Introducció a l'anàlisi complexa

v26.1

Carme Cascante[*], Núria Fagella, Eduardo Gallego[†],
Jordi Pau, Martí Prats

28 de gener de 2026

[*]CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:
Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia
[†]EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

Índex

Introducció

Aquests apunts beuen de diverses fonts, però per sobre de tot són el resultat d'anys d'evolució de les assignatures d'anàlisi complexa dels graus de matemàtiques de la UB i la UAB. Per tant, devem part dels continguts i exercicis aquí presentats a en Joaquim Bruna, Josep Maria Burgués, Juan Carlos Cantero, Joan Josep Carmona, Julià Cufí, Juan Jesús Donaire, Xavier Massaneda, Joan Eugeni Mateu, Joan Orobitg, Quim Ortega, i tants d'altres. A tots ells el nostre agraïment per la seva generositat.

L'objectiu d'aquest llibre és poder servir de material pels cursos d'anàlisi complexa dels graus de matemàtiques de les universitats catalanes, així com d'algun altre grau on el contingut de la matèria superi el d'un receptari. Ens centrem doncs en fer un text amb un enfocament didàctic però sempre rigorós, mirant d'incloure el corpus bàsic de l'anàlisi complexa, però també amb pinzellades d'alguna aplicació pràctica i de teoremes avançats rellevants. La lectura inclou nombrosos exemples per il·lustrar els continguts i també exercicis per practicar, amb les solucions disponibles per mitjà electrònic.

Bibliografia complementària

A [BC08] hi trobareu un manual d'anàlisi complexa completíssim i en català, i la seva traducció a l'anglès a [BC13].

Als llibres [Ahl79], [Con78] [D'A10], [Bur12], [R+79], [SS10], podreu trobar aproximacions alternatives i llistes d'exercicis per complementar la vostra formació. El llibre [MH99] és una referència molt didàctica.

Agraïments

Volem agrair la col·laboració dels alumnes de l'assignatura d'Anàlisi Complexa i de Fourier del grau en Matemàtica computacional i analítica de dades (2023-25) i del grau en Matemàtiques (2024-25) de la UAB per la seva paciència amb les actualitzacions permanents dels apunts, i per la seva contribució en millorar-los, especialment a Pol Abadia Conejos, Rok Aladrovic Molina, Sergi Almendros Montoya, Guim Casadellà Cors, Marc Herrero Lázaro, Aiman Himi Ben Alilou, Lluís Panal Majó, Helena Pisa Escribano, Laia Querol Alturo, Adrià Rodríguez Estrada, Marc Roig Oliva, David Ruiz Caceres, Laia Alexandra Sjöberg Cerezo i Ariadna Solà Lara (MatCAD'24), Albert Caire Rodriguez, Lluís Gay Torné, Oriol Jiménez Asensi, Catalina Mascaró Català, Sergi Prats Molino, Alex Vega Tomas i Ferran Villarta Burés (MatCAD'25), Ainara Almendáriz Martínez, Carlos Baca Garcia, Sònia Blanes Molina, Roger Brusau Maimó, Marcel Duran Puig, Axel Espuela Alvarez, Nidia Esteve Gómez, Joel Fernández Laparra, Gina Gardeñes Farré, Bernat Graugés

Bellver, Pep Güell Rigall, Gabriel Guerra De Quadras, Adrià Jimeno Ruiz, Judith Lara Piqueras, Ana López Bruballa, Ada López Del Castillo Avilés, Marta Merino Sánchez, Judith More Bataller, Clara Mulet Ballesta, Katia Moreno Aspiroz, Marta Noguera Segura, Arnau Nuñez Martínez, Lara Angélica Olarte Bayani, Tomàs Planelles Alonso, Miguel Puelma Martínez, Martí Puig Sampera, Eric Recio Chorro, Álvaro Resa Asensio, Albert Ricart Quilez, Marina Rúbies Bedós, Adrià Saz Guerra, Drus Sentís Cahué, Héctor Serrano Asensio, Babaldeep Singh, Ainhoa Trillo Rodríguez, Clara Valls Moreso, Arnau Viladevall Ferré, Marta Vílchez García, Lluís Vivó Pons i David Xifré Palacios (Matemàtiques'25) per la seva excel·lent labor en la detecció d'errors matemàtics, tipogràfics i ortogràfics.

1. El cos dels nombres complexos

El naixement dels nombres complexos està intrínsecament lligat a una sèrie d'enfrontaments entre matemàtics italians del segle XVI, principalment Scipione del Ferro[1], Niccolò Fontana Tartaglia[2], Girolamo Cardano[3], Lodovico Ferrari[4] i Rafael Bombelli[5]. Cardano fou el primer en publicar en el seu *Ars Magna* (1545) una solució de l'equació de tercer grau prèviament descoberta per Scipione del Ferro i redescoberta per Tartaglia, però en mantenir-les secretes per usar-les en duels matemàtics, la seva publicació es va retardar uns quants anys fins que Cardano va fer el pas. En la resolució es fan servir nombres imaginaris, és a dir, arrels de nombres negatius, que Bombelli va descriure i sistematitzar al cap de poc en el seu tractat *Algebra* (1572). Finalment Leonhard Euler[6] va estandaritzar-ne la notació que coneixem avui dia, i va popularitzar-ne l'ús, donant per fi sortida a un coneixement que havia quedat aparcat fins aleshores.

El mètode de Cardano per resoldre una cúbica, explicat avui, seria així: donada una equació de tercer grau $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, la podem reescriure amb el canvi de variable $y = x - a/3$ com l'*equació de Cardano* (o de del Ferro-Tartaglia):

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1.1}$$

Aleshores creem dues noves variables u, v tals que

$$\begin{cases} x = u + v \\ 3uv = -p, \end{cases} \tag{1.2}$$

tenim que

$$0 \overset{(1.1)}{=} u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + pu + pv + q = u^3 + v^3 + q,$$

de manera que ens queda el sistema

$$\begin{cases} u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Per tant u^3 i v^3 són les solucions de l'equació de segon grau:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27},$$

[1] Bolonya, 1465 – 1526, https://ca.wikipedia.org/wiki/Scipione_del_Ferro
[2] Brescia, 1499 – Venècia, 1557, https://ca.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia
[3] Pavia, 1501 – Roma, 1576, https://ca.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano
[4] Bolonya, 1522 – 1565, https://ca.wikipedia.org/wiki/Lodovico_Ferrari
[5] Bolonya, 1526 – 1572, https://ca.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli
[6] Basilea, 1707 – 1783,https://ca.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

és a dir

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right\}. \tag{1.3}$$

Usant (1.2) trobem que

$$x = u + v = \sqrt[3]{u^3} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{u^3}}. \tag{1.4}$$

Si anomenem

$$C = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

aleshores

$$x = C - \frac{p}{3C}$$

és una solució de l'equació de Cardano (1.1).

Notem que els nombres u^3 i v^3 que apareixen a (1.3) poden no estar definits en els reals quan p és gran (respecte de q). Notem també que a (1.4) l'arrel cúbica d'un nombre real està unívocament determinada (a $\mathbb{R}$, és clar).

Si ens restringim als nombres reals i $p, q \in \mathbb{R}$, amb aquest mètode podem trobar una solució de la cúbica, sempre i quan $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0$. Sabem que sempre hi ha una solució (pel teorema de Bolzano[7]). Sabem que hi ha equacions amb tres solucions reals, i totes tres es poden intentar descompondre usant (1.2), però el mètode com a molt en dona una. Què està passant? Doncs que ens cal sortir de la recta real per tornar-hi a entrar!

Sigui $\mathbb{R}$ el cos dels nombres reals. L'equació $x^2+1 = 0$ no té solucions reals. Construirem un cos més gran que $\mathbb{R}$, que anomenarem $\mathbb{C}$, on tindrem solucions, que consisteix en definir un nombre i tal que $i^2 + 1 = 0$ i fer les combinacions $\mathbb{R}$-lineals de 1 i i, és a dir $a + bi$ amb $a, b \in \mathbb{R}$.

Construim per exemple una solució de $x^3 - 7x + 6 = 0$ usant el mètode de Cardano. Estem en el cas $p = -7$ i $q = 6$, així que (1.3) queda

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -3 \pm \sqrt{9 - \frac{7^3}{27}} \right\} = \left\{ -3 \pm \frac{\sqrt{-100}}{3\sqrt{3}} \right\}.$$

Usant que $i^2 = -1$, i suposant que el producte és commutatiu, trobem que $(10i)^2 = -100$, així que ens atrevim a escriure l'expressió anterior com

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -3 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}} i \right\}.$$

Si trobem un nombre $u = a + bi$ tal que $a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = u^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}} i$ (ara hem suposat que $\mathbb{C}$ és un anell), aleshores podem prendre de (1.2) l'altra solució $v = 7/(3u)$, i trobarem x. Ens cal resoldre doncs

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -3, \\ 3a^2b - b^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

[7] Bernard Bolzano, Praga, 1781 – 1848, https://ca.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano

Més endavant, veurem una manera ràpida de trobar aquestes arrels cúbiques. De moment conformem-nos amb saber que una possible solució és $u = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$, com pot comprovar el lector. Aleshores $v = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i$ i trobem

$$x = u + v = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i = 2.$$

Efectivament $x = 2$ soluciona $x^3 - 7x + 6 = 0$, com també ho fan $x = 1$ i $x = -3$.

De fet, tot polinomi de coeficients reals (i de coeficients complexos!) tindrà almenys una arrel, en el que es coneix com a teorema fonamental de l'àlgebra. Diem que $\mathbb{C}$ és un cos algebraicament tancat. Amb aquesta ampliació, seguiran havent-hi dues arrels quadrades per tot element del cos llevat del zero, i tres arrels cúbiques! Notem també que a (1.4) l'elecció de l'arrel quadrada no té importància (per conjugació...) però poden aparèixer tres solucions diferents, amb la precaució que cal prendre la mateixa arrel cúbica en les dues aparicions.

En aquest capítol introduïm el cos $\mathbb{C}$ i veiem les seves propietats bàsiques. Explicarem la forma polar i com usar-la per fer operacions, però abans ens caldrà introduir l'exponencial complexa per donar rigor a aquest càlcul. Finalment veurem com les equacions amb potències tenen múltiples solucions, ja siguin polinomials o exponencials, per acabar exposant el teorema fonamental de l'àlgebra que demostrarem al capítol 4.

1.1. El cos dels nombres complexos

Si som capaços de definir $i = \sqrt{-1}$, aleshores i serà solució de $x^2 + 1 = 0$: efectivament, $(\pm i)^2 + 1 = 0$. Per tant, de la mateixa manera que si un polinomi té una arrel real a, aleshores es pot dividir per $(x - a)$, esperem poder escriure

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Però de moment la identitat anterior no té cap sentit. Necessitem definir el cos dels nombres complexos.

De moment tenim l'element i ideat: volem que sigui un nombre tal que $i \cdot i = -1$.

Definició 1.1. Donats $a, b \in \mathbb{R}$, definim

$$a + bi$$

com un *nombre complex*. Diem doncs que, com a conjunt, tenim que

$$\mathbb{C} := \{a + bi : (a, b) \in \mathbb{R}^2\},$$

i anomenem nombres complexos els elements de $\mathbb{C}$. Anomenem parts reals i imaginària a

$$\mathrm{Re}\,(a + bi) = a \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Im}\,(a + bi) = b. \qquad \bullet$$

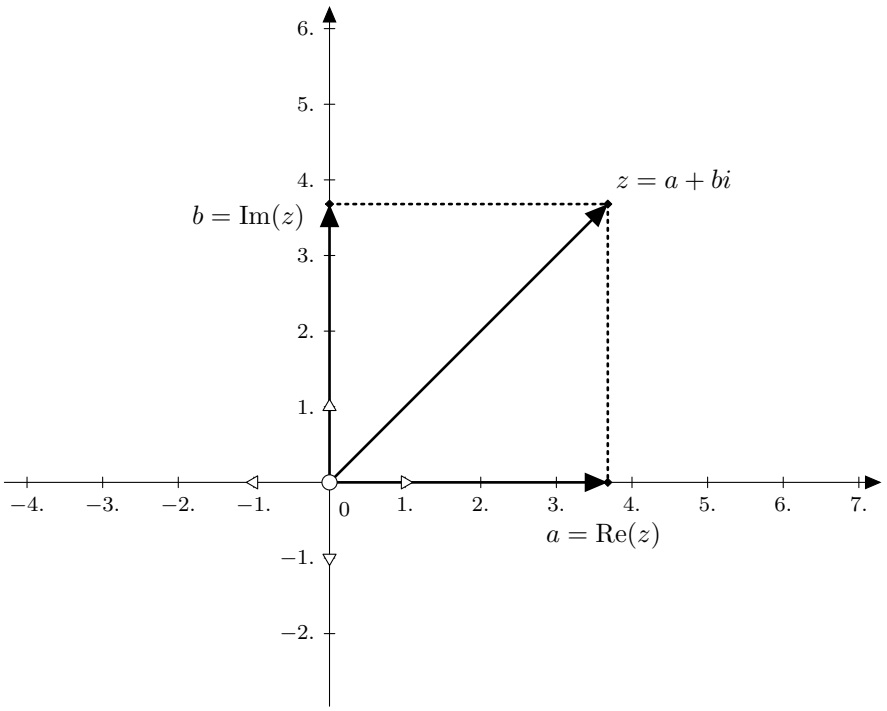


Figura 1.1.: Part real i imaginària d'un nombre complex. Marcarem els punts 0, 1, i, -1, $-i$ amb un cercle i quatre triangles en les figures del text.

Ara ens falta definir les operacions del conjunt, per tal de tenir una estructura de cos. Notem de moment que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, on identifiquem $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ amb el nombre complex $a + bi$. La suma doncs serà heretada de l'estructura d'espai vectorial subjacent, però el producte és una operació nova que creem *ad hoc* per tal d'aconseguir el nostre propòsit:

Definició 1.2. Si $z = a + bi$ i $w = c + di$ són dos nombres complexos, llavors definim la seva *suma* com

$$z + w = a + c + (b + d)i;$$

i el seu *producte* com

$$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Sovint escriurem zw enlloc de $z \cdot w$. •

Notem que amb aquesta definició, si $a, x \in \mathbb{R}$, aleshores en identificar-los amb els nombres complexos $a + 0i$ i $x + 0i$ respectivament trobem que la seva suma i el seu producte coincideixen amb els habituals:

$$(x + 0i) + (a + 0i) = x + a + 0i \equiv x + a,$$

$$(x + 0i) \cdot (a + 0i) = xa + 0i \equiv xa.$$

A més, efectivament tenim que

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

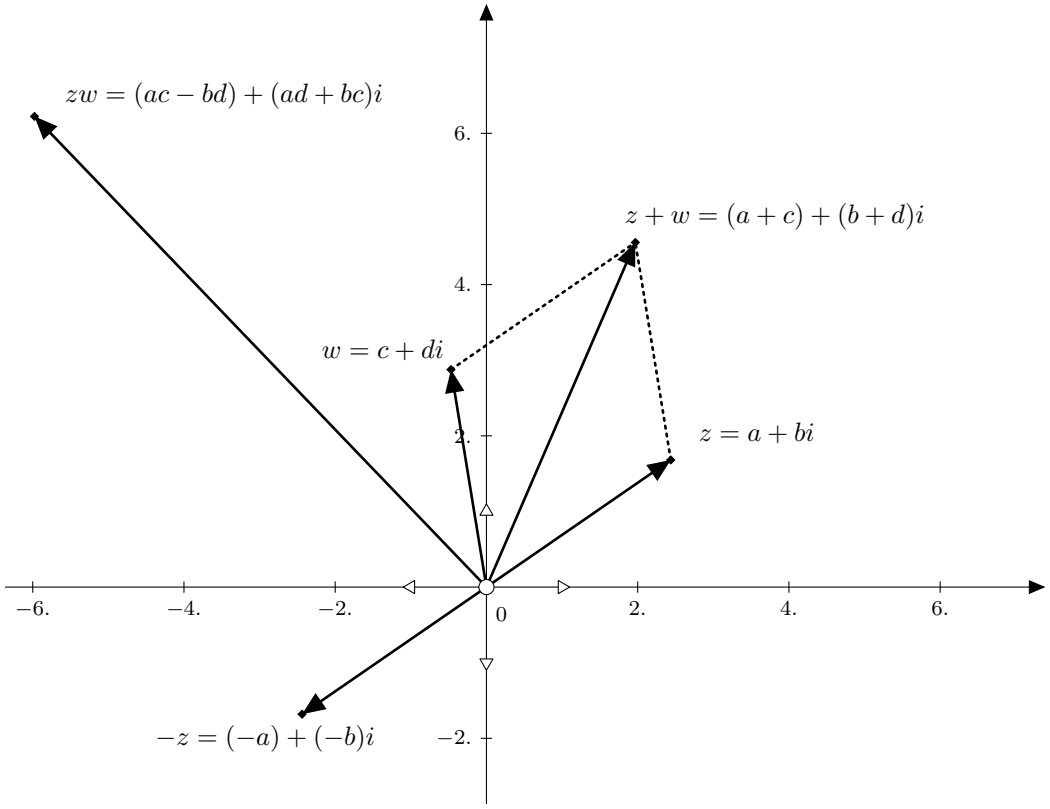


Figura 1.2.: Producte i suma de complexos, i oposat d'un nombre complex.

Per tant, amb aquesta definició hem creat un conjunt amb dues operacions (suma i producte) que estén els nombres reals amb les seves operacions habituals, i on el polinomi $x^2 + 1$ té dues arrels. Notem que la suma és compatible amb l'estructura d'*espai vectorial* de $\mathbb{R}^2$, però el producte de nombres complexos no coincideix amb el producte vectorial ni amb el producte escalar, és una operació que no existeix a l'espai vectorial tal com el definim habitualment.

Exemple 1.3. Podem pensar l'operació producte en termes de la propietat distributiva com

$$(1 + 2i)(-3 + 2i) = -3 + 2i - 6i + 4i^2 = -3 - 4i - 4 = -7 - 4i.$$

Notem que el resultat coincideix amb la definició, i el procediment és més intuïtiu. ◊

Podem veure fàcilment que el conjunt $\mathbb{C}$ equipat amb aquestes dues operacions satisfà les següents propietats, que es poden resumir amb la següent afirmació: els complexos tenen estructura d'anell commutatiu.

Lema 1.4. *Siguin $z, w, v \in \mathbb{C}$. Aleshores se satisfan les propietats respecte a la suma:*

S1 Associativa de la suma: $(z + w) + v = z + (w + v)$.

S2 Element neutre per la suma: si escrivim $0_{\mathbb{C}} := 0 + 0i$*, aleshores* $z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z$*. Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim* $0_{\mathbb{C}} = 0$*.*

S3 Element oposat (de la suma): existeix un nombre complex $u \in \mathbb{C}$ *tal que* $u+z = z+u = 0$*, que anomenem nombre oposat a* z*, i que escrivim com* $(-z) := u$*.*

S4 Commutativa de la suma: $z + w = w + z$*.*

També se satisfan les següents propietats respecte al producte:

P1 Associativa del producte: $(zw)v = z(wv)$*.*

P2 Element neutre pel producte: si escrivim $1_{\mathbb{C}} := 1 + 0i$*, aleshores* $z \cdot 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} \cdot z = z$*. Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim* $1_{\mathbb{C}} = 1$*.*

P3 Commutativa del producte: $zw = wz$*.*

P4 Distributiva del producte respecte a la suma: $z(w + v) = zw + zv$*.*

De fet, $\mathbb{C}$ és un cos (és a dir, tot element diferent de zero té invers respecte del producte). Per veure-ho, primer introduïm el concepte de conjugat.

Definició 1.5 (Conjugat i mòdul d'un nombre complex)**.** Si $z = x + iy$, el conjugat de z és

$$\overline{z} = x - iy.$$

i el seu mòdul és

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ •

Exemple 1.6. De les definicions podem deduir que

- $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$.
- $\overline{i} = -i$.
- $\overline{13} = 13$. ◊

Observació 1.7. Clarament tenim que

- $z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.
- $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|; \qquad |\mathrm{Im} z| \leqslant |z|$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ i $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Les primeres són evidents, la darrera és també un simple càlcul:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$ •

Amb aquesta relació ja podem veure que $\mathbb{C}$ és efectivament un cos:

Lema 1.8. *Siguin $z = x + yi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Aleshores se satisfà la següent propietat respecte del producte:*

P5 Element invers (del producte): existeix un nombre complex $u \in \mathbb{C}$ tal que $uz = zu = 1$, que anomenem nombre invers de z, i que escrivim com $z^{-1} := 1/z := u$.

