(z) = z^2$  si  $z$  està en el primer quadrant,  
b)  $g(z) = 1/z$  per  $0 < |z| \leq 1$ ,  
c)  $h(z) = -2z^3$  per  $z$  tal que  $0 < |z| < 1$  i  $\text{Arg}z < \pi/2$ .                      ◁

**2.1.3.** *Digueu on són contínues les següents funcions*

a)  $\frac{1}{z - 2 + 3i}$ ,                      c)  $\frac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$ ,  
b)  $\frac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$ ,                      d)  $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$ .                      ◁

**2.1.4.** *Proveu que la inversió  $w = f(z) = 1/z$  transforma*

a) el cercle  $|z| = r$  en el cercle  $|w| = 1/r$ ,  
b) el raig  $\text{Arg}z = \theta_0, -\pi < \theta_0 < \pi$ , en el raig  $\text{Arg}w = -\theta_0$ ,  
c) el cercle  $|z - 1| = 1$  a la línia vertical  $x = 1/2$ .                      ◁

**2.1.5.** *Trobeu una funció afí que transformi el cercle  $|z| < 1$  en el cercle  $|w - w_0| < R$  de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle  $\alpha$  amb l'eix real.*                      ◁

**2.1.6.** *Per l'exponencial  $f(z) = e^z$ :*

a) *Descriviu-ne el domini i el rang.*  
b) *Proveu que  $f(-z) = 1/f(z)$ .*

## 2. Funcions de variable complexa

c) Descriu la imatge de  $\operatorname{Re} z = 1$ .

d) Descriu la imatge de  $\operatorname{Im} z = \pi/4$ .

e) Descriu la imatge de la banda  $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi/4$ . ◁

**2.1.7.** La funció de Jukovski<sup>1</sup> és  $w = J(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , vegeu la figura 3.7. Proveu que

a)  $J(z) = J(1/z)$ ,

b)  $J$  porta el cercle unitat  $|z| = 1$  a l'interval real  $[-1, 1]$ ,

c)  $J$  porta el cercle  $|z| = r$  ( $r > 0, \neq 1$ ) a l'el·lipse  $\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \right]^2} = 1$  que té els focus a  $\pm 1$ . ◁

**2.1.8.** Fent servir la comanda `contour_plot` de Sage dibuixeu les corbes de nivell de  $u$  i  $v$  si  $f = u + iv$  és

a)  $z$ ,

d)  $\sin(z)$ ,

g)  $e^z$ ,

b)  $z^2$ ,

e)  $1/z$ ,

h)  $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$ ,

c)  $\log(z)$ ,

f)  $1/z^2$ ,

i)  $\log(z-1) + \log(z+1)$ . ◁

## 2.2. Funcions multivaluades

**2.2.1.** Donada l'equació de Cardano  $z^3 + pz + q = 0$ , comprova que si  $C = \left( -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$ , aleshores  $z_1 = C - \frac{p}{3C}$  és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.

Tot seguit obre GeoGebra<sup>2</sup> i dibuixa els punts  $p = 1+i$  i  $q = 2+0i$ ; defineix  $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $C$  mitjançant la fórmula anterior, i  $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ ,  $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$  i  $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$ . Escull tres colors diferents per  $z_j$ , i activa la seva traça. Deixant  $q$  fixat i movent  $p$ , per exemple, comprova que els tres punts són funció de  $p$ , i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que  $C$  presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres  $z_j$  vagin permutant la seva posició. Per exemple, pots fixar  $p$  en la circumferència de radi 4 amb la instrucció `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))` i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Pots usar també la instrucció `lloc geomètric`. Quantes voltes cal que faci  $p$  a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua? ◁

<sup>1</sup>Nikolai Jukovski, Orekhovo, 1847–1921, [https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai\\_Jukovski](https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Jukovski)

<sup>2</sup>o entra a <https://www.geogebra.org/m/jbszj89u>

### 2.3. Logaritmes i arguments

**2.3.1.** Doneu exemples que mostrin la falsedat de la igualtat  $\text{Log}(a \cdot b) = \text{Log } a + \text{Log } b$ . (Per exemple,  $a = b = -1 - i$ ). ◁

**2.3.2.** Sigui  $\mathcal{L}$  una determinació del logaritme en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  tal que  $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$ . Proveu que la funció  $f(z) = \mathcal{L}(z + 3)$  és contínua en

$$D := \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val  $f(3i)$ ? ◁

**2.3.3.** Una branca de l'argument  $\mathcal{A}(z)$  (o del logaritme  $\mathcal{L}(z)$ ) queda fixada si donem i) el domini  $\Omega$  on està definida ii) el valor de  $\mathcal{A}(z)$  (o de  $\mathcal{L}(z)$ ) d'un punt d' $\Omega$ . Considereu els dominis:

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi}, r \geq 0\}; \quad \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi/4}, r \geq 0\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy, y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i, x \in [-1, \infty)\}).$$

Completeu la següent taula.

|                                    | $\Omega_1$                               | $\Omega_2$                               | $\Omega_3$                                                      |
|------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{A}(1) = 0$               | $\mathcal{A}(i) =$<br>$\mathcal{L}(i) =$ | $\mathcal{A}(i) =$<br>$\mathcal{L}(i) =$ | $\mathcal{A}(i) =$<br>$\mathcal{L}(i) =$<br>$\mathcal{L}(2i) =$ |
| $\mathcal{A}(1) = -2\pi$           | $\mathcal{A}(i) =$<br>$\mathcal{L}(i) =$ | $\mathcal{A}(i) =$<br>$\mathcal{L}(i) =$ | $\mathcal{A}(i) =$<br>$\mathcal{L}(i) =$<br>$\mathcal{L}(2i) =$ |
| $\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$ | $\mathcal{A}(1) =$<br>$\mathcal{L}(1) =$ | $\mathcal{A}(1) =$<br>$\mathcal{L}(1) =$ | $\mathcal{A}(1) =$<br>$\mathcal{L}(1) =$<br>$\mathcal{L}(2i) =$ |

**2.3.4.** Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:

a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ ,      b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > \text{Im } z\}$ ,      c)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ . ◁

**2.3.5.** Calculeu els possibles valors de

a)  $\log(1)$ ,      b)  $\log(-1)$ ,      c)  $\log(1 + i)$ ,      d)  $\log(1 - i\sqrt{3})$ ,      e)  $\log(i)$ . ◁

**2.3.6.** Escrivim  $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$  i  $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ . Resoleu les equacions

## 2. Funcions de variable complexa

- a)  $e^z = 2i$ ,                      c)  $e^{2z} + e^z + 1 = 0$ ,                      e)  $\cos z = \sin z$ .  
b)  $\operatorname{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$ ,                      d)  $\cos z = 2i$ ,

### 2.4. Potències complexes

**2.4.1.** Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli:  $(-z)^2 = z^2$ , llavors  $2 \log(-z) = 2 \log z$ . Per tant,  $\log(-z) = \log(z)$ .  $\triangleleft$

**2.4.2.** Calculeu els possibles valors de

- a)  $i^i$ ,                      b)  $(\sqrt{3} + i)^{1-i}$ ,                      c)  $2^{-i}$ ,                      d)  $(i^2)^i$ ,                      e)  $(i^i)^2$ .  $\triangleleft$

**2.4.3.** Determinar explícitament la inversa de  $q(z) = 2e^z + e^{2z}$  en funció de logaritmes. Resoldre  $q(z) = 3$ , trobant totes les solucions.

**2.4.4.** Sigui  $h_0(z)$ ,  $h_1(z)$  i  $h_2(z)$  les determinacions de l'arrel cúbica en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  tal que  $h_0(1) = 1$ ,  $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$  i  $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$ .

- i) Descriu  $h_j(\Omega)$  per  $j = 0, 1, 2$ .  
ii) Per  $j = 0, 1, 2$  relacioneu  $h_j$  amb  $\operatorname{Log}$  i  $\operatorname{Arg}$  (on  $\operatorname{Log}$  i  $\operatorname{Arg}$  denoten les branques principals del logaritme i de l'argument respectivament).  
iii) Usant les relacions anterior, trobeu el valor de  $h_j(i)$ , per  $j = 0, 1, 2$ .  $\triangleleft$

### 2.5. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

**2.5.1.** Sigui  $X$  un espai topològic connex. Demostreu que si  $\mathcal{S}_1$  i  $\mathcal{S}_2$  són dues determinacions de l'arrel  $n$ -èsima de  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  llavors existeix una arrel  $n$ -èsima de la unitat  $\zeta$  tal que  $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$ , per a tot  $x \in X$ .  $\triangleleft$

**2.5.2.** Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions  $e^{z^2}$ ,  $e^{1/z}$ ,  $1/e^z$ ,  $1/(e^z - 1)$ , de la branca principal de  $\sqrt{1 - z}$  i de la branca principal de  $\sqrt{1 + e^z}$ .  $\triangleleft$

**2.5.3.** Donar una determinació de  $f(z)$  que sigui contínua a la regió  $D$  donada.

- a)  $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  
b)  $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$ ,  $D = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$ ,  
c)  $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ ,  
d)  $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ .  $\triangleleft$

## 2.6. Sèries de potències de nombres complexos

**2.6.1.** Considereu la sèrie de potències  $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$ . Digueu si són certes les següents afirmacions.

- a)  $S(z)$  pot ser divergent en  $z = 0$  i convergent en  $z = -i$  simultàniament
- b)  $S(z)$  pot ser convergent en  $z = 1 + i$  i en  $z = 2 + i$  simultàniament
- c) Si  $S(z)$  és convergent en  $z = 1 + i$ , aleshores també ho és en  $z = 2i$
- d) Si  $S(z)$  és divergent en  $z = 2i$ , aleshores també ho és en  $z = 2 + i$ . ◁

**2.6.2.** Sigui  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una sèrie convergent en el disc  $D = D_R(0)$ . Demostreu que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \text{si } 0 < r < R. \quad \triangleleft$$

**2.6.3.** Sigui  $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  i  $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ . Demostreu que  $S_1$  és convergent en  $z$  si i només si ho és  $S_2$ . En cas afirmatiu, tenim que  $S_1(z) = zS_2(z)$ .

## 2.7. Càlcul del radi de convergència

**2.7.1.** Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n$ ,
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{n^n}$ ,
- d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} (z-1)^n$ ,
- e)  $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} (z+1)^n$   $a \in (0, 1)$ ,
- f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}}$ ,
- g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} (z-2)^{n(n+1)}$ ,
- h)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n}$ ,
- i)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (3z-2)^n$ ,
- j)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^{2^n}$ . ◁

## 2.8. Comportament a la frontera del disc de convergència

**2.8.1.** Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:

## 2. Funcions de variable complexa

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} & c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1} & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}. \quad \triangleleft \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n & \end{array}$$

**2.8.2.** *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel. Indicació: Vegeu [BC13, Teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).*  $\triangleleft$

## 3. Derivació complexa i holomorfia

### 3.1. Funcions holomorfes

**3.1.1.** a) Demostreu la regla del producte per la derivació.

b) Proveu que si  $f$  és  $\mathbb{C}$ -derivable en  $z_0$  llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si  $f$  és  $\mathbb{C}$ -derivable en  $z_0$ , llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on  $\lambda(z) \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow z_0$ . ◁

**3.1.2.** Sigui  $f(z)$  i  $g(z)$  funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:

a)  $f(z)^3$ ,

c)  $f(z)/g(z)$ ,

e)  $f(1/z)$ ,

b)  $f(z)g(z)$ ,

d)  $5f(z) + ig(z)$ ,

f)  $f(g(z))$ .

**3.1.3.** Proveu que  $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$  és entera. Escriviu  $g$  com a funció de  $z$ .<sup>1</sup> ◁

**3.1.4.** Existeix alguna funció  $f$  holomorfa en el disc unitat  $\mathbb{D}$  tal que per a tot  $n = 2, 3, \dots$

a)  $f\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ?

c)  $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{\ln(n+1)}$  ?

b)  $f\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$  ?

d)  $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{n}{n+1}$  ? ◁

**3.1.5.** Doneu una branca de  $\log(z^2 + 2z + 3)$  que sigui holomorfa a  $z = -1$ . Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit? ◁

**3.1.6.** Sigui  $f$  una funció holomorfa en un obert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que satisfà  $|f(z) - i| < 1$  per a tot  $z \in \Omega$ . Demostreu que la funció  $g$  definida per

$$g(z) = \frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)}$$

té logaritme holomorf en  $\Omega$ . ◁

**3.1.7.** Sigui  $f(z) = z^3 + 1$  i  $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ ,  $z_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$ . Provar que no existeix cap punt  $w$  en el segment que uneix  $z_1$  i  $z_2$  de manera que  $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$ . Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes? ◁

---

<sup>1</sup>Si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  és holomorfa en un domini  $\Omega$  que talla la recta real i  $u, v$  són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que  $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$ , vegeu l'exercici 4.10.10.

### 3. Derivació complexa i holomorfia

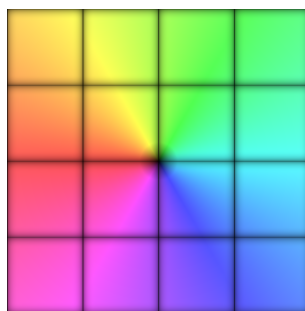
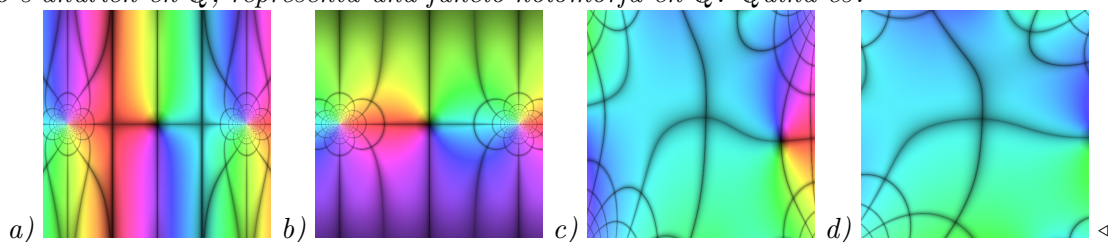


Figura 3.1.: Graella en el pla complex entre  $-2 - 2i$  i  $2 + 2i$ .

## 3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann

**3.2.1.** Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat  $Q = \{x + iy : x, y \in (-2, 2)\}$  és la primera imatge de la figura 3.2. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en  $Q$ , representa una funció holomorfa en  $Q$ . Quina és?



**3.2.2.** Trobar els valors de les constants  $a, b, c$  de manera que  $f$  sigui holomorfa i expressen-la en termes de  $z$ .

a)  $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b)  $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$ . ◁

**3.2.3.** Sigui  $f = u + iv$  holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Proveu que les funcions  $u$  i  $v$  són harmòniques (una funció  $f(x, y)$  és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i el seu laplacà  $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$ .) ◁

**3.2.4.** Considerem  $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$

a) Provar que  $u$  és harmònica.

b) Trobar una  $v$  de manera que  $f = u + iv$  sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de  $u$ ).

### 3. Derivació complexa i holomorfia

c) Trobar una expressió compacta de  $f(z)$ . ◁

**3.2.5.** Trobar els polinomis harmònics de la forma  $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ . Trobar la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent. ◁

**3.2.6.** Sigui  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domini (és a dir, un obert connex) i  $f$  una funció holomorfa en  $\Omega$ .

1. Proveu que si  $f$  només pren valors imaginaris purs, aleshores  $f$  és constant.
2. Proveu que si  $|f|$  és constant, aleshores  $f$  també és constant. Equivalentment si  $f$  només pren valors en una circumferència, llavors  $f$  és constant. ◁

**3.2.7.** Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma  $f(x + iy) = u(x) + iv(x, y)$ . ◁

**3.2.8.** (a) Determineu els nombres  $\lambda \in \mathbb{R}$  pels quals

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda xy^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera  $f_\lambda$  i calculeu  $f_\lambda$ .

(b) Sigui  $\lambda \in \mathbb{R}$  un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre  $g_\lambda$  i  $f_\lambda$ ? ◁

**3.2.9.** Decidiu on no són holomorfes les funcions següents

$$a) \frac{1}{z - 2 + 3i}, \quad b) \frac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}, \quad c) \frac{3z - 1}{z^2 + z + 4}, \quad d) \frac{z^2}{(2z^2 - 3z + 1)^2}. \quad \triangleleft$$

**3.2.10.** Provar que  $|z|^2$  és  $\mathbb{C}$ -derivable en  $z = 0$  però enlloc més. ◁

**3.2.11.** Sigui

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

a)  $f(z)$  satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt  $z \in \mathbb{C}$ .

b)  $f$  no és contínua al 0 i per tant  $f$  no és holomorfa a un entorn del 0. ◁

**3.2.12.** Si  $u$  i  $v$  s'expressen respecte a les coordenades polars  $(r, \theta)$ , proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Indicació: estudieu el límit incremental seguint  $\arg z = \theta_0$  i  $|z| = r_0$ . ◁

**3.2.13.** Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:

### 3. Derivació complexa i holomorfia

- a)  $w = z^2$ ;                      c)  $w = \frac{1}{z}$ ;                      d)  $w = e^z$ ;  
b)  $w = z^2 + 2z$ ;                      e)  $w = \log(z - 1)$ .                      ◁

### 3.3. Càlcul de les derivades

**3.3.1.** Sigui  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un obert i  $f$  una funció holomorfa en  $\Omega$ . Definim  $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$  i  $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$  donada per  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . Proveu que  $f^*$  és holomorfa en  $\Omega^*$ .                      ◁

**3.3.2.** Trobeu els punts on la funció  $f$  té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que  $f' = f_x$ .)

- a)  $f(z) = |z|^4$                       e)  $f(z) = |z|$   
b)  $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$                       f)  $f(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$   
c)  $f(z) = z + \frac{1}{z}$                       g)  $\cos |z|^2$   
d)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$                       h)  $f(z) = z + z\bar{z}$                       ◁

**3.3.3.** Donat un polinomi de dues variables reals  $P(x, y)$ , demostreu que identificant  $z = x + iy$  són equivalents:

1.  $P$  es pot expressar com un polinomi en  $z$ .
2.  $P$  és una funció entera.
3.  $\bar{\partial}P = 0$  en  $\mathbb{C}$ .                      ◁