Aquest nombre és

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2} i = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}.$$

Demostració. Efectivament, $(x+yi)\cdot\left(\frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2}i\right) = \frac{x^2+y^2}{|z|^2} + \frac{xy-xy}{|z|^2}i = 1.$ □

Ara ja podem definir la *divisió* o *fracció* de dos nombres complexos $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\frac{z}{w} := z \cdot \frac{1}{w}.$$

Així, tenim que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}.$$

És a dir, per calcular l'invers d'un nombre complex, només hem de multiplicar numerador i denominador pel seu conjugat.

Exemple 1.9. Tenim

- $\frac{1}{3+10i} = \frac{3-10i}{(3+10i)(3-10i)} = \frac{3-10i}{9+100} = \frac{3}{109} - \frac{10}{109}\,i.$
- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i.$ ◊

Lema 1.10 (Relació entre x, y i $z, \overline{z}$.)**.** *Si $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$, aleshores*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad i \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Demostració. Es tracta de sumar i restar z amb $\overline{z}$, vegeu la figura 1.3. □

Observació 1.11. Un polinomi en x, y és un polinomi en $z, \overline{z}$ (amb coeficients complexos). Per exemple

$$x + y + xy + 1 = \frac{z+\overline{z}}{2} + \frac{(z-\overline{z})}{2i} + \frac{(z+\overline{z})}{2}\cdot\frac{(z-\overline{z})}{2i} + 1$$

$$= z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right) + \overline{z}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right) + 1 + z^2\left(\frac{1}{4i}\right) - \overline{z}^2\left(\frac{1}{4i}\right). \qquad \square$$

Exercicis

1.1.1. *Doneu en forma $a + bi$:*

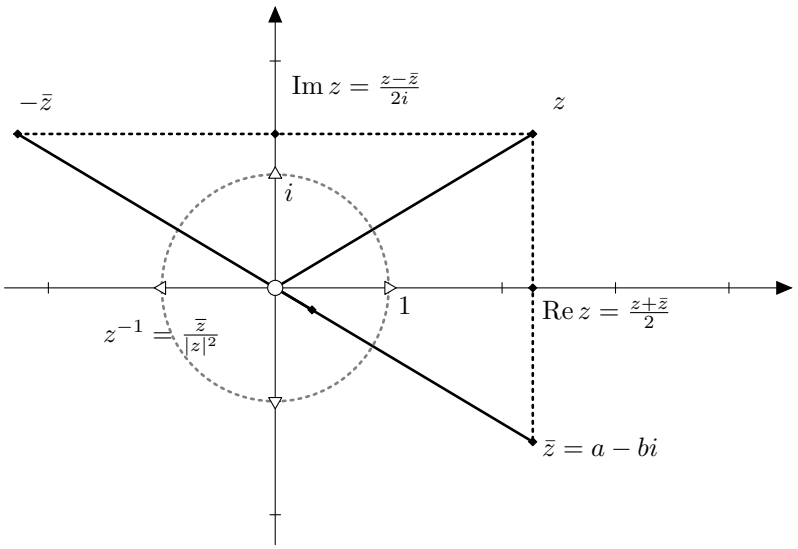


Figura 1.3.: Conjugat i invers d'un nombre complex.

a) $(-1+i)^2$,

b) $\frac{8i-1}{i}$,

c) $\frac{-1+5i}{2+3i}$,

d) $\dfrac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$,

e) $\left(\dfrac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$,

f) $((3-i)^2-3)i$.

1.1.2. *Demostreu o doneu un contraexemple:*

a) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$, *b)* $\operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w)$, *c)* $\operatorname{Re}(\frac{z}{w}) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}$. ◁

1.1.3. *Sigui* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\operatorname{Im}(z) > 0$. *Proveu que* $\operatorname{Im}(1/z) < 0$. ◁

1.1.4. *Si* $z = x + iy$ *on* $x, y \in \mathbb{R}$, *trobeu les parts real i imaginària de:*

a) z^2,

b) $z(z+1)$,

c) $\frac{1}{z-3}$,

d) $\frac{1}{z^2}$,

e) $\frac{z+1}{2z-5}$,

f) z^3. ◁

1.1.5. *Sigui* $(x+iy)/(x-iy) = a + ib$. *Proveu que* $a^2 + b^2 = 1$. ◁

1.1.6. *Proveu que* $-1+i$ *satisfà* $z^2 + 2z + 2 = 0$. ◁

1.1.7. *Escriviu l'equació complexa* $z^3 + 5z^2 = z + 3i$ *com dues equacions reals.* ◁

1.1.8. *a) Si* z_1, z_2 *són complexos amb* $z_1 + z_2$ *i* $z_1 z_2$ *reals negatius proveu que* z_1, z_2 *són reals.*

b) Proveu que el vector z_1 és paral·lel al vector z_2 si i només si $\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$. ◁

1.1.9. *Proveu analíticament i gràfica que* $|z-1| = |\bar{z}-1|$. ◁

1.1.10. *Demostreu que* $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ *si* $|a| = 1$ *o bé* $|b| = 1$. *Quina excepció cal fer si* $|a| = |b| = 1$?

Demostreu també que $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ *si* $|a| < 1$ *i* $|b| < 1$.

Per acabar, si per $a \in \mathbb{D}$ *definim* $\varphi_a(z) := \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, *demostreu que* $\varphi_a : \bar{\mathbb{D}} \to \bar{\mathbb{D}}$, *i és bijectiva en* $\mathbb{D}$ *i en* $\partial\mathbb{D}$, *i doneu-ne la inversa.* ◁

1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial

Per tot nombre real $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definim $\lambda z := (\lambda a) + (\lambda b)i$, és a dir que identifiquem λ amb el nombre complex $\lambda + 0i$ i fem el producte de dos nombres complexos, tal com hem descrit a la secció anterior.

Aquesta multiplicació per un escalar real compleix les propietats:

E1. Compatibilitat del producte per escalar: $(\lambda\mu)z = \lambda(\mu z)$.

E2. El producte per l'element neutre és la identitat: $1z = z$.

E3. Distributiva respecte a la suma real: $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$.

E4. Distributiva respecte a la suma complexa: $\lambda(z + w) = \lambda z + \lambda w$.

Aquí estem suposant que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $z, w \in \mathbb{C}$.

Com que el pla complex també satisfà les propietats $S1$–$S4$ descrites més amunt, diem que té estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial. Com a $\mathbb{R}$-espai vectorial, $\mathbb{C}$ coincideix amb $\mathbb{R}^2$. L'eix de les x s'anomena *eix real*, i l'eix de les y s'anomena *eix imaginari*. El pla format per $\mathbb{R}^2$ en identificar-se amb els complexos (i incorporar, per tant, l'operació producte de complexos) s'anomena *pla complex* o *pla d'Argand*[8].

Per tant, $\mathbb{C}$ hereta l'estructura de $\mathbb{R}^2$, i és un *espai normat* amb $\|z\|_{\mathbb{C}} = |z|$, és a dir,

N1. $\|z\|_{\mathbb{C}} = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

N2. $\|az\|_{\mathbb{C}} = |a|\,\|z\|_{\mathbb{C}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (de fet, $\forall a \in \mathbb{C}$);

N3. $\|z + w\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|z\|_{\mathbb{C}} + \|w\|_{\mathbb{C}}$ (desigualtat triangular).

Donats $z, w \in \mathbb{C}$, definim

$$d(z, w) = |z - w|.$$

[8] Jean-Robert Argand, Ginebra, 1768 – 1822, https://ca.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand

Amb aquesta distància, $\mathbb{C}$ és un espai mètric[9], amb el que té una topologia.

Definició 1.12. El pla complex hereta la topologia del pla. Per tant, el *disc obert* (o bola oberta) centrat en a i de radi r és el conjunt

$$D_r(a) \coloneqq D_r(a) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}.$$

El *disc unitat* normalment es denota $\mathbb{D} \coloneqq D_1(0)$. El *disc tancat* és

$$\overline{D_r}(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}.$$

Diem que un conjunt $A \subset \mathbb{C}$ és *obert* si per tot $a \in A$ existeix $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset A$. Diem que A és *tancat* si $A^c = \mathbb{C} \backslash A$ és obert.

Diem que és *fitat* si existeix un $r > 0$ tal que $A \subset D_r(0)$.

Diem que A és *connex* si no es pot obtenir com a unió de dos oberts relatius disjunts i no buits. Diem que és *arc-connex* si donats dos punts $a, b \in A$ existeix un camí en A que els uneix, i.e., existeix una aplicació contínua $\gamma : [0,1] \to A$ de manera que $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$. Diem que A és *simplement connex* si és connex i donats dos camins entre dos punts $a, b \in A$ es pot transformar l'un en l'altre de manera contínua sense sortir del conjunt A, i.e., existeix una *homotopia de camins*: una aplicació contínua $\gamma : [0,1]^2 \to A$ tal que $\gamma(0,s) = a$, $\gamma(1,s) = b$, $\gamma(t,0)$ coincideix amb el primer dels camins, i $\gamma(t,1)$ coincideix amb el segon.

Diem que A és un *domini* si és obert i connex. •

Observació 1.13. Notem que $\varnothing$ i $\mathbb{C}$ són oberts i tancats, però no hi ha cap més conjunt que sigui obert i tancat alhora.

Un conjunt és simplement connex si és connex i no té forats. •

Exemple 1.14. Recordem que tot conjunt arc-connex és connex, i que tot obert connex és arc-connex. Però hi ha conjunts connexos que no són arc-connexos. Un cas paradigmàtic és la *pinta*: donada una successió $\{x_n\} \subset (0,1)$ tal que $x_n \to 0$, el conjunt $A = [0,1] \cup \bigcup_n x_n + (0,1)i$ (podem anomenar-lo pinta per la seva forma) és arc-connex i, per tant, connex. Si afegim un punt límit no accessible, per exemple $B = A \cup \{i\}$, aleshores B no és arc-connex, ja que el punt afegit no pot ser connectat amb cap punt d'A, però segueix sent connex, ja que aquest punt no pot ser separat de la resta per un obert. ◊

Com que tenim una mètrica (en aquest cas derivada d'una norma), podem parlar de convergència de successions:

Definició 1.15. Diem que una successió de nombres complexos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ és convergent si existeix $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z_n - z| \to 0.$$

[9] És a dir que satisfà:

D1. $d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$;

D2. $d(z,w) = d(w,z)$ (simetria);

D3. $d(z,w) \leqslant d(z,v) + d(v,w)$ (desigualtat triangular).

Diem que z_n tendeix a z, o que z és el límit de la successió, i ho escrivim com

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \qquad \text{o bé } \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Sovint ometrem la notació $n \to \infty$ en les expressions anteriors quan sigui clar pel context. •

A més, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ és complet: tota successió de Cauchy[10] de nombres complexos és convergent.

També tenim que

$$z_n \to z \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \\ \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z. \end{cases} \tag{1.5}$$

Exemple 1.16. La successió $\frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n}\, i$ tendeix a i, ja que $1/n \to 0$ i $\frac{(n-1)}{n} \to 1$. ◊

Advertència 1.17. No sempre és convenient passar a part real i part imaginària. Quan ja es té pràctica amb les relacions anteriors, la majoria de vegades és millor fer servir notació complexa, vegeu l'exercici 1.2.2 i el teorema següent. •

Teorema 1.18. *Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, una funció contínua en $a \in \mathbb{C}$. Si $a_n \to a$, aleshores $f(a_n) \to f(a)$.*

Demostració. Es deriva del resultat a $\mathbb{R}^2$ i la identificació de $\mathbb{R}^2$ amb $\mathbb{C}$. □

Tot seguit discutim la convergència de sèries:

Definició 1.19. Sigui $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ una successió de nombres complexos, aleshores diem que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és convergent si $\left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}_n$ és una successió convergent. En tal cas, si el límit de la successió és z, escrivim

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z.$$

Diem que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és *absolutament convergent* si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$. •

Observació 1.20 (Condició necessària de convergència)**.** Notem que si una sèrie de nombres complexos $\sum_n c_n$ és convergent, aleshores $|c_n| \to 0$. •

Observació 1.21. Tota sèrie absolutament convergent de nombres reals és convergent. En el pla complex passa el mateix. En efecte, si $\sum |z_k| < \infty$, llavors $\sum |\operatorname{Re} z_k| < \infty$ i també $\sum |\operatorname{Im} z_k| < \infty$ ja que $|\operatorname{Re} z_k| \leqslant |z_k|$ i $|\operatorname{Im} z_k| \leqslant |z_k|$, i per tant

$$\begin{cases} \sum \operatorname{Re} z_k & \text{és convergent, i} \\ \sum \operatorname{Im} z_k & \text{és convergent,} \end{cases}$$

de manera que $\sum z_k$ és convergent per (1.5). •

[10] Augustin Louis Cauchy, París, 1789 – 1857, https://ca.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy

Teorema 1.22 (Teorema de Mertens[11]). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ dues sèries de nombres complexos absolutament convergents. Llavors la* sèrie producte de Cauchy *de les sèries anteriors, $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n$, on $\gamma_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}$, és absolutament convergent i*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\right).$$

Demostració. Vegeu l'exercici 1.2.5. □

Definició 1.23. Donada una successió $\{a_n\}$ de nombres reals, definim el seu *límit superior* com

$$\overline{\lim}\,a_n=\limsup a_n:=\inf_k\left(\sup_{n\geqslant k}a_n\right).$$

També es compleix

$$\limsup a_n=\sup\left\{\lim_{k\to\infty}a_{n_k}:a_{n_k}\text{ és una parcial de }a_n\right\}.$$

•

Exemple 1.24. Fem un exemple de càlcul: si tenim la successió $\{a_n\}=\{0,1,0,1,0,1,0,\dots\}$, aleshores $\liminf a_n=0$ i $\limsup a_n=1$. Si $\{b_n\}=\{(-1)^n\}$, aleshores $\liminf b_n=-1$, i $\limsup b_n=1$. ♢

Tot seguit recordem el criteri de l'arrel, que hauria d'haver estat introduït en cursos anteriors.

Lema 1.25 (Criteri de l'arrel). *Considerem una successió de nombres reals $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$, i sigui $\alpha=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$. Aleshores*

(i) Si $\alpha<1$, la sèrie $\sum_n a_n$ és convergent;

(ii) Si $\alpha>1$, la sèrie $\sum_n a_n$ no convergeix.

Observació 1.26. Recordem que si existeix

$$\lim_n\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\ell\in[0,+\infty],$$

aleshores $\lim_n\sqrt[n]{|a_n|}$ existeix i també val ℓ. Recordeu també que el recíproc no és cert: si $a_n=r^{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, aleshores $\lim_n\sqrt[n]{a_n}=r$, però $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r\cdot r^{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, que no té límit. De fet, si $0<r<1$, tenim que $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$ i $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$, de manera que el criteri del quocient no és concloent respecte a la convergència, mentre que el criteri de l'arrel sí que ho és. •

Exercicis

1.2.1. *Descriviu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

[11] Franz Mertens, Środa Wielkopolska, 1840 – 1927, https://ca.wikipedia.org/wiki/Franz_Mertens

a) $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$, *c)* $|z| = \operatorname{Re} z + 1$, *e)* $|z-2| > |z-3|$,

b) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$, *d)* $|z-1| = |z+i|$, *f)* $|z-1| + |z+1| = 7$. ◁

1.2.2. *Suposem que* $a_n \to a$ *i* $b_n \to b$. *Demostreu que* $a_n + b_n \to a+b$ *i* $a_n b_n \to ab$, *sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* ◁

1.2.3. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $i^n + \dfrac{1}{n+i}$, *b)* $\dfrac{n+i}{n-i}$, *c)* $\dfrac{3\,i\,n^2}{n^2-2i}$. ◁

1.2.4. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. ◁

1.2.5. *Demostreu el teorema de Mertens.* ◁

1.2.6. *Tota successió convergent* $\{z_n\}_{n\geqslant 0} \subset \mathbb{C}$ *satisfà que* $|z_{n+1} - z_n| \to 0$. ◁

1.3. Repàs de trigonometria

A l'estudiar càlcul en diverses variables, vam aprendre que podem calcular la *longitud d'una corba* diferenciable $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$:

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)|\, dt.$$

Així, la corba

$$t \mapsto \gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$$

envia l'interval $[-1,1]$ al semicercle unitat superior. Definim π com la longitud d'aquesta corba. Com que $\gamma'(t) = (-1, -t/\sqrt{1-t^2})$, la definició és equivalent a

$$\pi := \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

que és una integral impròpia convergent.

Notem que γ és injectiva i la longitud de $\gamma([-1,t])$ és una funció creixent en t i contínua (de fet, derivable) en $(0,\pi)$ pel teorema fonamental del càlcul; per tant és exhaustiva en $[0,\pi]$. Així, associem a un nombre (que anomenem *angle*) $\alpha \in [0,\pi]$ la semirecta oberta del pla amb extrem a l'origen de coordenades que passa pel punt $\gamma(t)$ tal que

$\alpha = \text{longitud}(\gamma([-1,t])) = \int_{-1}^{t} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$. Per exemple, per $\alpha = \pi$ prenem $t = 1$ ja que π és la longitud del semicercle. L'angle $\alpha = \pi/2$ (anomenat també angle recte) correspon a la meitat del semicercle per simetria, que correspon a $t = 0$, és a dir que té associada la semirecta vertical $\{(0, y) : y > 0\}$.

Si $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, aleshores associem α a la semirecta oposada a l'associada a $\alpha - \pi$.

Si $\alpha \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$ amb $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$; aleshores associem α a la semirecta associada a $\alpha - 2k\pi$

Definició 1.27. Donat un angle $\alpha \in \mathbb{R}$, definim el seu *sinus* com el quocient de la coordenada vertical entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada, (ben definit pel teorema de Tales[12]). Definim el *cosinus* com el quocient de la coordenada horitzontal entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada. I definim la *tangent* com el quocient entre sinus i cosinus. •

Observació 1.28. Tenim

$$\sin(\pi) = \cos(\pi/2) = \sin(0) = 0,$$

$$\sin(\pi/2) = \cos(0) = 1,$$

i

$$\cos(\pi) = -1.$$

Notem que per definició, el sinus i el cosinus són funcions 2π-periòdiques, mentre que la tangent és π-periòdica.

Lema 1.29. *[Paritat de les funcions trigonomètriques] Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores*

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x), \qquad \tan(-x) = -\tan(x).$$

Demostració. És conseqüència directa de la definició. □

Lema 1.30. *[Teorema de Pitàgores[13]] Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Demostració. Això es deriva del fet que $t^2 + \sqrt{1-t^2}^2 = 1$. □

Lema 1.31 (Suma d'angles)**.** *Donats $x, y \in \mathbb{R}$, tenim que*

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{cases}$$

Idea. Aquest lema es pot demostrar usant geometria elemental, vegeu la figura 1.4. □

[12] Tales de Milet, Milet, 625 a.C. – ∼545 a.C., https://ca.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Milet
[13] Pitàgores, Samos, 586 a.C. – ∼490 a.C., https://ca.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A0gores

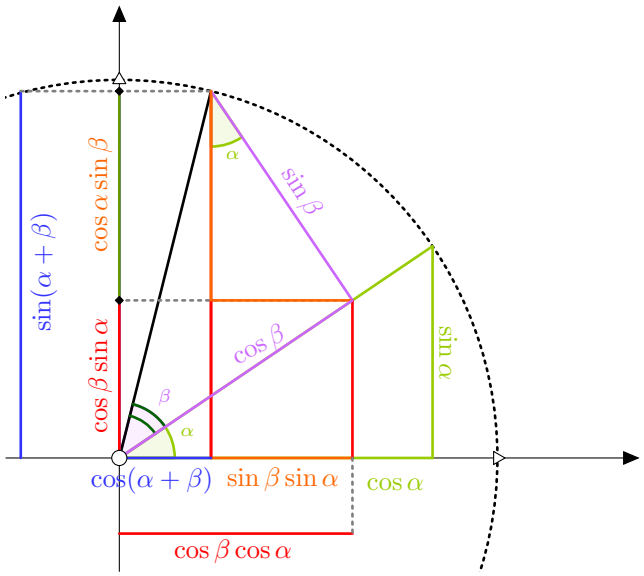


Figura 1.4.: Demostració visual de les fórmules trigonomètriques per la suma d'angles.

Lema 1.32 (Angles complementaris, suplementaris i periodicitat)**.** *Donat $x \in \mathbb{R}$, es compleixen les identitats:*

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 - x) &= \cos(x), & \cos(\pi/2 - x) &= \sin(x), & \tan(\pi/2 - x) &= \tan^{-1}(x). \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x). \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x), & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x); \end{aligned}$$

Demostració. Cal combinar la suma d'angles amb les simetries de les funcions trigonomètriques del lema 1.29 i els valors donats a l'observació 1.28. □

Lema 1.33 (Infinitèsims)**.** *Tenim*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad i \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Idea. Es tracta de veure usant geometria elemental que

$$\sqrt{1 - x^2} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{\sqrt{2(1 - \cos x)}}{x} \leqslant 1,$$

i després fer pas al límit. □

Teorema 1.34. *Les funcions* $\sin(x)$ *i* $\cos(x)$ *són* 2π*-periòdiques, infinitament diferenciables, i*

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad i \qquad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

A més les seves sèries de Taylor són convergents a tot $\mathbb{R}$*, i trobem que*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad i \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Idea. Per veure la diferenciabilitat n'hi ha prou amb comprovar les dues derivades, que surten de

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \overset{\text{L.1.33}}{=} \cos(x).$$

L'altra es fa anàlogament. La convergència s'obté usant estimacions del residu de Taylor. □

Definició 1.35. Es pot demostrar que la tangent és injectiva en $(-\pi/2, \pi/2)$ i la seva imatge és $\mathbb{R}$. Per tant, per tot $x \in \mathbb{R}$ podem definir l'*arctangent* $\arctan x$ com l'únic nombre real $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan\alpha = x$. També pel sinus tenim injectivitat en $[-\pi/2, \pi/2]$ i definim l'*arcsinus* d'un nombre $x \in [-1, 1]$, que escrivim $\arcsin x$, com l'únic nombre real $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\sin\alpha = x$. Finalment el cosinus és injectiu a $[0, \pi]$, i definim l'*arccosinus* d'un nombre $x \in [-1, 1]$, que escrivim $\arccos x$, com l'únic nombre real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos\alpha = x$. Pel teorema de la funció inversa per funcions de variable real, sabem que les tres funcions són C^∞ a l'interior del seu domini. •

Exercicis

1.3.1. *Demostreu tots els resultats de la secció.* ◁

1.3.2. *Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de $x \in \mathbb{R}$ com*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostra que se satisfan les següents identitats:

a) $\sinh(0) = 0$ *i* $\cosh(0) = 1$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$ *i* $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$.

c) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ *i* $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

g) $(\sinh x)' = \cosh x$ *i* $(\cosh(x))' = \sinh(x)$. ◁

1.4. L'exponencial complexa

Per la fórmula de Taylor, tenim que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podem fer servir aquesta mateixa expressió per tal de definir e^z per $z \in \mathbb{C}$.

Definició 1.36. Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aquesta sèrie de nombres complexos és absolutament convergent (ja que $\sum \frac{|z|^n}{n!} < \infty$), i per tant convergent. Així que e^z està ben definit per a tot $z \in \mathbb{C}$. •

Per $x \in \mathbb{R}$, tenim del teorema 1.34 que

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}); \qquad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Així doncs, tenim la *identitat d'Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

i la fórmula inversa d'Euler:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{i} \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notem que la corba $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida per $\gamma(x) = e^{ix}$ retorna valors de mòdul 1 pel teorema de Pitàgores:

$$\left|e^{ix}\right| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Per tant, la corba γ "enrotlla" la recta real sobre la circumferència unitat, amb velocitat constant i periodicitat 2π.

Podem definir els sinus i cosinus de nombres complexos anàlogament usant el teorema 1.34, però en aquest capítol només apareixen les funcions sinus i cosinus amb variable real.

Proposició 1.37. *Per a tot $z \in \mathbb{C}$, es compleix que*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Demostració. Per definició, tenim que

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}}.$$

Com que l'aplicació conjugada és contínua, podem treure el límit a fora del conjugat (teorema 1.18) per obtenir

$$\overline{e^z} = \lim_{k\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}.$$

□

Com a propietat fonamental de l'exponencial real, tenim que

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

L'exponencial complexa e^z manté aquesta propietat.

Proposició 1.38. *Donats $z, w \in \mathbb{C}$, tenim que*

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, trobem per tant

$$e^{nz} = (e^z)^n, \qquad i \qquad e^{-z} = (e^z)^{-1}. \tag{1.6}$$

En particular, tenim que

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

que generalitza la identitat d'Euler.

Demostració de la proposició. Per la definició de l'exponencial complexa, tenim que

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k\, w^{n-k}}{n!},$$

on hem aplicat la fórmula del binomi de Newton[14] en la darrera identitat. Recordem també que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Pel criteri del quocient (vegeu l'observació 1.26), tenim que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ és absolutament convergent. Podem doncs aplicar el teorema de Mertens, i trobem que

$$e^z\, e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} z^k\, w^{(n-k)}\right),$$

que coincideix amb l'expressió anterior.

[14] Isaac Newton, Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, 1642 – 1727, https://ca.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Per veure 1.6, notem que és cert per $n \in \{0, 1\}$. Per $n > 1$, suposant que és cert per $n-1$ com a hipòtesi inductiva, trobem que

$$e^{nz} = e^{(n-1)z+z} = e^{(n-1)z}e^z = (e^z)^{n-1}\, e^z = (e^z)^n\,.$$

Finalment,

$$1 = e^0 = e^z e^{-z} \implies e^{-z} = (e^z)^{-1}\,.$$

□

Observació 1.39. Una demostració alternativa de $\left|e^{ix}\right| = 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$: Tenim

$$\left|e^{ix}\right|^2 = (e^{ix})\,\overline{(e^{ix})} = e^{ix}\, e^{\overline{ix}} = e^{ix}\, e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Definint les potències negatives de la manera habitual, és a dir $z^{-k} = (z^k)^{-1}$, aleshores 1.6 estén a tots els enters $n \in \mathbb{Z}$. •

Observem (vegeu l'observació 1.28 i el lema 1.32) que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad e^{i\pi} = -1; \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Lema 1.40 (Fórmula de De Moivre[15])**.** *Per tot $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in \mathbb{R}$, tenim que*

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right) \quad i \quad \sin(n\theta) = \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right)$$

Demostració. Això és una reescriptura de $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, vegeu (1.6). □

Usant la identitat anterior, podem expressar $\cos(n\theta)$ i $\sin(n\theta)$ en termes de $\sin\theta$ i $\cos\theta$. Vegem un exemple:

Exemple 1.41. Com que

$$(e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\sin\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta - i\sin^3\theta,$$

i

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta,$$

obtenim la identitat $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta$. ◊

Exercicis

1.4.1. *Fent servir la fórmula de de Moivre, trobeu expressions de $\sin 3\theta$ i $\sin 4\theta$ en termes de $\sin\theta$ i $\cos\theta$.* ◁

1.4.2. *Trobar les arrels de $z^4 + 1 = 0$ i fer-les servir per veure que $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$.* ◁

[15] Abraham de Moivre, Vitry-le-François, 1667–1754, https://ca.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre

1.5. Representació polar d'un nombre complex

Tot nombre complex $z \neq 0$, el podem expressar en termes del seu mòdul r (on $r = |z|$) i l'angle θ que forma amb l'eix real. És a dir, podem fer un canvi de coordenades

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad r_\theta.$$

Aquest angle θ quedarà completament determinat si imposem que es trobi en un interval de longitud 2π fixat.

Definició 1.42 (Coordenades polars)**.** Donat $z \in \mathbb{C}$, s'anomena l'*argument principal* de z i es denota per

$$\operatorname{Arg} z$$

l'únic angle θ prenent valors $-\pi < \theta \leqslant \pi$ de manera que

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = |z| \cos\theta \\ \\ \operatorname{Im} z = |z| \sin\theta \end{cases}$$

Aleshores tenim que

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}.$$

Anomenem *coordenades polars* de z al parell (r, θ) amb $r = |z|$. •

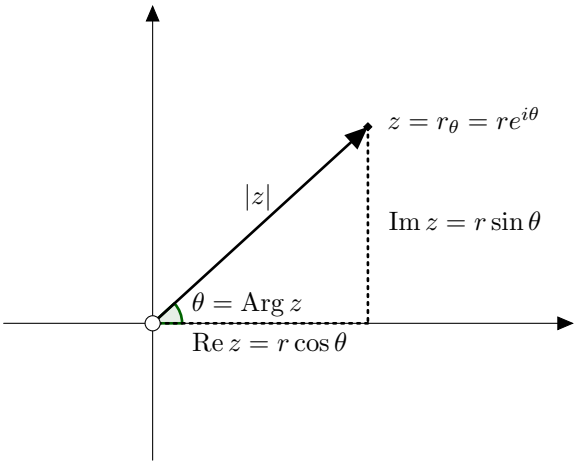


Figura 1.5.: Coordenades polars d'un nombre complex.

Observació 1.43. Per trobar l'argument principal de z, podem calcular l'arctangent: $\hat{\theta} := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Aleshores,

- si $x > 0$ (primer i quart quadrants del pla complex) definim $\theta = \hat{\theta}$,

- si $x < 0$ i $y \geqslant 0$ (segon quadrant), tenim que $-\pi/2 < \theta < 0$ així que definim $\theta := \hat{\theta} + \pi$ i
- si $x < 0$ i $y < 0$ (tercer quadrant), tenim que $0 < \theta < \pi/2$ així que definim $\theta := \hat{\theta} - \pi$.
- Si $x = 0$ i $y > 0$ (semieix imaginari superior) definim $\theta = \pi/2$ i
- si $x = 0$ i $y < 0$, prenem $\theta = -\pi/2$.

D'aquesta manera, per tot $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tenim que

$$\operatorname{Arg} z = \theta \in (-\pi, \pi]\,. \qquad \bullet$$

Exemple 1.44. 1. La representació polar de i és

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2. Calculem la representació polar de $z = \sqrt{3} + i$:

   Tenim $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, amb el que

   $$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

   que implica

   $$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\theta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

   amb el que $\theta = \pi/6$, i per tant la representació polar és

   $$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}. \qquad \lozenge$$

Proposició 1.45. *Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Es compleix que $e^{z_1} = e^{z_2}$ si i només si $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.*
En particular, la funció exponencial complexa és una funció periòdica i el conjunt de períodes és $2\pi i\mathbb{Z}$.

Demostració. Suposem que per a un $k \in \mathbb{Z}$, $z_1 = z_2 + 2\pi ik$. Llavors

$$e^{z_1} = e^{z_2 + 2\pi ik} = e^{z_2} e^{2\pi ik} = e^{z_2}.$$

Recíprocament, si $e^{z_1} = e^{z_2}$, es compleix que $e^{z_1 - z_2} = 1$, amb el que $e^{\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2} = |e^{z_1 - z_2}| = 1$ i $e^{i\operatorname{Im}(z_1 - z_2)} = 1$, és a dir

$$\cos \operatorname{Im}(z_1 - z_2) \overset{\text{Euler}}{=} 1.$$

Per tant, $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ i $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) = 2k\pi$, o, equivalentment, $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. $\square$

Tornant a la definició 1.42, és clar que, fixant un altre interval de longitud 2π, hi ha altres possibilitats amb l'angle θ que ens dona la representació polar. De fet, aquí n'hem fixat una de concreta per fer de referència. Així doncs, hi ha infinits nombres reals θ (s'anomenen arguments de z) que compleixen la identitat

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Són

$$\text{Arg } z + 2\pi k; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.46.

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}}. \qquad \Diamond$$

Definició 1.47. Un *argument* de $z \neq 0$ és un nombre real θ de manera que $z = |z|e^{i\theta}$.

$$\arg z \qquad \text{denota } \textbf{tots} \text{ els possibles arguments de } z. \qquad \bullet$$

Exemple 1.48. Sigui $z = 1 - \sqrt{3}i$. Llavors $|z| = 2$ amb el que

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\pi < \theta \leqslant \pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Per tant

$$\text{Arg } z = -\frac{\pi}{3}; \qquad \arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \Diamond$$

El producte, el quocient i la potència solen ser més fàcils de calcular en forma polar:

Exemple 1.49.

$$2e^{3i} \cdot \sqrt{3}e^{i\pi} = 2\sqrt{3}e^{i(3+\pi)}.$$

$$\frac{2e^{3i}}{\sqrt{3}e^{i\pi}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i(3-\pi)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i(3-\pi)}.$$

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{25} = 2^{25}e^{i\frac{25\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{24\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Notem que en multiplicar un nombre $z \in \mathbb{C}$ per $re^{i\theta}$, el mòdul es multiplica per r i l'argument augmenta en θ. És a dir que en multiplicar dos nombres complexos, trobem un nombre que té per mòdul el producte de mòduls i per argument la suma d'arguments (podem corregir per tenir l'argument principal sumant o restant 2π). $\Diamond$

Exercicis

1.5.1. *Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.*

a) $3(1+\sqrt{3}\,i)$, *b)* $2\sqrt{3}-2i$, *c)* $-2+2i$, *d)* $-1-i$. ◁

1.5.2. *Expresseu en forma cartesiana* $(a+ib)$ *els següents nombres:*

a) $(2+3i)(4+i)$, *c)* $\frac{1}{4+i}$, *e)* $(1-2i)^3$, *g)* $(1+i)^{100}+(1-i)^{100}$,

b) $(4+2i)^2$, *d)* $\frac{i}{2+i}$, *f)* $\frac{1}{2+i}+\frac{4-2i}{3+i}$, *h)* $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$. ◁

1.5.3. *Fent servir el producte de* $(1+i)(5-i)^4$ *deduir la fórmula de Machin*[16]*:* $\pi/4 = 4\arctan(1/5)-\arctan(1/239)$. ◁

1.5.4. *Estudiar la convergència de* $\{z_0^n\}$ *si* $|z_0|<1$ *o si* $|z_0|>1$. ◁

1.5.5. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $z_n=\dfrac{i}{n}$, *c)* $z_n=\operatorname{Arg}(-1+i/n)$, *e)* $z_n=\left(\dfrac{1-i}{4}\right)^n$,

b) $z_n=i(-1)^n$, *d)* $z_n=\dfrac{n(2+i)}{n+1}$, *f)* $z_n=\exp\left(\dfrac{2n\pi i}{5}\right)$.

Aquí hem escrit $\exp(z)=e^z$.

1.6. Equacions amb exponencials

Exemple 1.50. Solucionem l'equació

$$e^z=1, \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Tenim

$$1=e^z=e^x\,e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Com que $|e^{iy}|=1$, igualant mòduls i arguments obtenim

$$1=|e^z|=e^x \quad\Rightarrow\quad x=0 \quad\Rightarrow\begin{cases}\cos y=1\\ \sin y=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad y=2k\pi;\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Per tant,

$$e^z=1 \quad\Leftrightarrow\quad z=2k\pi i; \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

◊

[16] John Machin (1706), podeu trobar més informació a https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula.

Moltes de les equacions "exponencials" es redueixen a l'anterior. Per exemple

$$e^z = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad e^{z-i\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Exemple 1.51. Recordem que donats $z, w \in \mathbb{C}$, per la proposició 1.45 tenim l'equivalència

$$e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i \text{ per algun } k \in \mathbb{Z}.$$

Sabent que $1 = e^0$, podem dir directament que

$$e^z = e^0 \iff z = 0 + 2k\pi i,$$

tal com hem vist pas a pas en l'exemple anterior. ◊

Exercicis

1.6.1.

Resoleu les següents equacions:

a) $e^z = 1 + i$, *b)* $e^{z^2} = i$, *c)* $e^{iz} = -1$. ◁

1.7. Arrels n-èsimes

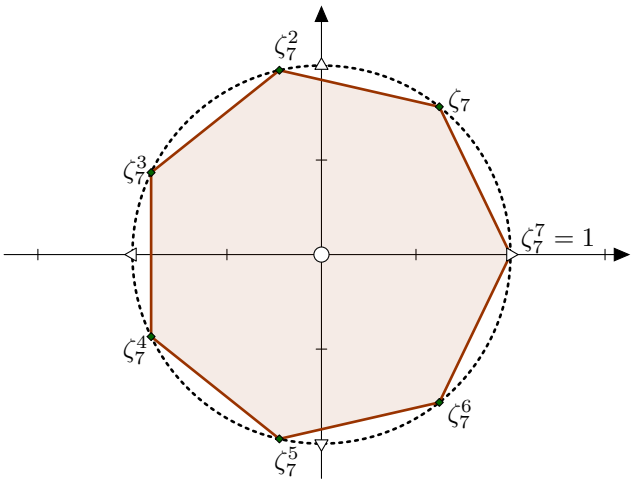


Figura 1.6.: Arrels setenes de la unitat.

Donat $n \in \mathbb{N}$, si definim $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$, aleshores

$$\left(\zeta_n^k\right)^n = e^{2k\pi i} = 1.$$

Diem que $\{\zeta_n^k\}_{k=0}^{n-1}$ són les n arrels n-èsimes de la unitat.

Sigui $a \in \mathbb{C}$ amb $a \neq 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, calculem els nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ de manera que

$$z^n = a.$$

(Aquí no és convenient passar a notació real i fer $(x+iy)^n = a$). Posem $z = re^{i\theta}$ amb $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Llavors

$$r^n e^{in\theta} = |a| e^{i \operatorname{Arg} a}.$$

Igualant mòduls obtenim $r^n = |a| \Rightarrow r = \sqrt[n]{|a|}$. També

$$e^{in\theta} = e^{i \operatorname{Arg} a} \Leftrightarrow e^{i(n\theta - \operatorname{Arg} a)} = 1 \quad \Rightarrow \quad n\theta - \operatorname{Arg} a = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant, les solucions de $z^n = a$ són

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i\theta_k}, \qquad \text{amb} \quad \theta_k = \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Tenim n solucions (amb $k \geqslant n$ dona solucions repetides). Notem que

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}} \zeta_n^k,$$

i com que $z_0 = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}}$, podem escriure les arrels n-èsimes d'a com

$$z_k = \zeta_n^k z_0,$$

vegeu la figura 1.7.

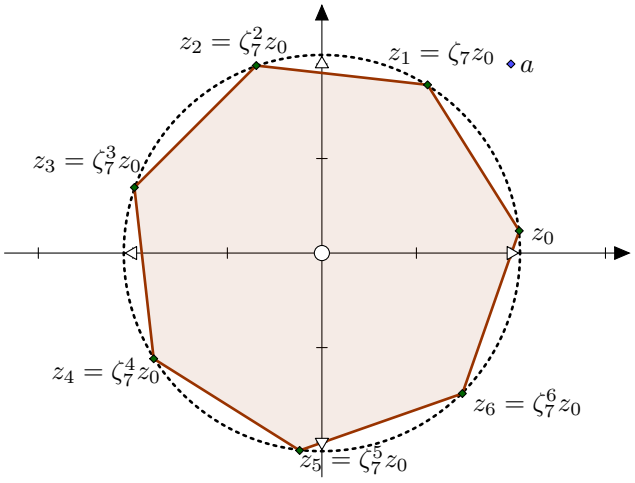


Figura 1.7.: Arrels setenes de $a = 1 + i$.

Exemple 1.52. $\sqrt[4]{i} \to e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i\,13\pi/8}$. Els quatre resultats satisfan que

$$z^4 = i. \qquad \Diamond$$

Exercicis

1.7.1. *Calculeu:*

a) $\sqrt[3]{-1}$, *b)* $3^{1/4}$, *c)* $\sqrt[4]{-i}$, *d)* $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$, *e)* $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$. ◁

1.7.2. *Donat* $a \in \mathbb{C}$, *quin és el màxim de* $|z^n + a|$ *per a* $|z| \leqslant 1$*?* ◁

1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

Per acabar aquest capítol, comentem un dels principals motius que fa dels complexos una eina imprescindible: tot polinomi de coeficients reals o complexos té sempre almenys una arrel complexa, i per tant, el grau del polinomi coincideix amb el seu nombre d'arrels comptant multiplicitats.

Acabem de comprovar que hi ha nombres complexos que són solució de certs polinomis. Per exemple, si $0 \leqslant k < n$, aleshores els nombres

$$e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

són tots diferents i satisfan que

$$z^n = 1.$$

Hem trobat doncs n arrels diferents del polinomi $z^n - 1$, que anomenem arrels n-èsimes de la unitat.

En general, tot polinomi de grau n amb coeficients complexos $p \in \mathbb{C}[x]$, és a dir

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

on $a_k \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$ té exactament n arrels *comptant multiplicitats*. Dit d'una altra manera, existeixen n nombres $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbb{C}$ (possiblement coincidents) de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{n-1} (z - \alpha_k).$$

Diem que α és una arrel de multiplicitat j si existeixen exactament j subíndexs $k_1, \ldots, k_j$ tals que $\alpha = \alpha_{k_i}$. Per exemple,

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2+1)^2 = (z+i)^2(z-i)^2,$$

té dues arrels dobles, que són $\pm i$. Aquest resultat es coneix com a *teorema fonamental de l'àlgebra*, vegeu el teorema 4.31.