### 3.4. Funcions analítiques

**3.4.1.** Discutir l'analiticitat de

- a)  $8\bar{z} + i$ ,                      e)  $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$ ,  
b)  $\frac{z}{\bar{z} + 2}$ ,                      f)  $\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ ,  
c)  $\frac{z^3 + 2z + i}{z - 1}$  (vegeu la figura 3.7),                      g)  $|z|^2 + 2z$ ,  
d)  $x^2 - y^2 + 2xyi$ ,                      h)  $\frac{|z|^2 + z}{2}$ .                      ◁

**3.4.2.** Trobeu la suma de les sèries

### 3. Derivació complexa i holomorfia

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \text{ si } |z| < 1. \quad \triangleleft$$

**3.4.3.** Sigui  $f(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$  per  $|z| < R$  on  $R$  és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si  $f(z_k) = 0$  per una successió  $(z_k)_k$  tal que  $z_k \neq 0$  i  $z_k \rightarrow 0$  quan  $k \rightarrow \infty$ , aleshores  $f(z) \equiv 0$  (i.e.  $c_n = 0$  per a tot  $n \geq 0$ ). Indicació: Calculeu  $f(0)$  i considereu la sèrie  $f(z)/z$ .  $\triangleleft$

**3.4.4.** Demostreu que si dues sèries  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  i  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió  $(z_k)_k$  tal que  $z_k \neq 0$  i  $z_k \rightarrow 0$  quan  $k \rightarrow \infty$  aleshores  $a_n = b_n$  per a tot  $n \geq 0$ .  $\triangleleft$

**3.4.5.** Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.8.1.

**3.4.6.** Considereu la sèrie

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot  $z$  del disc de convergència.

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n 9^n}. \quad \triangleleft$$

**3.4.7.** Considereu la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$ ?  $\triangleleft$

**3.4.8.** Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació  $S(z) = e$ .  $\triangleleft$

### 3.5. Algunes funcions holomorfes importants

**3.5.1.** *Demostreu que:*

(i)  $\sin z$  i  $\cos z$  són funcions enteres amb

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii)  $\cos(-z) = \cos z$ , i també  $\sin(-z) = -\sin z$  per a tot  $z \in \mathbb{C}$ .

(iii)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .

(iv) Per a tot  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ ,  $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ .  $\triangleleft$

**3.5.2.**

*Resoleu les següents equacions:*

a)  $\sin z = 4$

b)  $\cos z = i$ .  $\triangleleft$

**3.5.3.** a) *Proveu que  $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$  i que  $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ , per a tot  $z \in \mathbb{C}$ .*

b) *Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.*

c) *Deduïu de (b) que, per a  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , es verifica:*

i)  $\cos z_1 = \cos z_2$  si, i només si,  $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

ii)  $\sin z_1 = \sin z_2$  si, i només si,  $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$  o bé  $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ .

d) *Proveu que per a tot  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  se satisfà:*

i)  $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$  (vegeu l'exercici 1.3.2).

ii)  $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ .

iii)  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ .

iv)  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ .

e) *Sobre quines rectes està acotada la funció sinus? I la funció cosinus?*  $\triangleleft$

**3.5.4.** (a) *Proveu que per a cada  $w \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ , l'equació  $\tan z = w$  té infinites solucions, que són la funció multivaluada*

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left( \frac{i-w}{i+w} \right).$$

*Vegeu també que per a  $w = \pm i$  l'equació no té cap solució.*

### 3. Derivació complexa i holomorfia

(b) *Vegeu que dues determinacions contínues de  $\arctan w$  en un conjunt connex  $E \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$  difereixen de  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

(c) *Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de  $\arctan w$  als anells  $\{r < |w - i| < R\}$ ,  $\{r < |w + i| < R\}$ ,  $0 < r < R < 2$ , però que sí que n'hi ha si  $2 < r < R < +\infty$ .*

**3.5.5.** *Demostrea que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\operatorname{Arctan} w := \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left( \frac{i - w}{i + w} \right).$$

*és  $\mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$ .*

**3.5.6.** a) *Sigui  $\mathcal{L}$  la determinació del logaritme en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  que compleix que  $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$ . Definim  $f(z) := -\mathcal{L}(2 - 2z)$ . Demostreu que  $f$  és holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ . Calculeu  $f(0)$  i  $f(-i)$ .*

b) *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2z - 1)^n}{n}.$$

*Demostreu que  $S(z) = -\operatorname{Log}(2 - 2z)$ , per tot  $z \in D := D_{1/2}(1/2)$ , on  $\operatorname{Log}$  és la determinació principal del logaritme.*

c) *Quina relació hi ha entre  $S(z)$  i  $f(z)$ ? Indicació: Relacioneu primer  $\mathcal{L}(z)$  amb  $\operatorname{Log}(z)$  per  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .*

**3.5.7.** *Sigui  $\sqrt{\cdot}$  la determinació de l'arrel quadrada en  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  complint que  $\sqrt{-1} = i$  i sigui  $f(z) = \sqrt{3z + 2}$ .*

1. *Expresseu  $\sqrt{\cdot}$  en termes d'una determinació del logaritme i argument.*

*Recordem que*

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2} (\ln |z| + i \arg z)}.$$

2. *Quina és la regió més gran on  $f$  és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix  $z$  tal que  $f(z) = -i$ ?*

3. *Què val  $f(\frac{i-2}{3})$ ?*

**3.5.8.** *Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt  $a = 1$  de la funció  $f(z) = \sqrt[3]{z}$  on  $\sqrt[3]{\cdot}$  denota la determinació de l'arrel cúbica definida a  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  tal que  $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .*

### 3. Derivació complexa i holomorfia

**3.5.9.** Els polinomis de Legendre<sup>2</sup>  $P_j(\zeta)$  són els coeficients de  $z^j$  en el desenvolupament de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z+z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que  $P_j(\zeta)$  és un polinomi de grau  $j$  i calcular  $P_0, P_1, P_2$  i  $P_3$ .

◁

---

<sup>2</sup>Adrien-Marie Legendre, París, 1752 – 1833, [https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie\\_Legendre](https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre)

## 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

### 4.1. Corbes

**4.1.1.** Proveu que l'el·lipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització  $z(t)$ ,  $t \in I$  que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable,  $z'(t) \neq 0$  i  $z(t)$  és injectiva. Diem que  $z(t)$  és una parametrització admissible o regular).  $\triangleleft$

**4.1.2.** Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtexs  $-1 - i$ ,  $1 - i$ ,  $1 + i$ ,  $-1 + i$  seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud?  $\triangleleft$

### 4.2. Integració sobre corbes

**4.2.1.** Sigui  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^m}, \quad \int_{\gamma} \frac{|dz|}{z^m}, \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{|z^m|}, \quad \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z^m|}. \quad \triangleleft$$

**4.2.2.** Sigui  $\gamma = \partial D_r(0)$ . Calculeu, per a  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\int_{\gamma} z^n dz$ .  $\triangleleft$

**4.2.3.** Sigui  $\gamma = [i + 1, -i]$ . Avalueu les següents integrals de línia:

$$a) \int_{\gamma} \sin(2z) dz \quad b) \int_{|z|=1} z e^{z^2} dz \quad c) \int_{|z-2|=1} \frac{1}{z} dz \quad \triangleleft$$

**4.2.4.** Avaluu les següents integrals.

a)  $\int_{\gamma} \left( \frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2 \right) dz$  si  $\gamma$  és  $|z-i| = 4$  recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.

b)  $\int_{\gamma} (x - 2xyi) dz$  al llarg del contorn  $\gamma : z = t + it^2$  amb  $t \in [0, 1]$ .

c)  $\int_{\gamma} (|z-1+i|^2 - z) dz$  al llarg de la semicircumferència  $\gamma : z = 1 - i + e^{it}$  on  $t \in [0, \pi]$ .

d) La funció no analítica  $f(z) = x^2 + iy$  (per què?) al llarg de  $|z| = 1$  recorreguda un cop en sentit antihorari.  $\triangleleft$

#### 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

**4.2.5.** Calcular les següents integrals al llarg del camí  $\gamma$  que s'indica.

- a)  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de  $-3i$  a  $3i$ . Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre? Indicació: considerar la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si  $y = 0, x \leq 0$ .
- b)  $\int_{\gamma} e^z \cos z dz$  per un camí d'origen  $a = i$  i final  $b = \pi$ .
- c)  $\int_{\gamma} z^{1/2} dz$  per la branca principal de  $z^{1/2}$  per un camí d'origen  $a = i$  i final  $b = \pi$  que no talli la semirecta  $(-\infty, 0]$ .  $\triangleleft$

**4.2.6.**

Considerem la determinació de l'arrel  $\sqrt{z^2 - 1}$  que és holomorfa a  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  i positiva a  $(1, \infty)$ .

- (a) Vegeu que  $z + \sqrt{z^2 - 1}$  omet l'eix real negatiu si  $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ , de manera que la determinació principal  $\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$  està definida a  $\Omega$ .
- (b) Vegeu que  $\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$  és una primitiva de  $\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$  a  $\Omega$ .
- (c) Avalueu  $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$ , on  $\gamma$  és el tros de cercle  $|z - 1| = \sqrt{2}$  que va de  $i$  a  $-i$  passant pel semiplà de la dreta ( $\text{Re } z > 0$ ).