Notem també que el resultat aplica a polinomis de coeficients reals, $p \in \mathbb{R}[x]$: tot polinomi de grau n amb coeficients reals té n arrels complexes comptant multiplicitats. A més, com que $\overline{a_k} = a_k$, trobem que

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{p(z)}.$$

Per tant, si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ és una arrel de p, el seu conjugat també ho és:

$$p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

Treballant una mica es pot deduir que la multiplicitat d'α i la del seu conjugat coincideixen. Per tant, tot polinomi de grau n amb coeficients reals té j arrels de part imaginària positiva α_k, en té j amb part imaginària negativa $\overline{\alpha_k}$ i $n-2j$ arrels reals β_k, de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{j}(z-\alpha_k)(z-\overline{\alpha_k}) \prod_{k=0}^{n-2j}(z-\beta_k) = a_n \prod_{k=0}^{j}(z^2-(\alpha_k+\overline{\alpha_k})z+\alpha_k\overline{\alpha_k}) \prod_{k=0}^{n-2j}(z-\beta_k),$$

és a dir

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{j}(z^2-2\mathrm{Re}\,(\alpha_k)z+|\alpha_k|^2) \prod_{k=0}^{n-2j}(z-\beta_k).$$

En la darrera expressió, hem trobat una factorització amb coeficients reals, on tots els factors són de grau 1 o 2.

Exercicis

1.8.1. *Resoleu* $(z+1)^5 = z^5$. ◁

1.8.2. *Sigui* $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. *Considerant el polinomi* $(1-z)P(z)$, *demostreu que tots els zeros de* $P(z)$ *estan dins del disc unitat.* ◁

2. Funcions de variable complexa

En aquest capítol introduïm els conceptes de funció de variable complexa (i parlarem de com representar aquestes funcions) i de funció multivaluada. Treballarem les determinacions contínues d'aquestes funcions multivaluades, centrant-nos en arguments, logaritmes i arrels. Finalment treballarem amb les sèries de potències de nombres complexos. Veurem què és el radi de convergència i com calcular-lo i treballarem diferents tipus de convergència a l'interior del disc de convergència i a la frontera, concloent amb els criteris de Dirichlet[1] i d'Abel[2].

2.1. Funcions

Recordem diversos conceptes:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ és obert si $\forall a \in \Omega$ hi ha $r > 0$ amb $D_r(a) \subset \Omega$, on $D_r(a)$ denota el disc obert

$$D_r(a) = \big\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\big\}.$$

- F és tancat $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\backslash F$ és obert $\Leftrightarrow$ F és tancat per successions (és a dir, si $z_n \in F$ amb $z_n \to z$, aleshores $z \in F$).

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Una *funció de variable complexa* és

$$f : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Podem posar $f(z) = u(z) + iv(z)$, on denotem

$$u = \operatorname{Re} f; \qquad v = \operatorname{Im} f.$$

Donat $z \in \Omega$ i $w \in \mathbb{C}$ tals que $w = f(z)$, aleshores diem que w és la imatge de z per f. El conjunt Ω és el *domini de definició* de f. Si $B \subset \Omega$, $f(B) \subset \mathbb{C}$ és la seva imatge, és a dir

$$f(B) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in B \text{ tal que } f(z) = w\}.$$

Si prenem $B = \Omega$, diem que $f(\Omega)$ és el *rang* o *recorregut* de f.

Exemple 2.1. Si $f(z) = iz$ amb domini $\mathbb{C}$, la imatge de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és $f(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$. En general, f actua com una rotació de 90° al voltant de l'origen en sentit antihorari. $\Diamond$

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Düren, 1805–1859, https://ca.wikipedia.org/wiki/Johann_Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

[2] Niels Henrik Abel, Finnøy, 1802–1829, https://ca.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Definició 2.2 (Límit d'una funció en un punt)**.** Diem que $\lim_{z\to a} f(z) = \ell$ si i només si $\forall \varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ (que pot dependre d'a) de manera que per a tot $z \in \Omega$, $0 < |z-a| < \delta$, $|f(z) - \ell| < \varepsilon$. •

Definició 2.3 (Continuïtat)**.** Una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *contínua* en Ω si és contínua en tot punt $a \in \Omega$.

$$f \text{ és contínua en } a \;\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Es compleix que f és contínua en a si i només si $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ són contínues en a, i també si i només si, per a tota successió $\{z_n\}$ amb $z_n \to a$ se satisfà que $f(z_n) \to f(a)$. •

Exemple 2.4. Els polinomis en z i $\overline{z}$ són continus. També e^z és contínua en tot punt de $\mathbb{C}$. ◊

Advertència 2.5. Arg z és contínua en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ i NO és contínua en $(-\infty, 0]$.

En efecte, si ens acostem a la semirecta $(-\infty, 0)$ per dalt, llavors Arg $z \to \pi$, en canvi si ens acostem per baix, tendeix a $-\pi$, amb el que si $a \in (-\infty, 0)$, llavors

$$\text{no existeix} \quad \lim_{z\to a} \operatorname{Arg} z. \qquad \bullet$$

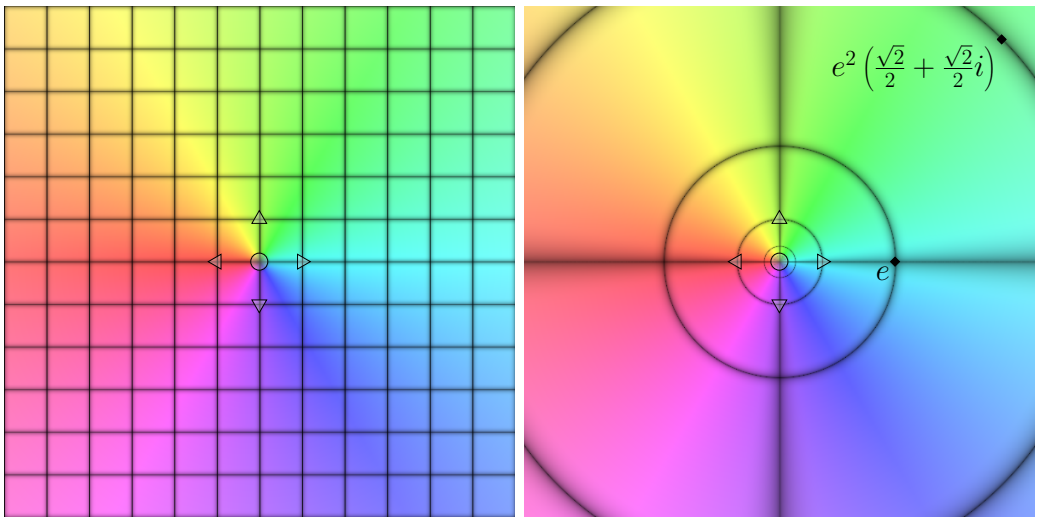


Figura 2.1.: A l'esquerra, una *coloració del pla complex* amb la graella de *coordenades cartesianes enteres*, mentre que a la dreta, la graella marca els cercles de mòdul e^k, $k \in \mathbb{Z}$, i els eixos real i imaginari. Per la coloració, s'escull el color en funció de l'angle i la saturació en funció del logaritme del mòdul (empal-lideix amb mòduls grans). Dibuixem des de $-6-6i$ fins a $6+6i$. Aquí, i al llarg dels apunts, quan dibuixem en aquest domini, direm que dibuixem en $6\mathcal{Q}$, i quan dibuixem en $-2-2i$ fins a $2+2i$ direm que és en $2\mathcal{Q}$.

Comentari 2.6 (Dibuixar una funció complexa)**.** Recordem que per dibuixar una funció, entenem representar el conjunt

$$\operatorname{graf} f := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z) = w\}.$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es pot fer en el pla, però per una funció complexa necessitem quatre dimensions reals per fer aquesta representació. Difícilment podem arreglar-ho amb una bona perspectiva com solem fer amb les funcions de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Coses que podem fer:

- Estudiar la *imatge de conjunts especials* $\{x = c\}$, $\{y = c\}$, $\{r = c\}$ o $\{\theta = c\}$, vegeu la figura 2.2.

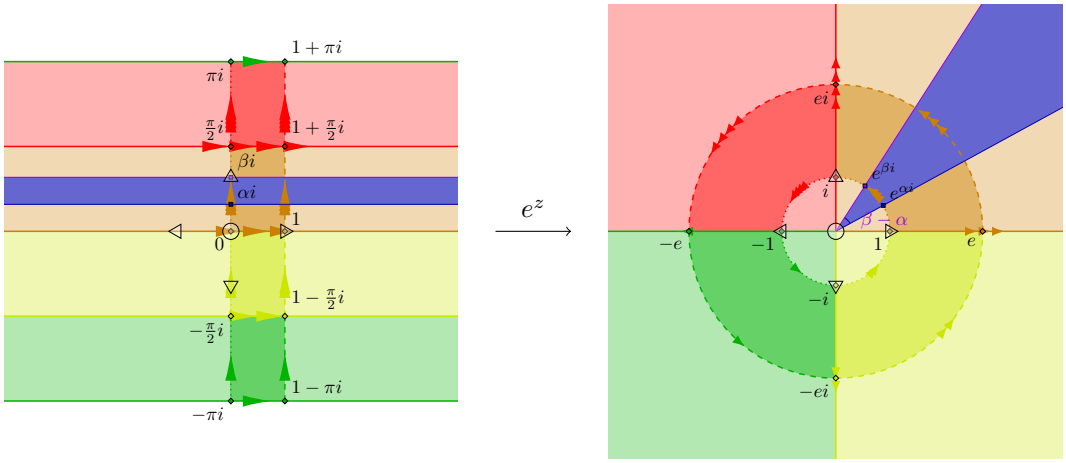


Figura 2.2.: Representació de la funció exponencial. Representem l'acció en bandes horitzontals i verticals i en rectangles paral·lels als eixos. Notem que té període $2k\pi i$, i que bandes horitzontals d'amplada γ van a sectors d'obertura γ.

- Dibuixar $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ i $(x, y) \mapsto \operatorname{Arg}(f(x, y))$, o bé $(x, y) \mapsto \operatorname{Re} f(x, y)$ i $(x, y) \mapsto \operatorname{Im} f(x, y)$.
- Fer un *gràfic de colors* (`complex_plot`). Es tracta d'assignar un color a cada píxel w (figura 2.1) i aleshores pintem el punt z en funció del color de $w = f(z)$, vegeu les figures 2.3, 2.4 i 2.5. •

Exemple 2.7 (La funció exponencial)**.** Comencem amb les imatges de rectes verticals: sabem que a $\mathbb{C}$, la funció exponencial complexa és $2\pi i$-periòdica. Per tant, el que passi en una banda horitzontal d'amplada 2π, passa en qualsevol altra.

Donat que per la fórmula d'Euler, $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, es compleix que si y varia de 0 a 2π, e^{iy} dona una volta al cercle unitat $\mathbb{T}$. Per tant, la imatge de tot segment vertical de longitud 2π i part real x_0 es transforma en un cercle al voltant del zero de radi e^{x_0}.

Anem a veure en què es transformen les rectes horitzontals. Recordem que l'exponencial real envia homeomòrficament $\mathbb{R}$ en la semirecta $(0, \infty)$. Per tant, si fixem $y_0 \in \mathbb{R}$ i considerem els punts de la forma $z = x + iy_0$, amb $x \in \mathbb{R}$, es compleix que els punts $e^z = e^x e^{iy_0}$ cobreixen la semirecta $\{e^x e^{iy_0} : x \in \mathbb{R}\}$. Vegeu les figures 2.2 i 2.3. ◊

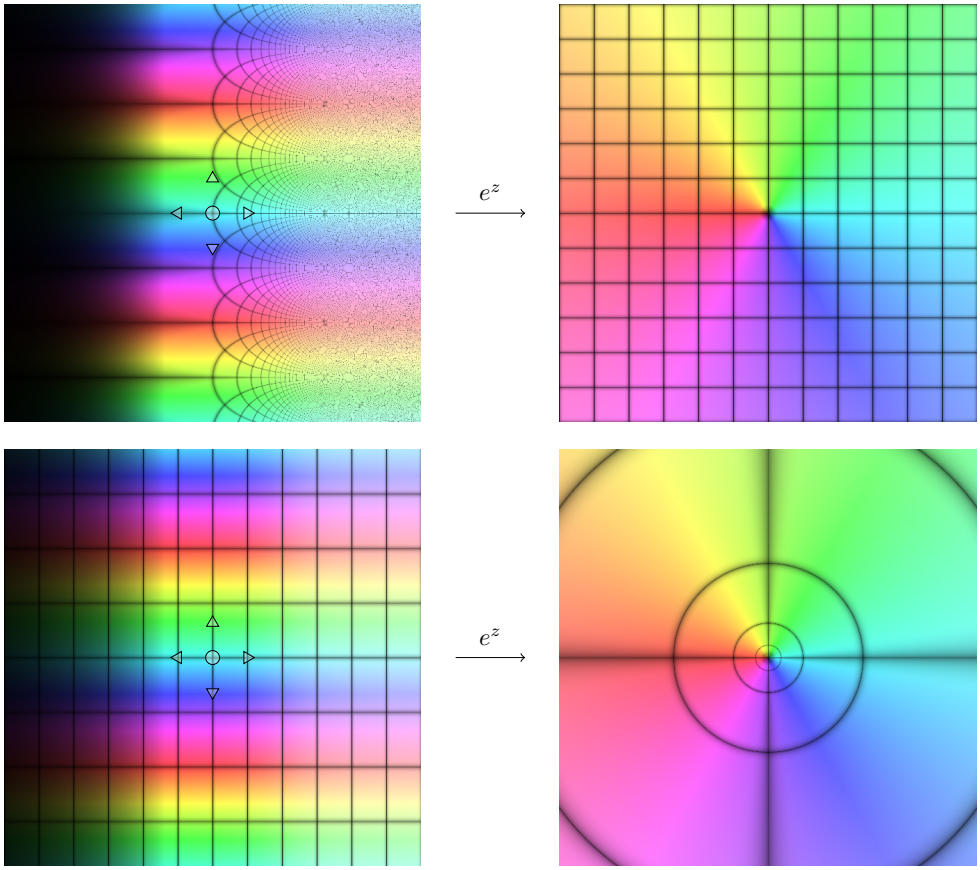


Figura 2.3.: Gràfic de colors de la funció exponencial en coordenades cartesianes i polars en $6\mathcal{Q}$, vegeu la figura 2.1. A la imatge superior esquerra, la graella correspon als punts d'imatge amb una coordenada entera (vegeu la figura superior dreta), és a dir que són corbes de nivell de les parts real i imaginària. A la imatge inferior esquerra, correspon als d'imatge en els eixos o bé en els cercles de radi e^k (corbes de nivell del mòdul i dels arguments múltiples de $\pi/2$). Es tracta doncs de la preimatge de les graelles representades a la figura 2.1 per la funció exponencial. Observem, per exemple, que cada rectangle petit de la figura inferior esquerra és enviat a un quadrant d'un anell centrat a l'origen que té per radis interior i exterior dues potències consecutives de e. En properes imatges obviarem la figura de la dreta.

Comentari 2.8 (Potències)**.** Les potències d'exponent natural són funcions n a 1, és a dir que cada imatge té n preimatges (llevat de l'origen). La funció z^3, per exemple, fa que els mòduls menors a u decreixin, els majors a u creixin i la imatge d'una circumferència centrada a l'origen dona tres voltes entorn de l'origen, vegeu la figura 2.4. •

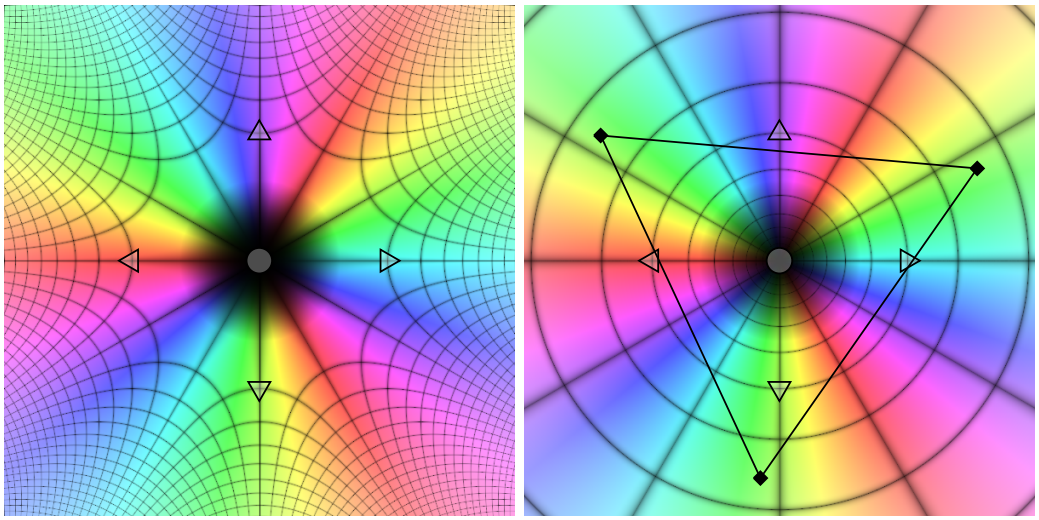


Figura 2.4.: Representem el polinomi z^3 en $2\mathcal{Q}$ en cartesianes i polars. Notem que si $w \neq 0$, aleshores té tres arrels cúbiques, que són els vèrtexs d'un triangle equilàter centrat a l'origen. A la imatge, arrels cúbiques de $w = 5e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

Exercicis

2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma* $u(x,y) + iv(x,y)$.

a) $f(z) = 1/z$, *b)* $g(z) = \dfrac{2z^2+3}{|z-1|}$, *c)* $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◁

2.1.2. *Trobeu el rang de*

a) $f(z) = z^2$ *si* z *està en el primer quadrant,*

b) $g(z) = 1/z$ *per* $0 < |z| \leqslant 1$,

c) $h(z) = -2z^3$ *per* z *tal que* $0 < |z| < 1$ *i* $\operatorname{Arg} z < \pi/2$. ◁

2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\dfrac{1}{z-2+3i}$, *c)* $\dfrac{3z-1}{z^2+z+4}$,

b) $\dfrac{iz^3+2z}{z^2+1}$, *d)* $z^2(2z^2-3z+1)^{-2}$. ◁

2.1.4. *Proveu que la inversió* $w = f(z) = 1/z$ *transforma*

a) el cercle $|z| = r$ *en el cercle* $|w| = 1/r$,

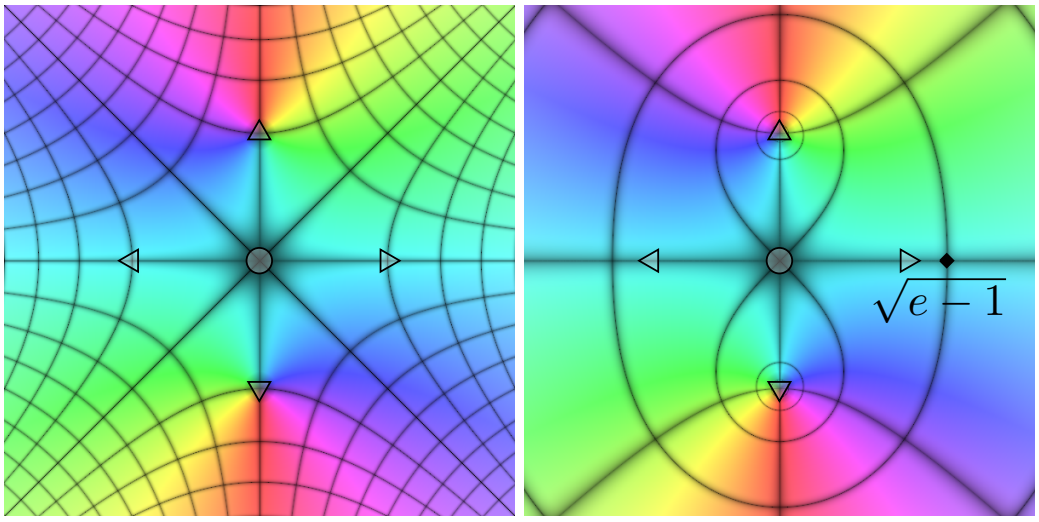


Figura 2.5.: Dibuixem la funció $f(z) = z^2 + 1$ en el mateix domini que abans (des de $-2 - 2i$ fins a $2 + 2i$). Notem que a $\pm i$, la funció val zero.

b) el raig $\operatorname{Arg} z = \theta_0, -\pi < \theta_0 < \pi$, *en el raig* $\operatorname{Arg} w = -\theta_0$,

c) el cercle $|z - 1| = 1$ *a la línia vertical* $x = 1/2$. ◁

2.1.5. *Trobeu una funció afí que transformi el cercle* $|z| < 1$ *en el cercle* $|w - w_0| < R$ *de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle* α *amb l'eix real.* ◁

2.1.6. *Per l'exponencial* $f(z) = e^z$*:*

a) Descriviu-ne el domini i el rang.

b) Proveu que $f(-z) = 1/f(z)$.

c) Descriviu la imatge de $\operatorname{Re} z = 1$.

d) Descriviu la imatge de $\operatorname{Im} z = \pi/4$.

e) Descriviu la imatge de la banda $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \pi/4$. ◁

2.1.7. *La funció de Jukovski*[3] *és* $w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$*, vegeu la figura 3.7. Proveu que*

a) $J(z) = J(1/z)$,

b) J porta el cercle unitat $|z| = 1$ *a l'interval real* $[-1, 1]$,

[3]Nikolai Jukovski, Orekhovo, 1847–1921, https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Jukovski

c) J porta el cercle $|z| = r$ $(r > 0, \neq 1)$ *a l'el·lipse* $\dfrac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$ *que té els focus a* ± 1. ◁

2.1.8. *Fent servir la comanda* `contour_plot` *de* `Sage` *dibuixeu les corbes de nivell de* u *i* v *si* $f = u + iv$ *és*

a) z,
b) z^2,
c) $\log(z)$,
d) $\sin(z)$,
e) $1/z$,
f) $1/z^2$,
g) e^z,
h) $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}$,
i) $\log(z-1) + \log(z+1)$. ◁

2.2. Funcions multivaluades

Ja hem vist que hi ha funcions com ara l'argument que prenen múltiples valors:

$$\arg(i) = \left\{\cdots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots\right\} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

També és el cas de les arrels n-èsimes:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z}{n}}\right\} = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k \in \{0, \cdots, n-1\}\right\}.$$

Definició 2.9. Donada una funció multivaluada en A, diem que una funció $f : B \to \mathbb{C}$ n'és una *branca contínua* en $B \subset A$ si $f(z)$ és una elecció d'entre les diferents opcions de manera que aquesta elecció sigui contínua en B.