Indicació: comproveu que  $\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1))}$  s'estén a  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  de manera contínua.  $\triangleleft$

**4.2.7.** Siguin  $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \text{Im } z \geq 0\}$  i  $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \text{Re } z, \text{Im } z \geq 0\}$ . Demostreu que:

- a)  $\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 2} \right| \leq \pi$  c)  $\left| \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e$
- b)  $\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$  d)  $\left| \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right| \leq \pi e^2$ .  $\triangleleft$

**4.2.8.** (a) Sigui  $\gamma$  un camí en  $\mathbb{C}$ . Proveu que si  $f$  és una funció contínua en  $\gamma^*$  llavors

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})} dz.$$

(b) Deduïu que si  $f$  és una funció contínua en el cercle unitat llavors

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}. \quad \triangleleft$$

### 4.3. Teorema de Cauchy

**4.3.1.** Recordeu que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

(a) Proveu que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$  per a tot  $a > 0$ . Indicació: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle  $[-R, R] \times [0, a]$ .

(b) Proveu que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx) dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . ◁

**4.3.2.** Determineu el domini d'holomorfia de les funcions  $f$  donades i digueu perquè  $\int_{|z|=2} f(z) dz = 0$ .

a)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$ ,

b)  $f(z) = \text{Log}(z + 3)$ . ◁

**4.3.3.** Sigui  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funció harmònica en un disc  $D$ , és a dir, tal que  $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial u = 0$ . Demostra que existeix una funció  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  harmònica tal que  $(u + iv)$  és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada. Indicació: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per  $F = U + iV$  es poden escriure com  $\partial F = 2\partial U$  o com  $\bar{\partial} \bar{U} = -i\bar{\partial} V$ . ◁

**4.3.4.** El teorema de Green diu que si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  és un obert i  $U \subset \Omega$  és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera  $C^1$ ) i tal que  $\bar{U} \subset \Omega$ , aleshores tot camp vectorial  $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  amb  $F \in C^1(\Omega)$  satisfà que

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dm = \int_{\partial U} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). ◁

**4.3.5.** Continuant amb l'exercici 4.3.4, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, coneguda com a fórmula de Cauchy-Pompeiu<sup>1</sup>, que diu que si  $\phi \in C^1(\Omega)$  i  $z_0 \in U$ , aleshores

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm(z).$$

Notem que el cas particular  $\phi \in C_c^1(\Omega)$  ens diu  $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$ , on  $\mathcal{C}$  indica la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\psi(z)}{z - z_0} dm(z). \quad \triangleleft$$

### 4.4. Fórmula integral de Cauchy

**4.4.1.** Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:

<sup>1</sup>Dimitrie Pompeiu, Broscăuți, 1873–1954, [https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie\\_Pompeiu](https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie_Pompeiu)

#### 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

- a)  $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz;$       d)  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1};$       g)  $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz;$   
 b)  $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz;$       e)  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3};$       h)  $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz.$        $\triangleleft$   
 c)  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1};$       f)  $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz;$

**4.4.2.** Sigui  $p$  un polinomi de grau  $n$ , amb tots els seus zeros continguts en  $D_R(0)$ . Demostreu que

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n. \quad \triangleleft$$

**4.4.3.** Sigui  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ . Calculeu la integral de línia  $\int_{|z|=1} \left( \frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$ , i dedueu que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) dt}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leq r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

**4.4.4.** Siguin  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ , on  $\Omega$  és un domini tal que  $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$ . Donat  $a \in \mathbb{C}$  amb  $|a| \neq 1$ , calculeu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left( \frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw. \quad \triangleleft$$

**4.4.5.** Es consideren els següent exercicis relacionats amb la Fórmula Integral de Cauchy.<sup>2</sup>

- a) Calculeu  $\oint_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$  sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.  
 b) És cert que  $\oint_C \frac{e^z}{z} dz = 0$  si  $C$  és tancada i simple?

#### 4.5. Sèries de potències

**4.5.1.** Desenvolpeu en sèrie de potències al voltant del punt  $a$  i doneu el radi de convergència de:

- a)  $1/z$ ,  $a = 1$ ,      c)  $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ,  $a = 0$ ,      e)  $\frac{e^z}{1-z}$ ,  $a = 0$ ,  
 b)  $z^2 e^z$ ,  $a = 0$ ,      d)  $\frac{1}{(1-z)^3}$ ,  $a = 0$ ,      f)  $\frac{1}{1+e^z}$ ,  $a = 0$ .

---

<sup>2</sup>De vegades es fa servir la notació  $\oint$  per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

#### 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes).

◁

**4.5.2.** Sigui  $\alpha \in \mathbb{C}$ , provar que si  $(1+z)^\alpha$  es pensa com  $e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$  llavors per  $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$$

(generalització del binomi de Newton).

**4.5.3.** Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt  $a$  de les següents funcions:

a)  $f(z) = \cos^2 z$ ,  $a = 0$ .

c)  $\sqrt[3]{z}$ ,  $a = 1$ .

b)  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$ ,  $a = 1$ .

Aquí  $\sqrt[3]{\cdot}$  és la determinació de l'arrel cúbica en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  que val  $(-1 + i\sqrt{3})/2$  en  $z = 1$ .

◁

**4.5.4.** Considereu la funció  $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$  i el punt  $a = -1$ .

1. “Sense fer cap càlcul”, raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de  $f$  al voltant del punt  $a$ .

2. Calculeu la sèrie de potències de  $f$  al voltant de  $a$ .

◁

**4.5.5.** a) Es pot desenvolupar  $\sqrt{z}$  en sèrie de potències en un entorn de l'origen?

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar  $\cos(1/(z-1))$  en sèrie de potències?

c) I la funció  $\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z}$ ?

**4.5.6.** Determinar com a mínim els coeficients  $a_1, a_2, a_3, a_4$  de la sèrie de Taylor de  $1/(1+z+z^4)$  centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim  $2/3$ .

**4.5.7.** Vegem com el teorema 4.22 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real  $f$  és analítica en un interval obert  $I \subset \mathbb{R}$  si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostra que si  $f$  és analítica en  $I$  aleshores hi és derivable. Troba una funció infinites vegades derivable en  $\mathbb{R}$  que no hi sigui analítica. Troba una funció  $f$  analítica en  $\mathbb{R}$  que tingui radi de convergència 1.

## 4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

4.6.1. Donat  $r > 0$  i  $a \in \mathbb{C}$  calculeu

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.2. Sigui  $0 \leq m \leq n$  enters. Calculeu

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.3. Intenteu calcular  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$  fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades (potser cal recordar la desigualtat  $|\int_{\Gamma} f(z) dz| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz|$ .)

a) Considereu la semicircumferència  $C$  en el semiplà superior centrada a 0 amb radi  $R$  i tancada pel segment de l'eix  $OX$ . Calculeu  $\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$ .

b) Descomponeu  $C = C_1 \cup C_2$  on  $C_1$  és el segment de  $-R$  a  $R$  i  $C_2$  la part restant de  $C$ . Fent servir la desigualtat triangular per integrals donar una fita superior de  $\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|$ .

c) Fent servir els apartats anteriors calcular  $\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$ . Que passa si  $R$  tendeix a infinit?  $\triangleleft$

4.6.4. Sigui  $\alpha > 0$  i  $f \in H(\mathbb{D})$  complint que existeix  $c > 0$  i per a tot  $|z| < 1$ ,  $(1 - |z|)^{\alpha} |f(z)| \leq c$ . Demostreu que per a tot  $n \geq 0$ ,  $|f^{(n)}(0)| \leq cn! \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha} (n + \alpha)^{\alpha}$ .  $\triangleleft$

4.6.5. Sigui  $f$  una funció entera de manera que existeixen constants  $C, M > 0$  tals que  $|f(z)|e^{-C|z|} \leq M$  per a tot  $z \in \mathbb{C}$ . Demostreu que  $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq CMe$  per a tot  $z \in \mathbb{C}$ .

Indicació: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a  $z$  i de radi  $r$  per provar que  $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq \frac{M}{r} e^{Cr}$  per a tot  $r > 0$  i  $z \in \mathbb{C}$ . Avalueu a  $r = 1/C$ .  $\triangleleft$

4.6.6. (a) Supposem que una funció  $f$  entera satisfà que  $|f(z)| \leq M$  si  $|z| = R$ . Demostreu que els coeficients  $c_k$  de la seva sèrie de Taylor centrada a  $a = 0$  compleixen

$$|c_k| \leq \frac{M}{R^k}.$$

(b) Supposem que el mòdul d'un polinomi  $P(z)$  està acotat per 1 pels  $z$  al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de  $P$  tenen mòdul acotat per 1.  $\triangleleft$

4.6.7. Proveu que si  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  tal que  $|f(z)| \leq |e^{iz}|$  per a tot  $z \in \mathbb{D}$ , aleshores, per a tot  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! e. \quad \triangleleft$$

## 4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

**4.7.1.** Supposem que  $f$  és entera. Provar que si  $f^{(4)}(z)$  és fitada en el pla llavors  $f$  és un polinomi de grau 4 com a màxim. ◁

**4.7.2.** La funció  $f(z) = 1/z^2$  tendeix a 0 quan  $z \rightarrow \infty$  però no és una funció constant. Contradiu això el Teorema de Liouville? ◁

**4.7.3.** Sigui  $f$  una funció entera. Per a  $|a| < R$  i  $|b| < R$  calculeu

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. ◁

**4.7.4.** Caracteritzeu les funcions enteres  $f$  tals que  $|f'(z)| \leq |z|$  per a tot  $z \in \mathbb{C}$ . ◁

**4.7.5.** Sigui  $f$  una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que

(a) Si  $|f| \geq 1$ , llavors  $f$  és constant.

(b) Si  $\operatorname{Re} f \geq 0$ , llavors  $f$  és constant.

(c) Si  $\operatorname{Im} f \leq 1$ , llavors  $f$  és constant. ◁

(d) Si  $\operatorname{Re} f$  no té zeros, llavors  $f$  és constant.

**4.7.6.** Sigui  $f$  una funció entera tal que  $|f(z)| \leq Ce^{\operatorname{Re} z}$ , per a tot  $z \in \mathbb{C}$ , on  $C > 0$  és una constant. Què es pot dir de  $f$ ? ◁

**4.7.7.** Sigui  $f$  una funció entera tal que  $|f'(z)| < |f(z)|$  per a tot  $z \in \mathbb{C}$ . Què podem dir de  $f$ ? ◁

## 4.8. Teorema de Morera

**4.8.1.** Demostreu la continuïtat de  $f$  en el principi de reflexió de Schwarz. ◁

**4.8.2.** Sigui  $f(z) = 1/z^2$ . Comproveu que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  per a tot camí tancat  $\gamma$  que no passi per 0, però  $f$  no és analítica en 0. Contradiu això el corollari 4.34 del teorema de Morera? ◁

#### 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

**4.8.3.** (a) Sigui  $h$  una funció contínua a  $\mathbb{R}$  amb suport compacte (és a dir, existeix  $K \subset \mathbb{R}$  compacte tal que  $h(x) = 0$  si  $x \notin K$ ) i sigui

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz} dt$$

(quan ens restringim a  $z \in \mathbb{R}$ ,  $H$  s'anomena transformada de Fourier de  $h$ ; si prenem  $iz$  en el lloc de  $z$ ,  $H$  s'anomena transformada de Laplace<sup>3</sup> bilateral de  $h$ ). Proveu que  $H$  és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen  $A, C > 0$  tals que  $|H(z)| \leq Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$ .

(b) Sigui  $h$  una funció contínua a  $[0, 1]$ . Demostreu que la seva transformada de Hilbert<sup>4</sup>

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

és analítica per a  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ . ◁

**4.8.4.** Sigui  $f$  holomorfa en un obert  $\Omega$ , i sigui  $z_0 \in \Omega$  amb  $f'(z_0) \neq 0$ . Demostreu que hi ha  $r_0 > 0$  de manera que, per  $0 < \varepsilon < r_0$ , es compleix la identitat

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació: proveu primer que la funció  $G$  definida per

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en  $\Omega$ . ◁

### 4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

**4.9.1.** Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz. \quad b) \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z-2)^4} dz. \quad c) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} d\theta. \quad \triangleleft$$

<sup>3</sup>Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749–1827, [https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon\\_Laplace](https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace)

<sup>4</sup>David Hilbert, Königsberg, 1862–1943, [https://ca.wikipedia.org/wiki/David\\_Hilbert](https://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert)

## 4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

**4.10.1.** Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:

$$a) \quad \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \qquad b) \quad z^2 \sin z \qquad c) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5} . \quad \triangleleft$$

**4.10.2.** Trobeu la multiplicitat de  $z = 0$  com a zero de la funció entera  $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$ .  $\triangleleft$

**4.10.3.** Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:

$$a) \quad f(z) = z^2(e^{z^2} - 1). \qquad c) \quad f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3.$$

$$b) \quad f(z) = (z^2 - \pi^2) \sin z / z.$$

Aquí  $\sqrt{\cdot}$  és la determinació de l'arrel quadrada en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  que val  $-1$  en  $z = 1$ .  $\triangleleft$

**4.10.4.** Sigui  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes  $H(\Omega)$  a una regió  $\Omega$  és un domini d'integritat, és a dir, si  $f, g \in H(\Omega)$  amb  $fg \equiv 0$  aleshores  $f \equiv 0$  o  $g \equiv 0$ .  $\triangleleft$

**4.10.5.** Sigui  $\{a_n\}_n$  una successió estrictament decreixent de nombres reals  $a_n \in (0, 1)$  i tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Sigui  $f$  una funció holomorfa en  $\mathbb{D}$ . Demostreu que:

$$(a) \quad \text{Si } f(a_n) \in \mathbb{R} \text{ per a tot } n, \text{ aleshores } f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \text{ per a tot } z \in \mathbb{D}.$$

$$(b) \quad \text{Si a més } f(a_{2n}) = f(a_{2n+1}) \text{ per a tot } n, \text{ aleshores } f \text{ és constant.} \quad \triangleleft$$

**4.10.6.** Trobeu totes les funcions holomorfes a  $\mathbb{D}$  tals que:

$$(a) \quad |f(1/n)| \leq 1/2^n, \text{ per a tot nombre natural } n \geq 2.$$

$$(b) \quad f(1/n) = \ln(1 + n^3) - 3 \ln n \text{ per a } n > 1. \quad \triangleleft$$

**4.10.7.** Trobeu totes les funcions  $f$  holomorfes en el disc  $D_2(0)$  tals que  $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$  per a tot  $\theta \in [0, 2\pi)$ , i a més  $f(0) = 0$ .  $\triangleleft$

**4.10.8.** Sigui  $f \in H(\Omega)$  en un domini  $\Omega \subset \mathbb{C}$  tal que  $f \circ f = f$ . Demostreu que o bé  $f$  és constant, o bé és la identitat.  $\triangleleft$

#### 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

**4.10.9.** (a) Sigui  $f$  una funció entera tal que existeixen constants  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C > 0$  i  $R > 0$  tals que  $|f(z)| \leq C|z|^n$ , per a  $|z| \geq R$ . Demostreu que  $f$  és un polinomi de grau més petit o igual que  $n$ .

(b) Deduïu que si  $f$  és una funció entera amb  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ , llavors  $f$  és un polinomi.

Indicació: Demostreu que  $f$  només té un nombre finit de zeros  $a_1, \dots, a_n$  (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció  $F = P/f$ , on  $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ .  $\triangleleft$

**4.10.10.** Sigui  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domini (obert connex) tal que  $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Supposem que tenim  $f, g, h \in H(\Omega)$  i  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tals que per  $x + iy \in \Omega$  tenim

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

i per  $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$  tenim

$$u(x, 0) = g(x) \quad v(x, 0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega. \quad \triangleleft$$

### 4.11. El principi del mòdul màxim

**4.11.1.** Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone<sup>5</sup>-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.53.

**4.11.2.** Trobeu el màxim de:

a)  $|\cos z|$  i  $|\sin z|$  a  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

b)  $|e^z|$  i  $|e^{z^2}|$  a  $|z| \leq 1$ .  $\triangleleft$

**4.11.3.** Trobeu totes les funcions holomorfes en  $\mathbb{D}$  tals que  $f(1/2) = 3$  i  $|f(z)| \leq 3$  si  $|z| < 1$ .  $\triangleleft$

**4.11.4.** Es considera  $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$  i el disc  $D$  de radi 2 centrat a 5. Provar que  $f(z)$  assoleix el valor màxim i mínim del mòdul a  $|z - 5| = 2$ . Indicació: considerar  $1/f(z)$ .  $\triangleleft$

**4.11.5.** Sigui  $f$  una funció holomorfa en el disc  $D_R(0)$ ,  $R > 0$ . Definim

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R.$$

Demostreu que si  $f$  no és constant, aleshores  $M(r)$  és estrictament creixent a  $[0, R)$ .  $\triangleleft$

<sup>5</sup>Marshall Harvey Stone, New York City, 1903–1989, [https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall\\_H.\\_Stone](https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_H._Stone)

#### 4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

**4.11.6.** *Sigui  $f$  una funció holomorfa en un obert connex  $\Omega$  i  $D$  un disc obert tal que  $\overline{D} \subset \Omega$ . Supposeu que  $|f(z)| = c$  per tot  $z \in \partial D$ , on  $c$  és una constant. Proveu que  $f$  té almenys un zero en  $D$  o bé  $f$  és constant en  $\Omega$ . Indicació: Distingiu segons si  $c = 0$  o  $c > 0$ . En el segon cas, proveu que si  $f$  no té zeros en  $D$ , aleshores  $f$  és constant en  $D$ .*

◁

**4.11.7.** *Sigui  $f$  una funció holomorfa i no constant en  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , un obert connex. Supposeu que existeix  $a \in \Omega$  tal que  $|f(a)| \leq |f(z)|$  per a tot  $z \in \Omega$ . Proveu que aleshores  $f(a) = 0$ .*