Notació 2.10. Més endavant farem servir la notació *determinació* $\equiv$ branca contínua. •

Per exemple, si $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, aleshores la funció *argument principal* $\operatorname{Arg} z$ és una branca contínua de l'argument en A. Qualsevol altra branca de l'argument $f : A \to \mathbb{C}$ que escollim consistirà en fixar un $k \in \mathbb{Z}$ i tindrem $f(z) = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$.

En canvi, si prenem $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, aleshores l'argument principal no és una branca contínua, ja que tindrem una discontinuïtat al llarg de la semirecta $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

Exercicis

2.2.1. *Donada l'equació de Cardano* $z^3 + pz + q = 0$, *comprova que si* $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$, *aleshores* $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ *és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.*

Tot seguit obre GeoGebra[4] *i dibuixa els punts* $p = 1+i$ *i* $q = 2+0i$; *defineix* $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C *mitjançant la fórmula anterior, i* $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ *i* $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$.

[4] o entra a https://www.geogebra.org/m/jbszj89u

Escull tres colors diferents per z_j, i activa la seva traça. Deixant q fixat i movent p, per exemple, comprova que els tres punts són funció de p, i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que C presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres z_j vagin permutant la seva posició. Per exemple, pots fixar p en la circumferència de radi 4 amb la instrucció `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))` *i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Pots usar també la instrucció* `lloc geomètric`*. Quantes voltes cal que faci p a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua?* ◁

2.3. Logaritmes i arguments

Si $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$, sabem que $e^x = y$ si i només si $x = \ln y$. Volem estudiar aquesta equació en $\mathbb{C}$. Ja sabem que l'exponencial complexa és periòdica i per tant, no injectiva, doncs $e^{z+2k\pi i} = e^z$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$, vegeu la proposició 1.45.

Recordem que per a cada $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existeix un únic $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

que s'anomena argument principal, i es denota $\mathrm{Arg}\,(z)$. Aleshores

$$e^{\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,(z)} = e^{\ln|z|}e^{i\mathrm{Arg}\,(z)} = |z|\frac{z}{|z|} = z.$$

Definició 2.11. El *logaritme principal* de $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es defineix com

$$\mathrm{Log}\,(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,(z).$$

Per tant $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \{-\pi < \mathrm{Im}\, z \leqslant \pi\}$. En general, un *logaritme* de z és un nombre $w \in \mathbb{C}$ amb $e^w = z$. Escrivim $\log z$ per anomenar el conjunt de tots els logaritmes de z. •

Com hem vist a la proposició 1.45, el logaritme és doncs

$$w = \log z = \mathrm{Log}\, z + 2k\pi i = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z + 2k\pi i = \ln|z| + i\mathrm{arg}z; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

En particular, a diferència del que passa a $\mathbb{R}$, hi ha infinits logaritmes. Per distingir-los, escriurem "ln" pel logaritme neperià definit a la recta real, i "log" per la funció multivaluada del pla complex.

Exemples 2.12. 1. $\log 1 = \ln|1| + i0 + 2\pi ki = 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$

2. $\log(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$ ◊

Exemple 2.13. $\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\mathrm{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

Els altres logaritmes serien $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$. ◊

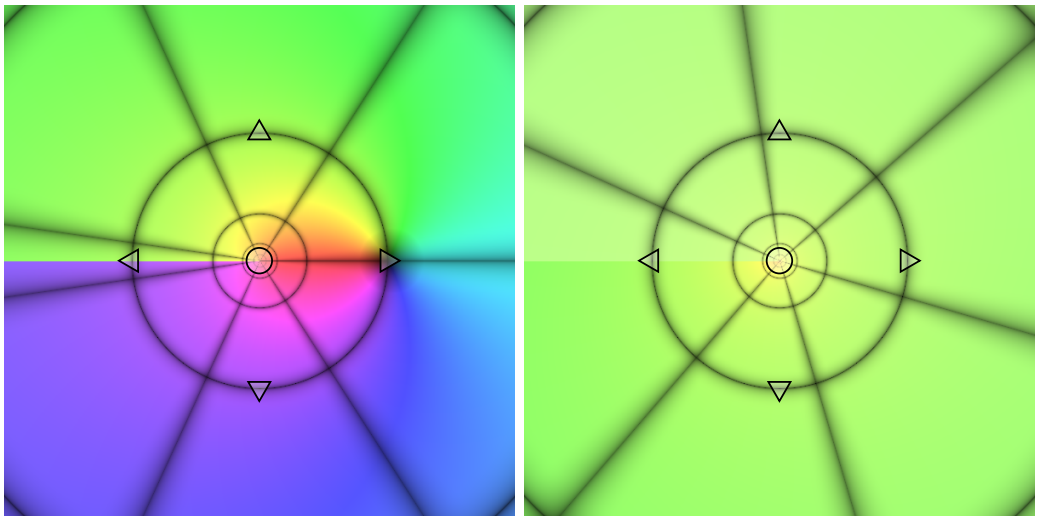


Figura 2.6.: A l'esquerra, la funció logaritme principal Log en el domini $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. A la dreta la branca $\log = \operatorname{Log} + 2\pi i$ en el mateix domini. Totes dues representacions amb la graella cartesiana de la imatge. Observem com les circumferències centrades a l'origen es transformen en rectes verticals. Veiem també com, en el logaritme principal, a l'arribar als reals negatius des del segon quadrant, trobem una discontinuïtat que es podria evitar prenent la determinació del logaritme representada a la dreta (pagant el preu de trobar la discontinuïtat més endavant).

Si fixem una branca de l'argument $\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}$, llavors $\mathcal{L}(z) := \ln|z| + i\mathcal{A}(z)$ també ens dona una branca del logaritme $\mathcal{L} : \Omega \to \mathbb{C}$. Com que l'argument principal $\operatorname{Arg} z$ és continu en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, deduïm que $\operatorname{Log} z$ és contínua en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. De fet, tenim el següent resultat:

Proposició 2.14. *Existeix una branca contínua de l'argument de z en $\mathbb{C}\backslash r$, on r és qualsevol semirecta de $\mathbb{C}$ amb extrem en el 0.*

Per tant, també hi ha una branca contínua del logaritme de z en $\mathbb{C}\backslash r$.

Demostració. Posem

$$r = \{Re^{i\theta} : 0 \leqslant R < \infty\}.$$

Escollim $\mathcal{A}z$ la branca de l'argument de z que pren valors en $(\theta, \theta + 2\pi)$, i vegem que és contínua. Siguin $z_n, z_0 \in \mathbb{C}\backslash r$ amb $z_n \to z_0$. Volem veure que $\mathcal{A}z_n \to \mathcal{A}z_0$. Suposem el contrari. Llavors, substituint, si és necessari la successió (z_n) per una parcial, podem suposar que existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $n \geqslant 0$, $|\mathcal{A}z_n - \mathcal{A}z_0| > \varepsilon$. Donat que la funció $\mathcal{A}z$ pren valors en un interval fitat, aplicant el teorema de Bolzano-Weierstrass[5], podem trobar una parcial convergent. És a dir, hi ha z_{n_k} amb

$$\mathcal{A}z_{n_k} \to \alpha \neq \mathcal{A}z_0; \qquad \alpha \in [\theta, \theta + 2\pi].$$

[5]Karl Weierstrass, Ostenfelde, 1815–1897, https://ca.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

($\alpha \neq \mathcal{A}z_0$, doncs per a tot $n \geqslant 0$, $|\mathcal{A}z_n - \mathcal{A}z_0| > \varepsilon$).

Com que l'exponencial és contínua, $e^{i\mathcal{A}z_{n_k}} \to e^{i\alpha}$, però també

$$e^{i\mathcal{A}z_{n_k}} = \frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|} \to \frac{z_0}{|z_0|} = e^{i\mathcal{A}z_0}.$$

Per tant

$$e^{i\alpha} = e^{i\mathcal{A}z_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha - \mathcal{A}z_0 = 2k\pi$$

per algun $k \in \mathbb{Z}$, i això és absurd (l'única possibilitat és $k = 0$ i estem suposant que $\alpha \neq \mathcal{A}z_0$). □

Proposició 2.15. *No hi ha cap branca contínua de l'argument de z en $\partial\mathbb{D}$.*

Demostració. Suposem que n'hi ha una de contínua, diem-li $\mathcal{A}(z)$. Com que $|z| = 1$, tenim que si $z = e^{i\theta}$,

$$e^{i\mathcal{A}(z)} = \frac{z}{|z|} = z = e^{i\theta} \Rightarrow \exists k_\theta \in \mathbb{Z} \,:\, \mathcal{A}(e^{i\theta}) = \theta + 2k_\theta\pi.$$

Aleshores $k_\theta = (\mathcal{A}(e^{i\theta}) - \theta)/2\pi$ és una funció contínua que pren valors enters, i per tant és constant. És a dir, $k_\theta = k$. Llavors

$$0 + 2k\pi = \mathcal{A}(e^{i0}) = \mathcal{A}(1) = \mathcal{A}(e^{i2\pi}) = 2\pi + 2k\pi,$$

fet absurd. □

Observació 2.16 (Propietats del logaritme)**.** (i) Si $\mathcal{L}$ és una branca contínua del logaritme en Ω, aleshores $e^{\mathcal{L}z} = z$ per $z \in \Omega$. Ara bé, $\mathcal{L}(e^z) = z$ no és cert en general, donat que per a $k \in \mathbb{Z}$, $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Diem doncs que $\mathcal{L}$ és una *inversa per la dreta* de l'exponencial en Ω. Podem dir el mateix de les branques contínues d'arguments i arrels.

(ii) Per $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, com a conjunts de números, tenim que

$$\log(z_1\, z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Ara bé, fixada una branca $\mathcal{L}(z)$ del logaritme de z, pot passar que $\mathcal{L}(z_1 z_2) \neq \mathcal{L}(z_1) + \mathcal{L}(z_2)$ ja que la suma de dos arguments potser no pertany a la mateixa branca. •

Exemple 2.17. Considerem els punts $-1 - i$, $1 - i$. Llavors

$$\mathrm{Log}\,((-1-i)(1-i)) = \mathrm{Log}(-2) = \ln 2 + i\mathrm{Arg}(-2) = \ln 2 + \pi i.$$

Per altra banda,

$$\mathrm{Log}\,(-1-i) + \mathrm{Log}\,(1-i) = (\ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i) + (\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i) = \ln 2 - \pi i. \qquad \Diamond$$

Exercicis

2.3.1. *Doneu exemples que mostrin la falsedat de la igualtat* $\operatorname{Log}(a \cdot b) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$. *(Per exemple,* $a = b = -1 - i$*).* ◁

2.3.2. *Sigui* $\mathcal{L}$ *una determinació del logaritme en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$*. Proveu que la funció* $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ *és contínua en*

$$D := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$*?* ◁

2.3.3. *Una branca de l'argument* $\mathcal{A}(z)$ *(o del logaritme* $\mathcal{L}(z)$*) queda fixada si donem i) el domini* Ω *on està definida ii) el valor de* $\mathcal{A}(z)$ *(o de* $\mathcal{L}(z)$*) d'un punt d'*Ω*. Conside reu els dominis:*

$$\Omega_1 = \mathbb{C}\backslash\left\{re^{i\pi},\ r \geqslant 0\right\}; \qquad \Omega_2 = \mathbb{C}\backslash\left\{re^{i\pi/4},\ r \geqslant 0\right\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C}\backslash\left(\{x \in [-1,0]\} \cup \{-1+iy,\ y \in [0,1.5]\} \cup \{x+1.5i,\ x \in [-1,\infty)\}\right).$$

Completeu la següent taula.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$ $\mathcal{L}(2i) =$

◁

2.3.4. *Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:*

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\ z > 0\}$, *b)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\ z > \operatorname{Im}\ z\}$, *c)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. ◁

2.3.5. *Calculeu els possibles valors de*

a) $\log(1)$, *b)* $\log(-1)$, *c)* $\log(1+i)$, *d)* $\log(1-i\sqrt{3})$, *e)* $\log(i)$. ◁

2.3.6. *Escrivim* $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ $i \sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$*. Resoleu les equacions*

a) $e^z = 2i$,

b) $\operatorname{Log}(z^2-1) = i\pi/2$,

c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$,

d) $\cos z = 2i$,

e) $\cos z = \sin z$.

2.4. Potències complexes

Definició 2.18 (Potències complexes)**.** Sigui $z \in \mathbb{C}$ amb $z \neq 0$ i $a \in \mathbb{C}$. Sabem que $z = e^{\mathcal{L}z}$ per a qualsevol branca del logaritme $\mathcal{L}$ i per tant, per a $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = (e^{\mathcal{L}z})^n = e^{n\mathcal{L}z}$.

Llavors definim

$$z^a := e^{a \log z} = e^{a(\ln|z| + i \arg z)} = e^{a(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)}.$$ •

Advertència 2.19. L'anterior definició és un abús de notació en tota regla, i no l'aplicarem mai quan a la base escrivim el nombre e: sempre parlem de

$$e^a = e^{\operatorname{Re} a} e^{i \operatorname{Im} a}$$

i no de

$$e^a \neq e^{a \log e} = e^{a(1+2k\pi i)},$$

la desigualtat sent certa sempre que $a \notin \mathbb{Z}$. Notem que aquesta definició seria, en el fons, circular! •

A priori, la potència z^a pren infinits valors com $\arg z$. Per exemple, donat que $\log i = \log 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$,

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}; \qquad k \in \mathbb{Z},$$

que pren infinits valors reals.

Hi ha casos en què pren un nombre finit de valors, com $i^{1/4}$ que pren 4 valors.

Observació 2.20. De fet es pot comprovar que si $z, a \in \mathbb{C}$ i $z \neq 0$,

- Si $a \in \mathbb{Q}$ aleshores $z^a = e^{a\operatorname{Log} z} e^{2k\pi i a}$ pren un nombre finit de valors.
- El valor és únic si i només si $a \in \mathbb{Z}$ (és a dir, no depèn de la branca del logaritme escollit). En aquest cas tenim una potència natural de z o de z^{-1}.
- Si $a = p/q \in \mathbb{Q}$, amb $q > 0$ i $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, aleshores $z^{p/q}$ pren exactament q valors.
- Si a no és racional, z^a té infinits valors que difereixen en un factor $e^{2\pi i k a}$. •

Observació 2.21. Comparem $z^a z^b$ amb z^{a+b}.

- $z^a z^b = e^{(a+b)\operatorname{Log} z + 2\pi i(ka+jb)}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$,
- $z^{a+b} = e^{(a+b)\operatorname{Log} z + 2\pi i m(a+b)}$, on $m \in \mathbb{Z}$.

Per tant, com a conjunts, $z^{a+b} \subset z^a z^b$, amb igualtat quan $a \in \mathbb{Z}$ o $b \in \mathbb{Z}$.

Anàlogament

- $(z^a)^b = e^{ab\mathrm{Log}\, z + 2\pi i(ka+j)b}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$,
- $z^{ab} = e^{ab\mathrm{Log}\, z + 2\pi i mab}$, on $m \in \mathbb{Z}$,

i tenim que $z^{ab} \subset (z^a)^b$, amb igualtat quan $b \in \mathbb{Z}$.

En canvi, sí que és cert que

$$(ab)^c = e^{c\log(ab)} = e^{c(\log a + \log b)} = a^c b^c.$$

•

Exercicis

2.4.1. *Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli:* $(-z)^2 = z^2$*, llavors* $2\log(-z) = 2\log z$*. Per tant,* $\log(-z) = \log(z)$. ◁

2.4.2. *Calculeu els possibles valors de*

a) i^i, *b)* $(\sqrt{3}+i)^{1-i}$, *c)* 2^{-i}, *d)* $(i^2)^i$, *e)* $(i^i)^2$. ◁

2.4.3. *Determinar explícitament la inversa de* $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ *en funció de logaritmes. Resoldre* $q(z) = 3$*, trobant totes les solucions.*

2.4.4. *Siguin* $h_0(z), h_1(z)$ *i* $h_2(z)$ *les determinacions de l'arrel cúbica en* $\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $h_0(1) = 1$*,* $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ *i* $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$*.*

i) Descriviu $h_j(\Omega)$ *per* $j = 0, 1, 2$*.*

ii) Per $j = 0, 1, 2$ *relacioneu* h_j *amb* Log *i* Arg *(on* Log *i* Arg *denoten les branques principals del logaritme i de l'argument respectivament).*

iii) Usant les relacions anterior, trobeu el valor de $h_j(i)$*, per* $j = 0, 1, 2$. ◁

2.5. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

Recordem que $\mathcal{L}$ és una branca o determinació del logaritme de z en Ω si $\mathcal{L}$ és contínua en Ω i

$$e^{\mathcal{L}(z)} = z \qquad \forall z \in \Omega.$$

Definició 2.22. Sigui X espai mètric (normalment $X = \Omega \subset \mathbb{C}$ obert o $X = [a, b]$ un interval). Sigui $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ contínua. Una *determinació del logaritme* de f en X és una funció $\mathcal{L}_f : X \to \mathbb{C}$ contínua tal que

$$e^{\mathcal{L}_f(x)} = f(x) \qquad \forall x \in X.$$

•

Com sempre, està relacionat amb l'argument.

Definició 2.23. Diem que $\mathcal{A}_f$ és una determinació de l'argument de f en X si $\mathcal{A}_f$ és contínua en X i

$$f(x) = |f(x)|\, e^{i\mathcal{A}_f(x)} \qquad \forall x \in X. \qquad \bullet$$

Observació 2.24. Si tenim una determinació $\mathcal{A}_f$ de l'argument de f, llavors també tenim una determinació del logaritme de f definint

$$\mathcal{L}_f(x) := \ln|f(x)| + i\mathcal{A}_f(x).$$

També, si $\mathcal{L}_f$ és una determinació del logaritme de f, llavors $\operatorname{Im}\mathcal{L}_f$ és una determinació de l'argument de f. Resumint, hi ha determinació del logaritme si i només si, hi ha determinació de l'argument. $\bullet$

Exemple 2.25. Si $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ i $f(z) = z$, llavors no existeix cap determinació de $\log f(z) = \log z$ en X. (Vàrem veure que no hi ha cap argument continu en $\partial\mathbb{D}$). $\lozenge$

Exemple 2.26. Si $X = [0,1]$ i $f(x) = e^{4\pi i x}$, llavors $\mathcal{L}_f(x) = 4\pi i x$ és una determinació de $\log f$ en X (altres serien $i(4\pi x + 2k\pi)$). $\lozenge$

Definició 2.27. Diem que $\mathcal{S}_f$ és una determinació de l'arrel n-èssima de f en X, $\sqrt[n]{f}$, si $\mathcal{S}_f$ és contínua en X i

$$\mathcal{S}_f(x)^n = f(x) \qquad \forall x \in X. \qquad \bullet$$

Observació 2.28. (i) Si hi ha una determinació $\mathcal{L}_f$ del logaritme de f, aleshores hi ha determinació de $\sqrt[n]{f}$.