◁

**4.11.8.** *Sigui  $f \in H(\mathbb{C})$  no constant. Demostreu que, per a tot  $c > 0$ ,*

$$\overline{\{z; |f(z)| < c\}} = \{z; |f(z)| \leq c\}.$$

◁

#### *4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy*

## 5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

### 5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

**5.1.1.** Considerem el camí  $\gamma(t) = 4e^{it} \cos \frac{2}{3}t$ , ( $0 \leq t \leq 6\pi$ ). Calculeu  $\text{Ind}(\gamma, 3)$  i  $\text{Ind}(\gamma, 1)$ . ◁

**5.1.2.** Considerem el camí  $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$ , ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu

$$\int_{\gamma} \frac{3z - 3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} dz. \quad \triangleleft$$

### 5.2. El teorema global de Cauchy

**5.2.1.** Considerem el camí  $\gamma(t) = (2 \sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2 \sin(3t))$ , amb  $t \in [0, 2\pi]$ . Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ , i trobeu el valor de

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2 + 1} dz. \quad \triangleleft$$

### 5.3. Homotopia i teorema de Cauchy

### 5.4. Dominis simplement connexos

**5.4.1.** Siguin  $f, g \in H(\mathbb{C})$  tals que  $f^2 + g^2 \equiv 1$ . Demostra que existeix  $h \in H(\mathbb{C})$  tal que  $f = \cos(h)$  i  $g = \sin(h)$ . ◁

**5.4.2.** Demostra que si  $\mathbb{C}_{\infty} \setminus \Omega$  és connex i  $\Omega$  és un obert connex, aleshores tota corba tancada  $\gamma$  és homòtopa a 0. ◁

**5.4.3.** [Determinació de l'arrel en dominis simplement connexos] Sigui  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un obert simplement connex, i  $f \in H(\Omega)$  amb  $f(z) \neq 0$  per a tot  $z \in \Omega$ . Llavors existeix  $g \in H(\Omega)$  amb

$$g(z)^2 = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si  $z_0 \in \Omega$  i tenim que  $w_0^2 = f(z_0)$ , podem escollir  $g$  de manera que  $g(z_0) = w_0$ .

## 5.5. Funcions harmòniques

**5.5.1.** *Sigui  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funció harmònica en un domini simplement connex  $\Omega$ . Demostra que existeix una funció  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  harmònica conjugada d' $u$  (vegeu l'exercici 4.3.3).*  $\triangleleft$

**5.5.2.** *Demuestra el lema 5.35 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament.*  $\triangleleft$

**5.5.3.** *Sigui  $\Omega$  un domini simplement connex, i sigui  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre  $\mathbb{D}$  i  $\Omega$  amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6, les derivades de les quals estenen contínuament a  $\partial\mathbb{D}$  i a  $\partial\Omega$  respectivament. Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que*

$$\mathcal{L}(\varphi'(z_0)) = \operatorname{Re} \mathcal{L}(\varphi')(0) + \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}(\varphi'(z)) H(z, z_0) |dz|. \quad \triangleleft$$

**5.5.4.** *El problema de Dirichlet consisteix en trobar una funció harmònica en un domini obert  $\Omega$  que sigui contínua fins la seva frontera  $\partial\Omega$  i amb un valor prefixat a  $\partial\Omega$ . Suposem que  $\phi_1$  i  $\phi_2$  són harmòniques a  $\Omega$  i contínues fins a  $\partial\Omega$  i que  $\phi_1 = \phi_2$  a la vora  $\partial\Omega$ . Provar que si  $\Omega$  és simplement connex, aleshores  $\phi_1 = \phi_2$  en tot punt d' $\Omega$ . Indicació: trobar la funció  $v$  harmònica conjugada de  $\phi_1 - \phi_2$  i aplicar el principi del màxim (mínim) a  $\phi_1 - \phi_2 + iv$ .*  $\triangleleft$

**5.5.5.** *Una distribució estacionària  $T$  de la temperatura en una regió  $\Omega$  és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura  $T$  a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem que la temperatura val  $\operatorname{Im} z$  als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular veieu que la temperatura al centre del disc és  $1/\pi$ .*  $\triangleleft$

## 6. Sèries de Laurent

### 6.1. Sèries de Laurent i singularitats

**6.1.1.** *Calcular la sèrie de Laurent de*

a)  $\frac{z-1}{z(z-4)^3}$  a  $0 < |z-4| < 4$ .

b)  $1/e^{(1-z)}$  per  $|z| > 1$ . ◁

**6.1.2.** *Per a la funció  $f(z) = \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}$*

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a  $z = 0$ .*

2. *Calcular  $\oint f(z)dz$  si es recorre  $|z| = 1$  un cop i en sentit antihorari.* ◁

**6.1.3.** *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  a les corones:*

(a)  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ , (b)  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ , (c)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  i (d)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$ . ◁

**6.1.4.** *Si  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ , donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a 0 allà on  $f$  és analítica ( $|z| < 1$ ,  $1 < |z| < 3$  i  $|z| > 3$ ).* ◁

**6.1.5.** *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent de*

a)  $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right)$  per  $|z| > 0$ .

b)  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  per  $0 < |z| < R$ . ◁

**6.1.6.** *Quina és la corona (o anell) de convergència de  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ ?* ◁

## 6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

### 6.2.1. Construcció de funcions

1. Trobar una funció  $f$  que tingui un pol d'ordre 2 a  $z = 1 + i$  i singularitats essencials a  $z = 0, 1$ .
2. Trobar una funció  $f$  que tingui una singularitat evitable a  $z = 0$ , un pol d'ordre 6 a  $z = 1$  i una singularitat essencial a  $z = i$ .  $\triangleleft$

**6.2.2.** Sigui  $f$  analítica amb zero d'ordre  $n$  a  $z_0$  i  $g$  analítica amb zero d'ordre  $m$  a  $z_0$ . Si  $h(z) = f(z)/g(z)$  proveu que

- a) Si  $n > m$   $h(z)$  té un zero d'ordre  $n - m$  a  $z_0$ ,
- b) si  $n < m$   $h(z)$  té un pol d'ordre  $m - n$  a  $z_0$ ,
- c) si  $n = m$   $h(z)$  és holomorfa i no nul·la a  $z_0$ .  $\triangleleft$

**6.2.3.** Determineu les singularitats de les funcions següents. Si  $a$  és una singularitat evitable de  $f$ , calculeu el valor que cal donar a  $f(a)$  per a què  $f$  sigui holomorfa en un entorn d' $a$ , i si  $a$  és un pol de  $f$ , determineu la part singular de  $f$  en  $a$  (la part de la sèrie amb índexs negatius).

- a)  $f(z) = z \cos(1/z)$ . c)  $f(z) = \frac{1}{(1 - e^z)^2}$ .  $\triangleleft$
- b)  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z - 1)^2}$ .

**6.2.4.** Sigui  $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$ . Suposem que existeix una successió  $(z_n)_n$  tal que  $z_n \rightarrow a$  i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció  $f$  en el punt  $a$ .  $\triangleleft$

**6.2.5.** a) La funció  $\tan(1/z)$  té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?

- b) Sigui 0 singularitat aïllada de  $f(z)$ . Suposem que  $|f(z)| \leq |z|^{-\alpha}$  on  $0 < \alpha < 1$ . Demostreu que 0 és una singularitat evitable.  $\triangleleft$

### 6.3. Teorema dels Residus

**6.3.1.** Existeix alguna funció  $f$  amb pol simple a  $z_0$  tal que  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ ? Què passa si el pol és d'ordre 2, pot passar que  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ ?  $\triangleleft$

**6.3.2.** Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:

a)  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ ,  $z_0 = 0$ .

b)  $f(z) = \frac{1 + e^z}{z^4}$ ,  $z_0 = 0$ .  $\triangleleft$

**6.3.3.** Calculeu  $\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z-a} dz$  pels diferents valors d' $a \in \mathbb{C}$  tals que  $|a| \neq 1$ .  $\triangleleft$

**6.3.4.** Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions.

1. Si  $f, g$  tenen un pol a  $z_0$  llavors  $f + g$  té un pol a  $z_0$ .
2. Si  $f, g$  tenen un pol a  $z_0$  i en els dos casos el residu és no nul llavors  $f \cdot g$  té un pol a  $z_0$  amb residu no nul.
3. Si  $f$  té una singularitat essencial a  $z = 0$  i  $g$  un pol d'ordre finit a  $z = 0$  llavors  $f + g$  té singularitat essencial a  $z = 0$ .
4. Si  $f$  té un pol d'ordre  $m$  a  $z = 0$  llavors  $f(z^2)$  té un pol d'ordre  $2m$ .  $\triangleleft$

**6.3.5.** Supposem que  $f$  és holomorfa amb un zero d'ordre  $m$  a  $z_0$ . Proveu que  $g(z) = f'(z)/f(z)$  té un pol simple a  $z_0$  amb  $\text{Res}(g, z_0) = m$ .  $\triangleleft$

**6.3.6.** a) Proveu que si  $g(z)$  té un zero simple a  $z_0$ , llavors  $1/g(z)$  té un pol simple a  $z_0$ .

b) Proveu que  $\text{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$ .

c) Sigui  $f(z) = 1/\sin(z)$ , trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus.  $\triangleleft$

**6.3.7.** Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.

a)  $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}$ .

b)  $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ .

c)  $h(z) = \cos(1 - 1/z)$ .  $\triangleleft$

**6.3.8.** Avalueu  $\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)} dz$  al llarg de la corba  $|z-3| = 3$  recorreguda en sentit antihorari.  $\triangleleft$

**6.3.9.** Avalueu les següents integrals

## 6. Sèries de Laurent

a)  $\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz$  c)  $\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz.$  ◁

b)  $\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz$

**6.3.10.** Calculeu la integral de la funció  $f(z) = \frac{1+z}{1+\sin z}$  sobre la vora del disc  $D_7(0)$ . ◁

**6.3.11.** Per a  $t > 0$ , sigui  $C_t$  la circumferència de centre  $it$ , que passa pels punts  $-2$  i  $2$ . Calculeu

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-t)} dz, \quad \text{per a } t \neq 2. \quad \triangleleft$$

## 6.4. Residu a l'infinit

**6.4.1.** Trobar el valor la integral  $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$  calculant el residu de l'integrand a l'infinit. ◁

**6.4.2.** Siguí  $a \in \mathbb{R}$ , calculeu, estudiant el residu a l'infinit,  $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$  on  $C$  és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand. ◁

**6.4.3.** Avaluar  $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz.$  ◁

## 6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

**6.5.1.** Per  $r > 0$ , considerem la corba  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definida per  $\gamma_r(t) = re^{it}$ , i sigui

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que  $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0$ . ◁

**6.5.2.** Considereu la funció  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}$ .

(a) Determineu les singularitats de  $f$ .