Simplement definim $\mathcal{S}_f(x) = e^{\frac{1}{n}\mathcal{L}_f(x)}$.

(ii) Pot existir una determinació de l'arrel n-èssima $\sqrt[n]{f}$, encara que no n'hi hagi cap del logaritme.

Per exemple, sigui $f(z) = z^n$ per $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} =: \Omega$. La funció $\mathcal{S}_f(z) = z$ és una determinació de $\sqrt[n]{f}$ en Ω (doncs $\mathcal{S}_f(z)^n = f(z)$). Però la funció f no té determinació del logaritme en Ω.

Efectivament, suposem que existeix una determinació del logaritme de f, que anomenem $\mathcal{L}_f$ i arribarem a una contradicció: definim $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Llavors $h_0(t) = 2\pi i n t$ i $h_1(t) = \mathcal{L}_f(\varphi(t))$ són determinacions del logaritme de la funció φ^n en $[0,1]$. En efecte,

$$e^{h_1(t)} = e^{\mathcal{L}_f(\varphi(t))} = e^{\mathcal{L}_f(e^{2\pi i t})} = f(e^{2\pi i t}) = (e^{2\pi i t})^n = (\varphi(t))^n,$$

i, per altra banda,

$$e^{h_0(t)} = e^{2\pi i n t} = \varphi(t)^n.$$

Per tant, per a tot $t \in [0,1]$, $e^{h_0(t)} = e^{h_1(t)}$, amb el que existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h_1 = h_0 + 2k\pi i$, vegeu la proposició 2.30.

A més a més, com que $\varphi(0) = e^{2\pi i 0} = e^{2\pi i} = \varphi(1)$, es compleix que

$$h_1(0) = \mathcal{L}_f(\varphi(0)) = \mathcal{L}_f(\varphi(1)) = h_1(1).$$

Però,

$$0 = h_1(0) - h_1(1) = h_0(0) + 2\pi ik - (h_0(1) + 2\pi ik) = 2\pi in \cdot 0 - 2\pi in \cdot 1 \neq 0!!$$

(iii) Si existeix una determinació $\mathcal{L}$ del logaritme de z en la imatge $f(\Omega)$, aleshores hi ha determinació del logaritme de f en Ω.

Simplement, definim $\mathcal{L}_f(z) = \mathcal{L}(f(z))$.

Ara bé, el reciproc no és cert. Pot existir determinació del logaritme de f en Ω, encara que no hi hagi cap logaritme continu de z en $f(\Omega)$. N'hi ha prou amb prendre $f(z) = e^z$, $\mathcal{L}_f(z) = z$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(\Omega) = \mathbb{C}^*$, vegeu l'exemple 2.29. •

Exemple 2.29. Sigui $\gamma : [a,b] \to \partial\mathbb{D}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme de γ, $\mathcal{L}_\gamma$, complint que $\mathcal{L}_\gamma(a) = w_0$. Es demostra a la proposició 5.1. En canvi, no hi ha determinació del logaritme de $\partial\mathbb{D}$, vegeu la proposició 2.15. ◊

Proposició 2.30. *Sigui X espai mètric **connex**, i $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ contínua. Si $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són dues determinacions del logaritme de f en X, llavors*

$$\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{L}_2(x) + 2\pi ki; \qquad x \in X$$

per un cert $k \in \mathbb{Z}$.

Demostració. Per $x \in X$, tenim que

$$e^{\mathcal{L}_1(x)} = f(x) = e^{\mathcal{L}_2(x)} \quad \Rightarrow \quad \exists k_x \in \mathbb{Z} : \mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x) = 2k_x\pi\, i.$$

Com que $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són contínues en X, aleshores la funció $k : X \to \mathbb{Z}$ definida per

$$k(x) := k_x = \frac{\mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x)}{2\pi i}$$

és contínua en X. Com X és connex, llavors $k(X)$ és un connex de $\mathbb{Z}$, i per tant és un punt, amb el que $k(x) = k$ per a tot $x \in X$. □

Exercicis

2.5.1. *Sigui X un espai topològic connex. Demostreu que si $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ són dues determinacions de l'arrel n-èsima de $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ llavors existeix una arrel n-èsima de la unitat ζ tal que $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, per a tot $x \in X$.* ◁

2.5.2. *Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions e^{z^2}, $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z-1)$, de la branca principal de $\sqrt{1-z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1+e^z}$.* ◁

2.5.3. *Donar una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.*

a) $f_1(z) = (z^2-1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2+4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C}\backslash\{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4-1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3-1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. ◁

2.6. Sèries de potències de nombres complexos

Una *sèrie de potències* de nombres complexos és una expressió de la forma

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n,$$

on $\{a_n\}$ és una successió de nombres complexos i $b \in \mathbb{C}$.

Per tal d'estudiar sèries de potències de nombres complexos, primer ens cal recordar diversos conceptes i resultats.

Definició 2.31 (Convergència uniforme)**.** Diem que $f_n \to f$ uniformement en A si

$$\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0.$$

Dit d'una altra manera, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n > n_\varepsilon$ i tot $z \in A$ es té $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. També, una sèrie de funcions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergeix uniformement en A si la successió $\sum_{k=0}^{n} f_k$ convergeix uniformement en A. •

Observació 2.32. Recordem que una successió $\{f_n\}$ és uniformement convergent si i només si és uniformement de Cauchy, i el mateix passa per una sèrie $\sum g_k$. És a dir, que per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $m \geqslant n \geqslant n_0$ tenim que

$$\sup_{z\in A} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon, \quad \text{i} \quad \sup_{z\in A} \left| \sum_{k=n}^{m} g_k(z) \right| < \varepsilon \text{ respectivament.}$$ •

Teorema 2.33 (Criteri M de Weierstrass)**.** *Si tenim una sèrie de funcions $\sum_n f_n$, on $f_n : A \to \mathbb{C}$, de manera que $|f_n(z)| \leqslant M_n$ per a tot $z \in A$, amb $\sum_n M_n < \infty$, aleshores la sèrie $\sum_n f_n$ convergeix absolutament i uniforme en A.*

Demostració. És una aplicació immediata de l'observació 2.32. □

Teorema 2.34 (Cauchy-Hadamard[6]). *Sigui $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n$ sèrie de potències de nombres complexos. Llavors existeix un únic $R \in [0,+\infty]$ de manera que*

(a) La sèrie convergeix absolutament per a tot $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| < R$.

(b) Per $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| > R$, la sèrie és divergent.

(c) Si $0 \leqslant r < R$, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en $|z-b| \leqslant r$.

A més, es té

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

R s'anomena radi de convergència *de la sèrie de potències.*

Observació 2.35. Cal entendre bé el significat de convergència uniforme en el teorema anterior. Dir que per tot $r < R$ hi ha convergència uniforme en $\overline{D_r(b)}$ no significa que hi hagi convergència uniforme en el *disc de convergència* $D_R(b)$. El que significa és que per tot $\varepsilon > 0$ i tot $r > 0$ existeix $n_{\varepsilon,r}$ tal que per tot $n > n_{\varepsilon,r}$ i tot $z \in D_r(b)$ es té $|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k(z-b)^k| \leqslant \varepsilon$. Pot passar que $n_{\varepsilon,r} \xrightarrow{r\to R} \infty$, de manera que no podem esperar convergència uniforme en tot el disc de convergència.

Dit d'una altra manera, la velocitat de convergència sol empitjorar a mesura que ens apropem a la vora del disc $D_R(b)$. Un exemple paradigmàtic d'aquest comportament és la funció $f_n(x) = x^n$, que convergeix a zero a l'interval $[0,1)$ de manera uniforme en $[0,r]$ per $r < 1$, tot i que $\sup_{0\leqslant x<1} |f_n(x) - 0| = 1$. •

Abans de demostrar el teorema, vegem alguns exemples.

Exemples 2.36. 1. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ és $R = 1$.

Aquí aprofitem per recordar que, si $0 < r < 1$, llavors $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. De la mateixa manera, també tenim que

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

Aquesta identitat és molt útil per calcular el valor de la suma d'algunes sèries de potències.

2. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n.$$

Tenim

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1/2$, amb el que la sèrie convergeix si $|z| < 1/2$ i és divergent si $|z| > 1/2$.

[6] Jacques Hadamard, Versalles, 1865–1963, https://ca.wikipedia.org/wiki/Jacques_Hadamard

3. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geqslant 1} n^n z^n$ és $R = 0$. $\Diamond$

Prova del Teorema. Clarament (c) implica (a), amb el que només ens cal demostrar (c) i (b).

(c) Si $R = 0$ no hi ha res a demostrar. En cas contrari, prenem ρ amb $|z-b| \leqslant r < \rho < R$. Llavors

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_k \sup_{n\geqslant k} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Per tant, existeix un $k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}, \qquad n \geqslant k.$$

Per veure la convergència uniforme en $|z-b| \leqslant r$, aplicarem el criteri M de Weierstrass. Tenim que

$$\left|a_n(z-b)^n\right| \leqslant \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \qquad |z-b| \leqslant r; \quad n \geqslant k.$$

Com que $r/\rho < 1$, la sèrie $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ és convergent, amb el que pel criteri M de Weierstrass, la nostra sèrie de potències convergeix absolutament i uniforme en $|z-b| \leqslant r$.

(b) Sigui $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| > R$. Prenem $\rho > R$ amb $|z-b| > \rho$. Tenim que

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

De la definició de límit superior, veiem que hi ha infinits n_k de manera que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1/\rho$. Aleshores

$$\left|a_{n_k}(z-b)^{n_k}\right| > \frac{|z-b|^{n_k}}{\rho^{n_k}} > 1,$$

amb el que la sèrie és divergent ja que el terme general no tendeix a zero. $\square$

Com veiem, el càlcul del radi de convergència R ens determina tota la regió de convergència de la sèrie (un disc obert de radi R, d'aquí que R s'anomeni radi de convergència), excepte els punts z amb $|z-b| = R$, és a dir, els punts de la frontera del disc de convergència. Per aquests punts, la sèrie tant pot ser convergent com divergent, i s'ha d'estudiar apart (ho farem més endavant).

Exercicis

2.6.1. *Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.*

a) $S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament

b) $S(z)$ pot ser convergent en $z = 1+i$ i en $z = 2+i$ simultàniament

c) Si $S(z)$ és convergent en $z = 1+i$, aleshores també ho és en $z = 2i$

d) Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2 + i$. ◁

2.6.2. *Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D_R(0)$. Demostreu que*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \qquad si \quad 0 < r < R.$$ ◁

2.6.3. *Sigui $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2. En cas afirmatiu, tenim que $S_1(z) = zS_2(z)$.*

2.7. Càlcul del radi de convergència

Pel criteri del quocient, observació 1.26, podem obtenir una altra manera de calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències, que en alguns casos pot ser més convenient que aplicar el criteri de l'arrel.

Lema 2.37 (Criteri del quocient)**.** *Podem calcular el radi de convergència de la sèrie de potències*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (z-b)^n$$

amb la fórmula

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

sempre que aquest límit existeixi.

Exemples 2.38. Calculem el radi de convergència R de les següents sèries de potències:

(1) $\sum_{n\geqslant 1} nz^n$. Apliquem el criteri del quocient. Tenim que

$$R = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

(2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Aplicant el criteri del quocient, tenim que

$$R = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/(n+2)!} = \lim_n \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim_n (n+2) = +\infty.$$

El criteri del quocient sol ser més simple per fer els càlculs, especialment quan apareixen factorials. ◊

Advertència 2.39. El fet que existeixi el límit superior

$$\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

no implica que aquest coincideixi amb $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, vegeu l'Observació 1.26. •

Exemple 2.40. Per tant, per calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 1} n2^n z^{2n}$$

no podem aplicar directament el criteri del quocient. Per tal de calcular R en aquest cas, ho podem fer:
(i) Aplicant la definició de R amb la fórmula $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. En el nostre cas, tenim que $a_{2n} = n2^n$ i a_n val zero si n és senar. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim \sqrt[2n]{n2^n} = \sqrt{2} \lim \sqrt[2n]{n} = \sqrt{2},$$

amb el que $R = 1/\sqrt{2}$.

(ii) Fent el *canvi de variables* $w = z^2$ obtenim la sèrie de potències $\sum_{n\geqslant 1} n2^n w^n$. Apliquem el criteri del quocient per calcular el radi de convergència R' d'aquesta nova sèrie:

$$R' = \lim_n \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = 1/2.$$

Aleshores la sèrie és convergent si $|w| < 1/2$ i divergent si $|w| > 1/2$. És a dir, la nostra sèrie inicial és convergent si $|z^2| < 1/2 \Leftrightarrow |z| < 1/\sqrt{2}$, i és divergent si $|z^2| > 1/2 \Leftrightarrow |z| > 1/\sqrt{2}$. Així també obtenim que $R = 1/\sqrt{2}$. ◊

Exemple 2.41. Calculem el radi de convergència R de la sèrie de potències lacunar[7]

$$\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} z^{2^n}.$$

Aquí no tenim cap canvi de variable que ens permeti aplicar el criteri del quocient. Aleshores hem de fer servir la definició

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ara observem que a_n sempre val zero excepte quan $n = 2^k$, que tenim que $a_{2^k} = 2^{-k}$. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[2^k]{|a_{2^k}|} = \lim_k \sqrt[2^k]{2^{-k}} = \lim_k 2^{-\frac{k}{2^k}} = 2^0 = 1,$$

amb el que $R = 1$. ◊

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Lacunary_function

Fins ara, només hem vist exemples de càlcul quan els coeficients són reals. No hi ha diferència si els coeficients són complexos, ja que sempre estem treballant amb el mòdul dels coeficients.

Exemple 2.42. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i}\, z^n.$$

En aquest cas, tenim que $a_n = \frac{1}{n+i}$, amb el que $|a_n| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Per tant

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 1. \qquad \Diamond$$

Exemple 2.43. Per veure un altre exemple, calcularem el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i}\Big)\, z^n.$$

En aquest cas, tenim que

$$a_n = \Big(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i}\Big) = \Big(\frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\, i\Big)$$

ja que

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Llavors

$$|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n},$$

amb el que

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \cdot \frac{(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = 1. \qquad \Diamond$$

Exercicis

2.7.1. *Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n;\ \ \alpha \in \mathbb{R},$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n^n} z^n,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n},$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}(z-1)^n,$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}(z+1)^n \ a \in (0,1)$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}(z-2)^{n(n+1)}$,

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3z-2)^n$,

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^{2^n}$. ◁

2.8. Comportament a la frontera del disc de convergència

Quan estudiem la convergència d'una sèrie de potències de nombres complexos

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n,$$

amb radi de convergència R, sabem que la sèrie convergeix per $|z-b|<R$, i que la sèrie és divergent quan $|z-b|>R$. Què passa pels punts z amb $|z-b|=R$? Llavors pot convergir o no. Per exemple, la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$$

té radi de convergència $R=1$. Per $z=1$, la sèrie és divergent, i per $z=-1$ la sèrie és alternada i, per tant, convergent (aquí quedaria estudiar els altres punts del cercle $|z|=1$).

En la frontera del disc de convergència, tenim que $z-b=Re^{it}$, així que la sèrie a estudiar queda

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n e^{int}.$$

Per tal d'estudiar la convergència per t fixat, el primer que hem de fer és mirar si el terme general tendeix a zero o no. És a dir, mirem si

$$\left|a_n R^n e^{int}\right| \to 0 \qquad \text{quan} \quad n\to\infty.$$

En cas que no tendeixi a zero, llavors ja sabem que la sèrie és divergent. En cas que tendeixi a zero, ens cal estudiar-ho millor.

Si no hem tret cap conclusió del primer pas, el següent pas natural sol ser comprovar si la sèrie decreix prou ràpidament, de manera que tinguem convergència absoluta a la frontera, és a dir si

$$\sum |a_n R^n| < +\infty.$$

Aleshores pel criteri M de Weierstrass la sèrie convergeix uniformement i absoluta en el disc tancat $\overline{D_R(b)}$.

Si no es compleix cap de les dues situacions anteriors, és a dir, si la sèrie no convergeix absolutament en cap punt de la frontera del disc de convergència però no podem garantir la divergència arreu, aleshores ens caldrà filar més prim.

Lema 2.44 (Fórmula de sumació per parts)**.** *Siguin $\{a_n\}, \{b_n\}$ successions de nombres complexos, i posem $A_n = a_0 + \cdots + a_n$. Llavors*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Demostració. Posant $A_{-1} = 0$, tenim que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

□

Com a cas particular, estudiem les cues $\sum_{j=n}^{m} a_k b_k$ amb $m > n$. En tal cas podem definir $\widetilde{a}_k = a_{n+k}$, $\widetilde{b}_k = b_{n+k}$ i $\widetilde{A}_k = \sum_{j=0}^{k} \widetilde{a}_j = \sum_{j=n}^{n+k} a_j$. Aplicant la fórmula de sumació per parts, tenim que

$$\sum_{k=0}^{m-n} \widetilde{a}_k \widetilde{b}_k = \widetilde{A}_{m-n} \widetilde{b}_{m-n+1} - \sum_{k=0}^{m-n} \widetilde{A}_k (\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k).$$

Deduïm doncs la següent identitat:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_{n,m} b_{m+1} + \sum_{k=n}^{m} A_{n,k} (b_k - b_{k+1}), \tag{2.1}$$

on ara $A_{n,k} = \sum_{j=n}^{k} a_j$.

Per altra banda, notem que per tota constant $A \in \mathbb{C}$ tenim que

$$A b_{m+1} - A b_n + \sum_{k=n}^{m} A (b_k - b_{k+1}) = 0.$$

Com que $A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j = A_{n,k} + A_{n-1}$ (per tot $k \geqslant n$), prenent $A = A_{n-1}$, de (2.1) en deduïm que

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_{m+1} - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m} A_k (b_k - b_{k+1}). \tag{2.2}$$

Teorema 2.45 (Criteri de Dirichlet-Abel uniforme)**.** *Siguin X, Y dos conjunts. Siguin $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, una successió de funcions $a_n : X \to \mathbb{C}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ una successió de funcions $b_n : Y \to \mathbb{R}$. Suposeu que es verifica alguna de les següents dues condicions:*

1. *(criteri de Dirichlet) Existeix $M > 0$ pel qual*

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \right| \leqslant M,$$

per a tot $x \in X$ i $N \geqslant 1$.
La successió $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ és no negativa i decreix cap a 0 uniformement en Y (i.e. $b_{n+1}(y) \leqslant b_n(y)$ per a tot $n > 0$ i per a tot $y \in Y$, i $b_n(y) \to 0$ uniformement en Y).

2. *(criteri d'Abel) La sèrie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *convergeix uniformement en* X.
   La successió (b_n) *és una successió monòtona de funcions reals fitada uniformement en* Y.

Aleshores, la sèrie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(y)$ *convergeix uniformement en* $X \times Y$.

Demostració. Demostrem el criteri de Dirichlet. Posem $S_{n,m}(x,y) = \sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(y)$, i sigui $\varepsilon > 0$. Pel criteri de Cauchy uniforme (vegeu l'observació 2.32), ens cal veure que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,

$$\big|S_{n,m}(x,y)\big| < \varepsilon, \qquad m > n \geqslant n_0.$$

Per la versió (2.2) de la fórmula de sumació per parts (amb $a_0 = 0$), tenim que

$$\begin{aligned}\big|S_{n,m}(x,y)\big| &= \Big|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(y)\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=n}^{m} A_k(x)(b_k(y) - b_{k+1}(y)) + A_m(x)b_{m+1}(y) - A_{n-1}(x)b_n(y)\Big|,\end{aligned}$$

on $A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j(x)$, que per hipòtesi estan uniformement fitades per M.

Com que $b_n \to 0$ uniformement en Y, podem trobar $n_0 \in \mathbb{N}$, de manera que $2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon$ per a tot $y \in Y$. Siguin $m \geqslant n \geqslant n_0$. Donat que també es compleix que la successió $\{b_k(x)\}$ és decreixent, i no-negativa, obtenim que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,

$$\begin{aligned}\big|S_{n,m}(x,y)\big| &\leqslant M\sum_{k=n}^{m} |b_k(y) - b_{k+1}(y)| + M(|b_{m+1}(y)| + |b_n(y)|) \\ &= M\left(\sum_{k=n}^{m}(b_k(y) - b_{k+1}(y)) \quad + \quad (b_{m+1}(y) + b_n(y))\right) = 2Mb_n(y) \\ &\leqslant 2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon.\end{aligned}$$

De manera similar es pot demostrar el criteri d'Abel, usant la fórmula de sumació per parts (2.1). □

Com a conseqüència del criteri d'Abel, tenim el següent resultat que no demostrarem

Teorema 2.46 (Teorema d'Abel)**.** *Si la sèrie de potències* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ *convergeix uniformement en un conjunt* $A \subset \mathbb{C}$*, llavors també convergeix uniformement en el con*

$$C(A,b) = b + \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} t(A-b).$$

En particular, si la sèrie convergeix en z_0 *amb* $|z_0 - b| = R$*, llavors*

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n \geqslant 0} a_n r^n (z_0 - b)^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z_0 - b)^n.$$

Demostració. Vegeu l'exercici 2.8.2 □

Exemple 2.47. Considerem la sèrie de potències $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Mètode 1: El radi de convergència és $R = 1$. Veiem com és comporta en $|z| = 1$. Clarament, la sèrie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ és convergent pel criteri de Dirichlet. Ara bé, el criteri de Dirichlet ens serveix també per estudiar la convergència de la sèrie $\sum_n \frac{1}{n} e^{int}$. Tenim que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it} \frac{(1 - e^{int})}{1 - e^{it}} = e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})},$$

on hem fet servir que

$$1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right) = -2ie^{i\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2},$$

i de la mateixa manera,

$$1 - e^{int} = -2ie^{i\frac{nt}{2}} \sin \frac{nt}{2}.$$

Com que $\left|e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\right| = 1$, i $|\sin(\frac{nt}{2})| \leqslant 1$, obtenim

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|} \leqslant \frac{C}{|\varepsilon|} \quad \text{si } t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Com que $\frac{1}{n} \searrow 0$, aplicant el criteri de Dirichlet, obtenim que la sèrie

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} e^{int} \qquad \text{convergeix uniformement en} \quad [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

O equivalentment, en tot arc I tancat del cercle unitat que no contingui a $z = 1$.

I per tant, aplicant el teorema d'Abel, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és uniformement convergent en el con $\{re^{it};\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]\}$. Per Cauchy-Hadamard, també tenim convergència uniforme en $\overline{D_r(0)}$ si $r < 1$, i per tant en tenim a tot compacte contingut en $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$ (sempre el podrem recobrir per la unió d'un con i un disc de radi $r < 1$.).

Si $t = 0$ ens queda la sèrie $\sum \frac{1}{n}$ que ja sabem que és divergent.

Mètode 2: Treballem directament amb $z \in A \subset \overline{\mathbb{D}}$. Volem caracteritzar els conjunts A de manera que hi tinguem convergència uniforme. Primer mirem que hi poguem aplicar el criteri de Dirichlet. Si $z = 1$ la sèrie és divergent. Si ens situem a distància major que ε, és a dir $z \in A_\varepsilon := \overline{\mathbb{D}}\backslash D_\varepsilon(1)$, aleshores

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|z \frac{(1 - z^n)}{1 - z}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - z|} \leqslant \frac{2}{\varepsilon},$$

que és uniforme en A_ε i en n. Com que $\frac{1}{n} \searrow 0$, podem aplicar el criteri de Dirichlet i concloem directament que S convergeix uniformement en A_ε i, per tant en tenim a tot compacte contingut en $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$. Ens hem estalviat els teoremes d'Abel i Cauchy-Hadamard.

Més endavant (a l'exercici 3.4.5) veurem $S(z) = -\mathrm{Log}\,(1 - z)$, així que quan $z \to 1$ tenim que $|S(z)| \geqslant |\ln(|1 - z|)| \to \infty$, i no podrem tenir convergència uniforme en cap conjunt que s'acumuli en $z = 1$. Per tant, tot conjunt on hi hagi convergència uniforme, de fet, està contingut en A_ε per ε prou petit. ◊

Exercicis

2.8.1. *Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. ◁

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$

2.8.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel.* Indicació*: Vegeu [BC13, Teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).* ◁

3. Derivació complexa i holomorfia

En aquest capítol definim la derivació complexa i el concepte de funció holomorfa. Veurem les propietats d'aquesta forma de derivació i ho relacionarem amb les equacions de Cauchy-Riemann[1]. Treballarem també la notació de Wirtinger[2] que permet fer un càlcul de derivades complex més eficient. Finalment, veurem que les sèries de potències estudiades al capítol anterior són holomorfes. Per acabar el capítol, farem una introducció de funcions holomorfes importants, centrant-nos en les funcions trigonomètriques i en les branques de les seves funcions inverses.

3.1. Funcions holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert; $f : \Omega \to \mathbb{C}$, i $z_0 \in \Omega$.

Definició 3.1. Diem que f és $\mathbb{C}$-*derivable* en z_0 si existeix el límit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En aquest cas posem

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Diem que f és holomorfa en Ω, i posem $f \in H(\Omega)$, si és $\mathbb{C}$-derivable en tot punt $z_0 \in \Omega$. Una funció holomorfa en $\mathbb{C}$ es diu que és una *funció entera*. •

Observació 3.2. Només hem definit funcions holomorfes en un obert, però es poden definir per altres conjunts. Per exemple, f és holomorfa en un compacte K si hi ha un obert Ω amb $K \subset \Omega$ de manera que podem estendre f a tot l'obert de manera que $f \in H(\Omega)$. •

Observació 3.3. La definició de $f'(z)$ es pot escriure també com

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

on usem la notació

$$g(z) = o(z) \quad \text{si} \quad \lim_{z \to 0} \frac{g(z)}{z} = 0.$$

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann, Breselenz, 1826 – 1866, https://ca.wikipedia.org/wiki/Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann

[2] Wilhelm Wirtinger, Ybbs an der Donau, 1865 – 1945, https://ca.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Wirtinger

Usarem també la notació

$$g(z) = \mathcal{O}(z) \quad \text{si} \quad \limsup_{z\to 0} \frac{g(z)}{z} < +\infty.$$

Es pot veure fàcilment que si $g(z) = \mathcal{O}(z^n)$, aleshores $g(z) = o(z^{n-1})$, i que $g(z^2) = \mathcal{O}(z^{2n})$, per exemple. •

Exemple 3.4. 1. $f(z) = z$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$.

2. $f(z) = z^2$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ amb $f'(z) = 2z$. En efecte, tenim que

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \to 2z \quad \text{si } h \to 0.$$

3. $f(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$ amb $f'(z) = nz^{n-1}$.

4. $f(z) = e^z \in H(\mathbb{C})$ amb $f'(z) = e^z$. En efecte, tenim que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^z \quad \text{si} \quad h \to 0,$$

ja que

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \mathcal{O}(h) \to 1 \quad \text{quan} \quad h \to 0. \qquad \lozenge$$

Exemple 3.5 (Funcions no holomorfes)**.** 1. $f(z) = \overline{z}$ no és $\mathbb{C}$-derivable en cap punt. En efecte, tenim que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Si $h = x \in \mathbb{R}$, llavors $\frac{\overline{h}}{h} = 1$, però si $h = iy$, tenim que $\frac{\overline{h}}{h} = -1$ i el límit anterior no existeix.

2. $f(z) = \overline{z}^n$ no és holomorfa.

3. $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ no són holomorfes. $\lozenge$

Ja podem començar a veure que una funció holomorfa essencialment només depèn de z (no té dependència de $\overline{z}$, vegeu l'observació 1.11). Donarem un sentit rigorós a aquesta afirmació a la proposició 3.27

Observació 3.6. Propietats bàsiques de les funcions holomorfes (mateixes proves que per $\mathbb{R}$).

1. Si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0, llavors f és contínua en z_0.

2. Si f, g són $\mathbb{C}$-derivables en z_0, llavors $f + g$ i $f \cdot g$ també ho són, amb les regles habituals de derivació.

3. Si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 amb $f(z_0) \neq 0$, llavors $1/f$ és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 amb
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{\big(f(z_0)\big)^2}.$$

4. *Regla de la cadena*: siguin $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ oberts; $f : G \to \Omega$ i $g : \Omega \to \mathbb{C}$. Si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 i g és $\mathbb{C}$-derivable en $f(z_0)$, aleshores la composició $g \circ f$ és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 amb
$$(g \circ f)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0). \qquad \bullet$$

Exemple 3.7. Més exemples de funcions holomorfes:

1. Donat que $f(z) = z$ és una funció entera, es compleix que tots els polinomis
$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad (a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}, n \geqslant 0)$$
són funcions enteres.

2. Les funcions racionals (quocients de polinomis en z) són holomorfes en
$$\mathbb{C}\backslash\{\text{zeros del denominador}\}. \qquad \lozenge$$

Proposició 3.8 (Derivada de la inversa)**.** *Siguin $g : \Omega \to G$ i $f : G \to \Omega$ funcions contínues de manera que*
$$f\big(g(z)\big) = z.$$
Si f és holomorfa en G i $f'\big(g(z)\big) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$, aleshores g és holomorfa en Ω amb
$$g'(z) = \frac{1}{f'\big(g(z)\big)}.$$

Demostració. Notem que g és injectiva, és a dir que $g(z) = g(z_0)$ implica que $z = z_0$. Efectivament, tenim que
$$g(z) = g(z_0) \quad \Rightarrow \quad z = f\big(g(z)\big) = f\big(g(z_0)\big) = z_0.$$
Per tant, per $z \neq z_0$, tenim que $g(z) \neq g(z_0)$ i llavors
$$1 = \frac{z - z_0}{z - z_0} = \frac{f\big(g(z)\big) - f\big(g(z_0)\big)}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$
Com que g és contínua, tenim que $w = g(z) \to w_0 = g(z_0)$ si $z \to z_0$, de manera que, com que f és holomorfa, obtenim
$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\left(\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}\right)} = \frac{1}{\lim_{w \to w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}} = \frac{1}{f'(w_0)} = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

□

Corol·lari 3.9 (Derivada del logaritme)**.** *Qualsevol branca contínua del logaritme $\mathcal{L}$ és holomorfa amb*

$$\mathcal{L}'(z) = \frac{1}{z}.$$

Observació 3.10. Si, donat $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la banda horitzontal oberta

$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha - \pi < \operatorname{Im} z < \alpha + \pi\},$$

llavors la funció exponencial complexa és biholomorfa (és a dir que es tracta d'un difeomorfisme holomorf) entre B_α i $\mathbb{C}\backslash e^{i\alpha}(-\infty, 0]$. •

Finalment, vegem que tot logaritme continu en Ω d'una funció holomorfa, és també holomorf.

Proposició 3.11. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f : \Omega \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorfa. Sigui $\mathcal{L}_f$ una determinació del logaritme de f en Ω. Llavors $\mathcal{L}_f$ és holomorfa en Ω amb*

$$\mathcal{L}_f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \qquad z \in \Omega.$$

Demostració. Fixem $z_0 \in \Omega$. Com que f és holomorfa, en particular és contínua, de manera que hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$f\big(D_\delta(z_0)\big) \subset D\left(f(z_0), \frac{1}{2}\,|f(z_0)|\right) =: D_1.$$

Com que $f(z_0) \neq 0$, llavors D_1 evita alguna semirecta amb origen el 0, i per tant existeix una determinació $\mathcal{L}(w)$ del logaritme de w en D_1, que sabem que ha de ser holomorfa. Definim

$$h(z) = \mathcal{L}\big(f(z)\big), \qquad z \in D_0 := D_\delta(z_0).$$

Com que f és holomorfa, llavors h és holomorfa en D_0 amb

$$h'(z_0) = \mathcal{L}'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}.$$

També h és una determinació del logaritme de f en D_0. Com que D_0 és connex i $\mathcal{L}_f$ també és una determinació del logaritme de f en D_0, aplicant la proposició 2.30, tenim que hi ha $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $\mathcal{L}_f = h + 2k\pi i$ en D_0, i en deduïm que $\mathcal{L}_f$ és holomorfa en D_0 amb

$$\mathcal{L}_f'(z_0) = h'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}.$$

□

Exercicis

3.1.1. *a) Demostreu la regla del producte per la derivació.*

b) Proveu que si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0, llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on $\lambda(z) \to 0$ si $z \to z_0$. ◁

3.1.2. *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:*

a) $f(z)^3$,

b) $f(z)g(z)$,

c) $f(z)/g(z)$,

d) $5f(z) + ig(z)$,

e) $f(1/z)$,

f) $f(g(z))$.

3.1.3. *Proveu que $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$ és entera. Escriviu g com a funció de z.*[3] ◁

3.1.4. *Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que per a tot $n = 2, 3, \ldots$*

a) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$?

b) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$?

c) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{\ln(n+1)}$?

d) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{n}{n+1}$? ◁

3.1.5. *Doneu una branca de $\log(z^2 + 2z + 3)$ que sigui holomorfa a $z = -1$. Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit?* ◁

3.1.6. *Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfà $|f(z) - i| < 1$ per a tot $z \in \Omega$. Demostreu que la funció g definida per*

$$g(z) = \frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)}$$

té logaritme holomorf en Ω. ◁

3.1.7. *Sigui $f(z) = z^3 + 1$ i $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2, z_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$. Provar que no existeix cap punt w en el segment que uneix z_1 i z_2 de manera que $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$. Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes?* ◁

[3] Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa en un domini Ω que talla la recta real i u, v són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, vegeu l'exercici 4.10.10.

3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann

Les equacions de Cauchy-Riemann ens donen una relació entre la $\mathbb{C}$-derivabilitat i la $\mathbb{R}$-diferenciabilitat de f (pensada com una funció de dues variables). Una funció $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la podem pensar com una funció

$$\begin{array}{ccc} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \big(u(x, y), v(x, y)\big). \end{array}$$

Recordem que $f(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$ és $\mathbb{R}$-diferenciable en (x_0, y_0), si i només si, existeix una aplicació lineal

$$\begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

de manera que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left\| f(x, y) - f(x_0, y_0) - L \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|}{\big\|(x - x_0, y - y_0)\big\|} = 0. \tag{3.1}$$

Aquí estem identificant el nombre complex $a + ib$ amb el vector (a, b), és a dir amb la matriu columna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

En cas que f sigui diferenciable, es compleix que

$$Df(x_0, y_0) = L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

on u_x, u_y, v_x, v_y denoten les derivades parcials de u i de v respectivament.

Vegem com actua L en un nombre complex:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Així, amb la identificació $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, trobem

$$Lz = x(a + ic) + y(b + id).$$

Escrivint $\alpha = a + ic$ i $\beta = b + id$, trobem

$$Lz = \alpha x + \beta y = \alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \beta \frac{z - \bar{z}}{2i} = \lambda z + \mu \bar{z}, \tag{3.2}$$

on $\lambda = \frac{\alpha - i\beta}{2}$ i $\mu = \frac{\alpha + i\beta}{2}$. Per tant, tota aplicació $\mathbb{R}$-lineal L es pot expressar com a suma d'una aplicació $\mathbb{C}$-lineal en z i una $\mathbb{C}$-lineal en $\bar{z}$.

Tornant a la diferencial $Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$, trobem $\alpha = u_x + iv_x = f_x$ i $\beta = u_y + iv_y = f_y$ i en tal cas ens queda

$$\lambda = \frac{f_x - if_y}{2} =: \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \mu = \frac{f_x + if_y}{2} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \tag{3.3}$$

Definició 3.12. Posem $z = x + iy$, les *derivades de Wirtinger* (o *operadors de Wirtinger*) són els operadors diferencials:

1. $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$;
2. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

A vegades, per abreujar escrivim $\partial f := \partial_z f := \frac{\partial f}{\partial z}$ i $\overline{\partial} f := \partial_{\bar{z}} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. •

Per tot el que hem vist en aquesta secció, tenim que

$$Df_{z_0}(z) = \partial f(z_0) z + \bar{\partial} f(z_0) \bar{z}.$$

Resumint, hem vist que si f és diferenciable en z_0 aleshores la diferencial és $\mathbb{C}$-lineal si i només si $\bar{\partial} f(z_0) = 0$, si i només si f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0, ja que al límit (3.1) podem usar la descomposició (3.2) posant $\mu = 0$ i $\lambda = f'(z_0)$.

Notem també que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right) = \frac{1}{2}((u_x - v_y) + i(v_x + u_y)),$$

i se n'extreu que

$$\overline{\partial} f = 0 \iff \begin{cases} u_x = v_y & \text{i} \\ u_y = -v_x, & \end{cases}$$

és a dir, les funcions holomorfes compleixen les equacions de Cauchy-Riemann que enunciem a continuació.

Teorema 3.13. *Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, i $z_0 = x_0 + iy_0$.*

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy).$$

Són equivalents:

(a) f és $\mathbb{C}$-derivable en z_0 amb $f'(z_0) = a + ic$;

(b) f pensada com a funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}$-diferenciable en (x_0, y_0) amb

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

És a dir, f compleix les equacions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

que es poden escriure també com

$$\bar{\partial} f(z_0) = 0.$$

En tal cas, notem que (a) implica que $f' = u_x + iv_x = f_x \overset{CR}{=} \partial f$.

Observem que per ser holomorfa en un obert, a part de complir les equacions de Cauchy-Riemann, la funció ha de ser $\mathbb{R}$-diferenciable en tot l'obert.

Proposició 3.14. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert **connex**. Si $f \in H(\Omega)$ amb $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors f és constant.*

Observem que el resultat no té per què ser cert si Ω no és connex, encara que sí que la funció seria constant en cada component connexa.

Demostració. Només cal observar que la hipòtesi $f' \equiv 0$ implica que la diferencial de f en cada punt d'Ω és zero i per tant, el resultat és conseqüència del corresponent resultat per a funcions diferenciables. □

Exemple 3.15.

1. Considerem $f(z) = \overline{z}$ que és diferenciable a tot $\mathbb{R}^2$ amb la identificació habitual de $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$. Si posem $f(x+iy) = x - iy$, llavors $u(x,y) = x$ i $v(x,y) = -y$, i per tant $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ i f no compleix les equacions de Cauchy-Riemann en cap punt.

2. Si $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, llavors f és diferenciable a $\mathbb{R}^2$. Es compleix que $u(x,y) = x^2 + y^2$ i $v(x,y) = 0$, i per tant $u_x = 2x$, $u_y = 2y$ i $v_x = v_y = 0$. Per tant, les equacions de Cauchy-Riemann només es compleixen per $x = y = 0$ i f és només $\mathbb{C}$-derivable a l'origen. (Aquesta situació no la tractarem en aquests apunts, ja que si f és només $\mathbb{C}$-derivable en un punt, no es compleixen les propietats fonamentals de la teoria de Cauchy).

3. Ara comprovarem que la funció

   $$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

   defineix una funció entera.

   En efecte, la funció és clarament $\mathbb{R}$-diferenciable. Notem que $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, i $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. Aleshores només ens cal comprovar que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann:

   $$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \\ u_y = -6xy = -v_x, \end{cases}$$

   i per tant f defineix una funció entera (és a dir, holomorfa a tot $\mathbb{C}$). ◊

Observació 3.16 (Efecte de la derivada)**.** Suposem f $\mathbb{C}$-derivable a z_0 amb $f'(z_0) \neq 0$. Observem que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle (u_x, u_y), (v_x, v_y) \rangle = 0.$$

Per tant, com que ∇u i ∇v són diferents de zero (es pot veure usant les equacions de Cauchy-Riemann), concloem que les corbes de nivell de u i v són ortogonals, vegeu la figura 3.2.

De fet, podem extreure encara més informació de l'existència del límit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

que es pot escriure com

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Concretament, per a z a prop de z_0 l'aplicació $w - w_0$ amb $w = f(z)$ i $w_0 = f(z_0)$ es comporta com l'aplicació lineal

$$w - w_0 \approx f'(z_0)(z - z_0).$$

Podem dir doncs que l'aplicació $f(z)$, en un entorn *infinitesimal* de z_0 *dilata* les distàncies en un factor de $|f'(z_0)|$:

$$|w - w_0| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|,$$

i que *gira* els vectors que surten de z_0 en un angle $\arg f'(z_0)$:

$$\arg(w - w_0) \approx \arg(z - z_0) + \arg f'(z_0),$$

vegeu la figura 3.2.