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de  $z = 2i$ .

## 6. Sèries de Laurent

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor.

◁

**6.5.3.** Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

◁

**6.5.4.** Calculeu

$$I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}.$$

◁

**6.5.5.** Donat  $a \in (0, 1)$  calculeu el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx.$$

◁

**6.5.6.** Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

◁

**6.5.7.** Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

◁

**6.5.8.** Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

a)  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t} dt.$

d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx.$

◁

c)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2+\cos t} dt.$

**6.5.9.** Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos).

◁

## 6. Sèries de Laurent

**6.5.10.** Sigui  $f(z) = e^z/z^2$  i la recta  $\gamma = \{1 + it; t \in (-\infty, +\infty)\}$ .

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Indicació: integreu  $f$  sobre la vora del semidisc de centre  $z_0 = 1$  i radi  $R$  amb  $\operatorname{Re} z \leq 1$ .

b) Deduïu que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}$ .  $\triangleleft$

**6.5.11.** Considereu

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de  $z = 2i$ .

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos).  $\triangleleft$

**6.5.12.** Sigui  $f(z) = e^{iz^2}$ , i considereu el camí  $\gamma_R$  format per el segment que va de 0 a  $R$ ; l'arc del cercle  $|z| = R$  que va de  $R$  a  $Re^{i\pi/4}$ , i el segment que va de  $Re^{i\pi/4}$  a 0. Demostreu que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx.$$

Observació: Podeu utilitzar que  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .  $\triangleleft$

**6.5.13.** (a) Sigui  $f$  una funció holomorfa en  $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$ . Suposem que  $f(a_n) = 0$  per una successió  $a_n \in \mathbb{D}^*$  tal que  $a_n \rightarrow 0$ . Demostreu que  $f \equiv 0$  o bé  $z = 0$  és una singularitat essencial de  $f$ .

(b) Sigui  $f$  una funció holomorfa en  $\mathbb{D}^*$  tal que per a tot  $n \geq 2$ ,  $f$  no té zeros sobre les corbes  $|z| = 1/n$  i a més

$$\int_{|z|=1/n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=1/(n+1)} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que  $z = 0$  és una singularitat essencial de  $f$ . Indicació: Utilitzeu el Teorema de deformació i l'apartat anterior.  $\triangleleft$

## 6. Sèries de Laurent

**6.5.14.** Calculeu, justificant tots els passos, la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: Considereu la funció  $f(z) = \frac{z^\alpha}{z^2 + z + 1}$ . Definiu una determinació del logaritme  $\log(z)$  a  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  de manera que  $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$ . Finalment integreu la funció  $f(z)$  a la mateixa regió que les integrals del tipus

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx. \quad \triangleleft$$

## 6.6. Principi de l'argument

**6.6.1.** Quines de les següents funcions són meromorfs a  $\mathbb{C}$ ?

a)  $z^5$                       b)  $z^{5/2}$                       c)  $e^{1/z}$                       d)  $1/\sin(z)$ .                       $\triangleleft$

**6.6.2.** Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi  $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$ .

I si alternativament el polinomi fos  $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$ ?                       $\triangleleft$

**6.6.3.** Sigui  $f$  una funció entera tal que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que  $f$  té, com a molt, un zero a tot  $\mathbb{C}$ .                       $\triangleleft$

## 6.7. Teorema de Rouché

**6.7.1.** Demostreu que l'equació  $e^z = 2z + 1$  té exactament una solució en el disc unitat obert. Indicació: Proveu que  $|e^z - 1| \leq e - 1$  si  $|z| = 1$ .                       $\triangleleft$

**6.7.2.** Sigui  $f$  una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que  $|f(z)| < 1$ , per a  $|z| = 1$ . Quants punts fixos té  $f$ ?                       $\triangleleft$

**6.7.3.** Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:

(a)  $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$ .

(b)  $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$ .

## 6. Sèries de Laurent

(c)  $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$ . ◁

**6.7.4.** Quants zeros té  $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$  en la regió  $\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}$ ? ◁

**6.7.5.** Considerem  $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$ .

(a) Proveu que tots els zeros de  $P(z)$  són a l'anell  $1 < |z| < 2$ .

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de  $P(z)$  al primer quadrant. ◁

**6.7.6.** (a) Calculeu el nombre de solucions a  $\mathbb{D}$  de l'equació  $e^z = 4z + 1$ .

(b) Demostreu que l'equació  $e^z = 3z^n$  té  $n$  solucions en el disc unitat ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). ◁

**6.7.7.** Sigui  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |a| < 1$ ,  $i$   $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament  $n$  arrels diferents al semiplà  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ . Indicació: Considereu un disc centrat a  $z = 1$  i de radi  $R = 1$  primer, després mireu d'augmentar el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.

(b) Proveu que si, a més,  $|a| \leq 1/2^n$ , llavors totes aquestes arrels són al disc  $D_{1/2}(1)$ . ◁

**6.7.8.** Demostreu que per a tot  $R > 0$  existeix  $n(R) \geq 0$  tal que si  $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc  $\{|z| \leq R\}$ . ◁

**6.7.9.** Sigui  $f_n$  una successió de funcions holomorfes en un domini  $\Omega$  tals que  $f_n \rightarrow f$  uniformement en compactes d' $\Omega$ , per una certa funció  $f$ .

1. (Corollari de Hurwitz) Deduïu que si  $f_n(z) \neq a$  per a tot  $z \in \Omega$  i tot  $n \in \mathbb{N}$ , aleshores,  $f \equiv a$  o bé  $f(z) \neq a$  en  $\Omega$ .
2. Proveu que si  $f_n$  és injectiva en  $\Omega$  per a tot  $n \geq 0$ , aleshores  $f$  és constant o bé  $f$  és injectiva en  $\Omega$ . Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.
3. Proveu que si  $f$  té un zero d'ordre  $m$  en  $a \in \Omega$ , aleshores existeix  $\rho_0 > 0$  tal que per tot  $\rho < \rho_0$  i per tot  $n > n_\rho$ ,  $f_n$  té exactament  $m$  zeros en  $D_\rho(a)$  comptant multiplicitats. ◁

## 7. Representació Conforme

### 7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann

### 7.2. Projectió estereogràfica i circumferències generalitzades

**7.2.1.** Sigui  $p$  la projectió estereogràfica. Demostreu que  $\lambda = \frac{1}{1-z}$ , i que la inversa de  $p$  és

$$p^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (x, y, x^2 + y^2). \quad \triangleleft$$

**7.2.2.** Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre  $\alpha \in \mathbb{C}$  i radi  $r$  és

$$|z|^2 - \alpha \bar{z} - \bar{\alpha} z = r^2 - |\alpha|^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

i la d'una recta perpendicular a  $\alpha$  passant per  $z_0 \in \mathbb{C}$  és

$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} = m, \quad z \in \mathbb{C},$$

on  $m$  és una constant real que només depèn d' $\alpha$  i  $z_0$ .  $\triangleleft$

### 7.3. Transformacions de Möbius

**7.3.1.** Donada una homografia  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , definim  $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , que està definit mòdul constant multiplicativa. Per exemple, les matrius  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  corresponen respectivament a la translació  $z \mapsto z + b$ , a la dilatació  $z \mapsto az$  i a la inversió  $z \mapsto 1/z$ .

a) Donades  $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$ , demostreu que  $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$  (mòdul constant multiplicativa).

b) Trobeu  $T^{-1}$  i relacioneu-la amb  $A_{T_1}$ .  $\triangleleft$

**7.3.2.** Demostreu que tota  $T \in \mathcal{M}$  es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions.  $\triangleleft$

**7.3.3.** Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació

$$T(z) = \frac{2z + i}{(1 - i)z + 3i}. \quad \triangleleft$$

**7.3.4.** Demostreu que tota  $T \in \mathcal{M}$  envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.  $\triangleleft$

**7.3.5.** Sigui  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Quina és la imatge per  $f$  de

## 7. Representació Conforme

- a) la recta real,      b)  $\partial D_2(0)$ ,      c)  $\partial \mathbb{D}$ ,      d) l'eix imaginari.

I per  $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ? ◁

**7.3.6.** Troba l'homografia que envia  $(i, 0, -1)$  a  $(-i, 0, \infty)$ . ◁

**7.3.7.** Demuestra el corollari 7.16. ◁

**7.3.8.** Troba una homografia que envii  $\mathbb{D}$  a  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ . ◁

**7.3.9.** Sigui  $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$  i definim

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}, T(z) = \frac{z}{az+1}.$$

Trobeu

$$T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1, \quad T^m, m \in \mathbb{Z}. \quad \text{◁}$$

**7.3.10.** Trobeu totes les  $T \in \mathcal{M}$  que tinguin per punts fixos  $0$  i  $-i$ . ◁

**7.3.11.** Trobeu  $T \in \mathcal{M}$  tal que  $T(1-i) = 1+i, T(2) = i, T(1+i) = -i$ . ◁

**7.3.12.** Siguin  $C_1$  i  $C_2$  dues circumferències generalitzades i  $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_2$ . Demostreu que existeix  $T \in \mathcal{M}$  tal que  $T(C_1) = C_2$  i  $T(z_1) = z_2$ . Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu una d'elles en el cas particular

$$C_1 = \{z : |z-1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i. \quad \text{◁}$$

## 7.4. Raó doble i simetria

**7.4.1.** Sigui  $T \in \mathcal{M}$  tal que  $T(D_R(a)) = D_R(a)$ . Demostreu que els punts fixos de  $T$  estan a  $\partial D_R(a)$  o bé són simètrics respecte  $\partial D_R(a)$ . ◁

## 7.5. Automorfismes

**7.5.1.** Demuestra que tota representació conforme de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$  és una homografia. ◁

**7.5.2.** Troba tots els automorfismes  $T$  de  $\mathbb{D}$  tals que  $T(1/2) = 1/3$ . ◁

**7.5.3.** Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien  $1/2$  a  $0$ . N'existeix alguna que envii  $0$  a  $-i/2$ ? I  $0$  a  $-i/4$ ? Utilitzeu  $T$  per trobar una representació conforme  $S$  que envii  $\partial \mathbb{D}$  a  $\partial D_2(i)$  tal que  $S(1/2) = i$  i  $S(0) = 0$ . ◁

**7.5.4.** Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt  $b \in \mathbb{D}$  per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D}), T(a) = \tilde{a}\},$$

és una circumferència. ◁

## 7.6. Altres transformacions conformes

**7.6.1.** Quina és la imatge del primer quadrant per  $z^3$ ? ◁

**7.6.2.** Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a un semiplà? ◁

**7.6.3.** Trobeu una aplicació de Riemann del sector  $\{0 < \text{Arg } z < \pi/8\}$ . ◁

**7.6.4.** Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia? ◁

**7.6.5.** Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en  $D_1(1)$  que envii  $1 \mapsto 1$ ,  $0 \mapsto 0$  i  $\infty \mapsto 1 + i$ . ◁

**7.6.6.** Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior  $\mathbb{H}_+ := \{\text{Im } z > 0\}$  en  $\mathbb{D}$  són de la forma  $e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$  per alguna  $a \in \mathbb{H}_+$  i algun  $\theta \in \mathbb{R}$ . ◁

**7.6.7.** Trobeu una transformació de Möbius que envii el primer quadrant a  $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$ . Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de  $\mathbb{H}_+$  a  $\{| \text{Re } z | < 1, \text{Im } z > 0\}$ . ◁

**7.6.8.** Trobeu una representació conforme de  $\{0 < \text{Re } z < \pi/2\}$  en  $\mathbb{D}$ . ◁

**7.6.9.** Trobeu una representació conforme d' $\Omega_1$  en  $\Omega_2$ .

a)  $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$ .

b)  $\Omega_1 = \mathbb{D}$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$ .

c)  $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\text{Re } z > 1/2\}$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$ .

d)  $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$ ,  $\Omega_2 = \{| \text{Re } z | < 1, \text{Im } z > 0\}$ .

e)  $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$ .

f)  $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{D}$ , que deixi invariant el segment  $(-i, i)$ .

g)  $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

h)  $\Omega_1 = \{|\text{Im } z| < \pi/2\} \setminus ((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$ ,  $\Omega_2 = \mathbb{D}$ . ◁

## 7. Representació Conforme

## 8. Fluids

### 8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.

**8.1.1.** *Proveu que  $\Gamma = 0$  en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe  $C^2$  com a mínim).* ◁

**8.1.2.** *Proveu que per fluxos definits en un domini  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial  $\varphi(x, y)$  és una funció harmònica.* ◁

**8.1.3.** *Proveu que  $\overline{\Phi'(z)} = \mathbf{V}(z) = V_1 + iV_2$ .* ◁

### 8.2. Fluxos bàsics.

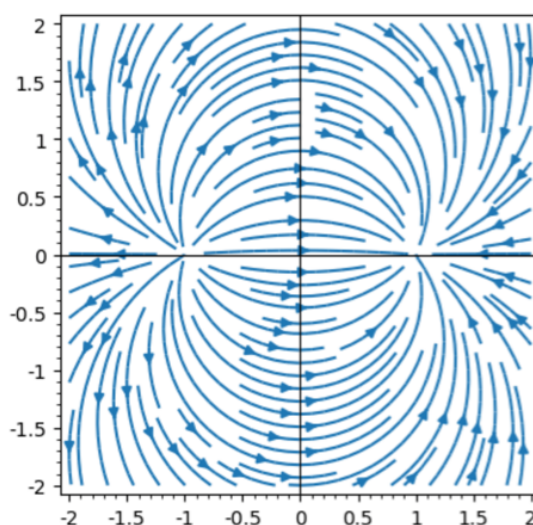
**8.2.1.** *Superposició. Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt  $-a$  amb una pica al punt  $a$ :*

$$\Phi(z) = k \log(z + a) - k \log(z - a) = k \log \left( \frac{z + a}{z - a} \right).$$

*Trobeu l'expressió de  $\mathbf{V}$ ,  $V$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Dibuixeu les línies de corrent ( $\psi = c$ ).* ◁

**8.2.2.** *En l'exercici anterior, fem  $a \rightarrow 0$  i  $k \rightarrow \infty$  de manera que  $2ka = \mu$  sigui finit. Veure que al límit obtenim el potencial complex  $\Phi(z) = \mu/z$  que s'anomena doblet o dipol. Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat  $2\pi\mu$  s'anomena moment del doblet. Trobeu l'expressió de  $\mathbf{V}$ ,  $V$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Dibuixeu les línies de corrent ( $\psi = c$ ).* ◁

**8.2.3.** *Font-remolí. Estudiar el flux amb funció potencial  $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - a)$ . Discutiu segons els valors de  $\Gamma$  (circulació o intensitat) i  $Q$  (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de  $\Gamma$  i  $Q$ .* ◁

Figura 8.1.: Superposició amb  $a = 1$ .

### 8.3. Obstacles

**8.3.1.** Modifiquem el flux amb potencial donat per  $f(z) = \log(z + 2)$  que és una font sortint des del punt  $z = -2$  (vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \log(z + 2) + \log\left(\frac{1}{z} + 2\right).$$

- Descomposeu  $\Phi$  en fluxos coneguts.
- Calculeu  $\Phi'(z)$  i confirmeu el que es demostra a l'apartat anterior.
- Vegeu que per  $z$  amb  $|z|$  molt gran resulta  $\Phi'(z) \approx \frac{1}{z+2}$  i que llavors lluny de  $z = -2$  el flux associat a  $\Phi$  és com una font sortint de  $z = -2$ .
- Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` i `streamline_plot`). ◁

### 8.4. Expressió general (recapitulació).

**8.4.1.** Pels  $z$  on  $V(z) = \Phi'(z) = 0$  diem que hi ha un punt estacionari del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).

- Per  $\Phi(z) = z^n$  el 0 és un punt estacionari d'ordre  $n - 1$ . Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per  $n = 2, 3, 4$ .

## 8. Fluids

- b) *Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?*
- c) *Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre  $n - 1$  llavors les línies equipotencials i de corrent ( $\varphi = ct., \psi = ct.$ ) formen un angle  $\pi/2n$  en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas  $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$ ). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?*

**8.4.2.** *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a*

a)  $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$  on  $a, b \in \mathbb{C}$  i  $Q, \Gamma \in \mathbb{R}.$

b)  $\Phi(z) = az + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z)$  on  $a, \Gamma > 0.$

c)  $\Phi(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \log(z)$  on  $a, Q > 0.$

d)  $\Phi(z) = \frac{p}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z)$  on  $p, \Gamma > 0.$

◁

**8.4.3.** *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

*Particularment estudieu els casos  $\Gamma < 4\pi RV_0$ ,  $\Gamma > 4\pi RV_0$  i  $\Gamma = 4\pi RV_0$ . Dibuixeu exemples de cadascun dels casos.*

◁

**8.4.4.** *Donar un potencial complex que té fonts-remolins  $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \dots, n\}$  i velocitat  $\mathbf{V}_\infty = Ve^{i\alpha}$  a l'infinit.*

◁

## 8. *Fluids*