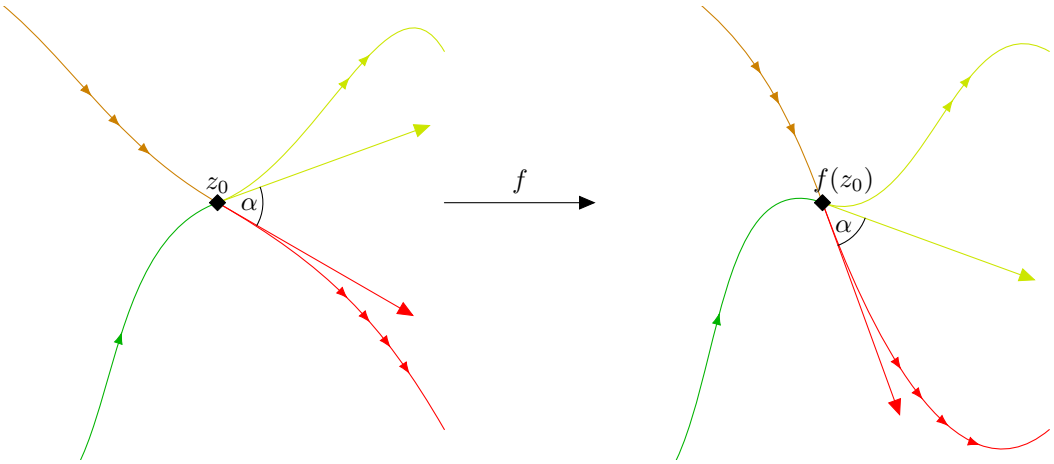
Una funció és conforme si l'angle entre dues corbes γ_1, γ_2 que coincideixen en un punt es preserva (orientació inclosa). Diem doncs que una funció holomorfa és *localment conforme* allà on $f'(z) \neq 0$: si suposem $\gamma_j(0) = z_0$ i $\gamma_j'(0) \neq 0$ per $j \in \{1, 2\}$, aleshores podem justificar (exercici) que $(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0)$ i tenim que

$$\arg((f \circ \gamma_1)'(0)) - \arg((f \circ \gamma_2)'(0)) = \arg \frac{f'(z_0)\gamma_1'(0)}{f'(z_0)\gamma_2'(0)} = \arg \gamma_1'(0) - \arg \gamma_2'(0).$$

D'altra banda, usant la representació de matrius que preserven angles (és a dir les isometries de determinant 1, anomenades $SO(2, \mathbb{R})$, i els seus múltiples) donada a (3.2), podem veure que la preservació dels angles de funcions amb diferencial no nul·la en un punt donat implica l'holomorfia en aquest punt, deixem els detalls pel lector. •

Observació 3.17 (Jacobià i canvi de variables)**.** Observem que com que $f' = f_x = u_x + iv_x$, tenim que

$$|f'|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2 = u_x v_y - u_y v_x,$$



;

Figura 3.1.: Graella en el pla complex entre $-2-2i$ i $2+2i$.

que coincideix amb el jacobià de l'aplicació $(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Efectivament,

$$J(u,v)=\det(D(u,v))=\left|\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}\right|=u_xv_y-u_yv_x.$$

Per tant, per la regla del canvi de variable, si g és contínua i f és un difeomorfisme entre un obert U i $f(U)$, tenim que

$$\int_U g\circ f(z)\,|f'(z)|^2\,dm(z)=\int_U g\circ f(z)\,|Jf(z)|\,dm(z)=\int_{f(U)} g\,dm(w),$$

on dm indica la integral de superfície, sovint denotada $dx\,dy$ (la identitat funciona amb la integral en el sentit de Lebesgue si g és mesurable, per exemple) i si prenem $g(w)=1$, trobem

$$\int_U |f'(z)|^2\,dm(z)=\int_{f(U)} dm(w)=m(f(U)),$$

és a dir que podem calcular la mesura de Lebesgue del conjunt imatge integrant el quadrat del mòdul de la derivada. •

Exercicis

3.2.1. *Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat $Q=\{x+iy : x,y\in(-2,2)\}$ és la primera imatge de la figura 3.2. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en Q, representa una funció holomorfa en Q. Quina és?*

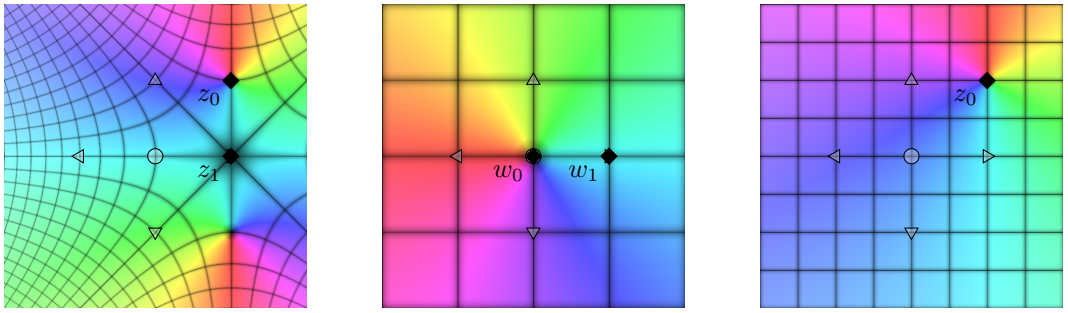
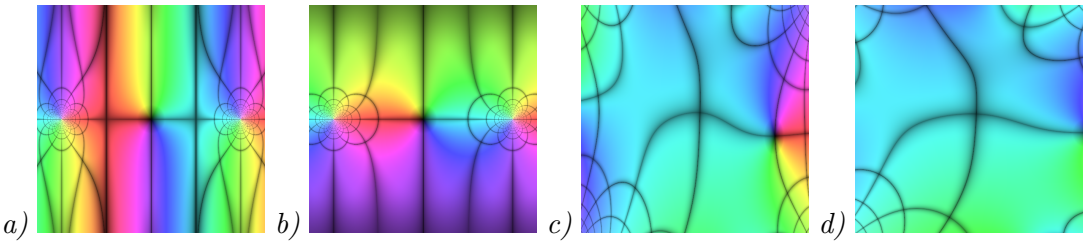


Figura 3.2.: En la imatge central, trobem la graella en el pla complex en $2\mathcal{Q}$. La segona representa $f(z) = z^2 - 2z + 2$ en el mateix domini amb un gràfic de colors en coordenades cartesianes (vegeu la secció 2.1). Recordem que es representa la preimatge de la graella per la funció f. Prenem $z_0 = 1 + i$, $w_0 = f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) = 2i$. La tercera imatge és l'aproximació lineal $w_0 + f'(z_0)(z - z_0)$, que envia z_0 a w_0 i produeix una rotació de $\frac{\pi}{2}$ i una dilatació de raó 2 entorn de z_0. En general, veiem que els angles de la graella es preserven llevat del punt $z_1 = 1 + 0i$, on s'anul·la la derivada, i l'aproximació (en aquest cas igualtat) és de grau 2: $w = f(z_1) + \frac{f''(z_1)}{2}(z - z_1)^2$.



◁

3.2.2. *Trobar els valors de les constants a, b, c de manera que f sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z.*

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$. ◁

3.2.3. *Sigui $f = u + iv$ holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques (una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i el seu* laplacià $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$.) ◁

3.2.4. *Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$*

a) Provar que u és harmònica.

b) Trobar una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobar una expressió compacta de $f(z)$. ◁

3.2.5. *Trobar els polinomis harmònics de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Trobar la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent.* ◁

3.2.6. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (és a dir, un obert connex) i f una funció holomorfa en Ω.*

1. *Proveu que si f només pren valors imaginaris purs, aleshores f és constant.*
2. *Proveu que si $|f|$ és constant, aleshores f també és constant. Equivalentment si f només pren valors en una circumferència, llavors f és constant.* ◁

3.2.7. *Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x + iy) = u(x) + iv(x, y)$.* ◁

3.2.8. *(a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals*

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda x y^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ.

(b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ? ◁

3.2.9. *Decidiu on no són holomorfes les funcions següents*

a) $\dfrac{1}{z - 2 + 3i}$, *b)* $\dfrac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, *c)* $\dfrac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$, *d)* $\dfrac{z^2}{(2z^2 - 3z + 1)^2}$. ◁

3.2.10. *Provar que $|z|^2$ és $\mathbb{C}$-derivable en $z = 0$ però enlloc més.* ◁

3.2.11. *Sigui*

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & si\ z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0. \end{cases}.$$

Demostreu que

a) $f(z)$ satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt $z \in \mathbb{C}$.

b) f no és contínua al 0 i per tant f no és holomorfa a un entorn del 0. ◁

3.2.12. *Si u i v s'expressen respecte a les coordenades polars (r,θ), proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Indicació*: estudieu el límit incremental seguint* $\arg z = \theta_0$ *i* $|z| = r_0$. ◁

3.2.13. *Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:*

a) $w = z^2$;

b) $w = z^2 + 2z$;

c) $w = \dfrac{1}{z}$;

d) $w = e^z$;

e) $w = \log(z-1)$. ◁

3.3. Càlcul de les derivades

Ja hem vist la definició de funció holomorfa, i hem vist com aquesta condició és equivalent a ser una funció diferenciable que satisfà les equacions de Cauchy-Riemann. Tornem ara a visitar els operadors de Wirtinger per mirar d'arribar a unes regles de càlcul senzilles.

Exemple 3.18. Les derivades de $f(z) = z$ són

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - i\cdot i) = 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(1 + i\cdot i) = 0.$$

Les derivades de $g(z) = \bar{z}$ són

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 1.$$

♢

Observació 3.19. Es pot comprovar que tot parell de funcions diferenciables satisfà

1. $\partial(f\cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial g$;
2. $\overline{\partial}(f\cdot g) = \overline{\partial} f \cdot g + f \cdot \overline{\partial} g$. •

Exemple 3.20. Per inducció, les derivades de $f(z) = z^n$ són

$$\partial f = nz^{n-1}, \qquad \text{i} \qquad \bar{\partial} f = 0.$$

Igualment, les derivades de $g(z) = (\bar{z})^m$ són

$$\partial g = 0 \qquad \text{i} \qquad \bar{\partial} g = m(\bar{z})^{m-1}.$$

Combinant, per $h(z) = z^n(\bar{z})^m$ trobem

$$\partial h = nz^{n-1}(\bar{z})^m \qquad \text{i} \qquad \bar{\partial} h = mz^n(\bar{z})^{m-1}.$$ ◁

Lema 3.21. *Siguin* $P(z) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}:n+m\leqslant N} a_{n,m} z^n (\bar{z})^m$ *i* $Q(z) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}:n+m\leqslant N} b_{n,m} z^n (\bar{z})^m$ *dos polinomis en variables* z *i* $\bar{z}$*. Aleshores* $P = Q$ *si i només si* $a_{n,m} = b_{n,m}$ *per tot* n *i* m*.*

Demostració. Suposem que $P = Q$. Per l'exemple anterior, tenim que

$$n!m!a_{n,m} = \partial^n \bar{\partial}^m P(0) = \partial^n \bar{\partial}^m Q(0) = n!m!b_{n,m}.$$

La implicació contrària és trivial. □

Recordem com s'escriu la diferencial del producte i la regla de la cadena amb els operadors de Wirtinger.

Lema 3.22. *Sigui* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *una matriu de coeficients reals, i* f_A *l'aplicació lineal de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^2$ *associada definida per* $f_A(z) = f_A(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *per* $z = x + iy$*. Si escrivim les columnes d'*A *usant notació complexa, és a dir* $\alpha = a + ic$ *i* $\beta = b + id$*, aleshores trobem que per tot* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, escrivint* $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, tenim que*

$$f_A(x,y) = \frac{1}{2}\left[(\alpha - i\beta)\, z + (\alpha + i\beta)\, \overline{z}\right].$$

A més, aquesta és l'única manera d'escriure $f_A(z) = w_1 z + w_2 \overline{z}$ *amb* $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$*.*

Demostració. A (3.3) hem vist que efectivament $f_A(x,y) = \frac{1}{2}\left[(\alpha - i\beta)\, z + (\alpha + i\beta)\, \overline{z}\right]$. La unicitat es deriva del lema anterior. □

Observació 3.23. Pel lema 3.22, donada una aplicació $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciable, aleshores en tot punt z_0 del domini i per tot vector $z \in \mathbb{C}$ tenim que

$$Df_{z_0}(z) = \partial f(z_0) \cdot z + \overline{\partial} f(z_0) \cdot \overline{z}. \qquad \bullet$$

Lema 3.24. *[Regla de la cadena] si* f *i* g *són diferenciables en un obert, aleshores*

1. $\partial(f \circ g) = \partial f \partial g + \overline{\partial} f \overline{\overline{\partial} g}$*;*
2. $\overline{\partial}(f \circ g) = \partial f \overline{\partial} g + \overline{\partial} f \overline{\partial g}$*.*

Aquí cal entendre que si avaluem $\partial(f \circ g)$ *en un punt* z *del seu domini, aleshores en la primera fórmula* ∂f *i* $\overline{\partial} f$ *s'avaluen en* $g(z)$*.*

Demostració. Per la regla de la cadena, tenim que

$$D(f \circ g)_{z_0}(z) = Df_{g(z_0)} \circ Dg_{z_0}(z) = Df_{g(z_0)}\left(Dg_{z_0}(z)\right).$$

Usant el lema 3.22 i l'observació 3.23, trobem que per tot z tenim que

$$\begin{aligned} &\partial(f \circ g)(z_0) \cdot z + \overline{\partial}(f \circ g)(z_0) \cdot \overline{z} \\ &\qquad = \partial f(g(z_0)) \cdot \left(\partial g(z_0) \cdot z + \overline{\partial} g(z_0) \cdot \overline{z}\right) + \overline{\partial} f(g(z_0)) \cdot \overline{\left(\partial g(z_0) \cdot z + \overline{\partial} g(z_0) \cdot \overline{z}\right)}. \end{aligned}$$

Per la unicitat del lema 3.22, trobem les igualtats dels coeficients que acompanyen z i dels que acompanyen $\overline{z}$, és a dir 1 i 2. □

Observació 3.25. En particular, prenent $f(z) = \bar{z}$ i combinant el lema anterior amb l'exemple 3.18, trobem que

1. $\partial\,\overline{g} = \overline{\overline{\partial} g}$;
2. $\overline{\partial}\,\overline{g} = \overline{\partial g}$;

•

Lema 3.26. *Siguin $g = (g_1, g_2) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ i $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcions diferenciables. Si escrivim*

$$\partial_z f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right], \qquad \partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right],$$

$$\partial_w f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_3} - i\frac{\partial f}{\partial x_4}\right], \quad i \quad \partial_{\overline{w}} f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_3} + i\frac{\partial f}{\partial x_4}\right],$$

on identifiquem $(z, w) = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4) \sim (x_1, x_2, x_3, x_4)$, aleshores

1. $\partial(f \circ g) = \partial_z f \partial g_1 + \partial_w f \partial g_2 + \partial_{\overline{z}} f \overline{\overline{\partial} g_1} + \partial_{\overline{w}} f \overline{\overline{\partial} g_2}$;
2. $\overline{\partial}(f \circ g) = \partial_z f \overline{\partial} g_1 + \partial_w f \overline{\partial} g_2 + \partial_{\overline{z}} f \overline{\partial g_1} + \partial_{\overline{w}} f \overline{\partial g_2}$.

Demostració. La demostració és anàloga a la del lema 3.24, tenint en compte que com a aplicacions a l'espai euclidià, la matriu que correspon a $Df \circ Dg$ es pot descompondre com

$$\left(\frac{\partial(u_f, v_f)}{\partial(x_1, x_2)}\right) \cdot \left(\frac{\partial(u_{g_1}, v_{g_1})}{\partial(x_1, x_2)}\right) + \left(\frac{\partial(u_f, v_f)}{\partial(x_3, x_4)}\right) \cdot \left(\frac{\partial(u_{g_2}, v_{g_2})}{\partial(x_1, x_2)}\right),$$

on $f = u_f + iv_f$, $g_j = u_{g_j} + v_{g_j}$. A cada sumand apliquem el mateix raonament que en el lema anterior. □

Proposició 3.27. *Si $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es pot expressar com $F(z) = f(z, \overline{z})$ on f és una funció diferenciable que és $\mathbb{C}$-derivable respecte a les dues variables, és a dir*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & (z, w) & \mapsto & f(z, w) \end{array}$$

amb $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}} = 0$, aleshores

$$\partial F(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z, \overline{z}) \quad i \quad \overline{\partial} F(z) = \frac{\partial f}{\partial w}(z, \overline{z}),$$

i les derivades $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial w}$ es poden calcular pels mètodes habituals.

Demostració. Prenem $g(z) = (g_1(z), g_2(z)) = (z, \overline{z})$, que satisfà que $\partial g_1 = 1$, $\partial g_2 = 0$, $\overline{\partial} g_1 = 0$, $\overline{\partial} g_2 = 1$, vegeu l'exemple 3.18. A part, $\frac{\partial f}{\partial z}(z, \overline{z}) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial w}(z, \overline{z}) = 0$. Així, pel lema 3.26, trobem que

1. $\partial F = \partial_z f \cdot 1 + \partial_w f \cdot 0 + 0 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1}$;
2. $\overline{\partial} F = \partial_z f \cdot 0 + \partial_w f \cdot 1 + 0 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{0}$,

i la proposició se segueix. □

Exemples 3.28. El lema anterior ens diu que si expressem una funció com a producte, composició, etcètera, de funcions holomorfes en z i $\overline{z}$, aleshores només ens cal derivar independentment cada una de les parts tal com faríem amb un polinomi, amb l'altra *variable* actuant com una constant (malgrat no ser-ho!). Així, per exemple,

- Si $f(z) = z^2 + \overline{z}z^3 + z\overline{z}^2$, aleshores $\partial f(z) = 2z + 3\overline{z}z^2 + \overline{z}^2$, i $\overline{\partial} f(z) = z^3 + 2z\overline{z}$.
- Si $f(z) = e^{z+\cos(\overline{z})}$, aleshores $\partial f(z) = e^{z+\cos(\overline{z})}$ i $\overline{\partial} f(z) = e^{z+\cos(\overline{z})} \cdot (-\sin(\overline{z}))$. ◊

Exercicis

3.3.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω. Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^*.* ◁

3.3.2. *Trobeu els punts on la funció f té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que $f' = f_x$.)*

a) $f(z) = |z|^4$

b) $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

e) $f(z) = |z|$

f) $f(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

g) $\cos |z|^2$

h) $f(z) = z + z\overline{z}$ ◁

3.3.3. *Donat un polinomi de dues variables reals $P(x, y)$, demostreu que identificant $z = x + iy$ són equivalents:*

1. *P es pot expressar com un polinomi en z.*
2. *P és una funció entera.*
3. *$\overline{\partial} P = 0$ en $\mathbb{C}$.* ◁

3.4. Funcions analítiques

Definició 3.29. Si Ω és un obert, una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és una *funció analítica* en Ω si per a cada punt $a \in \Omega$, existeix un disc $D_r(a) \subset \Omega$, tal que f és la suma d'una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$. •

Veurem a continuació que tota funció analítica és holomorfa

Teorema 3.30 (Derivació d'una sèrie de potències)**.** *Sigui* $S(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n$ *una sèrie de potències amb radi de convergència* $R > 0$*. Llavors la* sèrie derivada

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-b)^{n-1}$$

té el mateix radi de convergència. A més, S *és holomorfa en* $|z-b| < R$ *amb*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-b)^{n-1}, \qquad |z-b| < R.$$

Observació 3.31. Iterant el resultat del teorema, obtenim que tota sèrie de potències és infinitament derivable en $|z-b| < R$, i totes les seves derivades són holomorfes en $|z-b| < R$.

Per inducció, iterant la fórmula anterior es verifica que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-b)^{n-k} \quad z \in D_R(b),$$

i, en particular,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}, \quad k \geqslant 0.$$

•

Prova del teorema 3.30. Prenent $h(z) = S(z+b)$, podem suposar que $b = 0$, i ens queda la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

El radi de convergència de $\sum_n na_n z^{n-1}$ és el mateix que el de $\sum na_n z^n$ (ja que el producte per un número no canvia el radi de convergència, vegeu l'exercici 2.6.3) que, com que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, és

$$\frac{1}{R'} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{n} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Dit d'una altra manera, les dues sèries tenen el mateix radi de convergència.

Posem

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, z^{n-1}, \qquad |z| < R.$$

Fixem z_0 amb $|z_0| < R$, i volem provar que S és holomorfa en z_0 amb $S'(z_0) = g(z_0)$. Cal provar doncs que

$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| = 0.$$

Notem que les sèries convergeixen uniformement en $z, z_0 \in D_\rho(0)$ per $\rho < R$, però en dividir per $z - z_0$ podríem perdre la convergència uniforme i, per tant, no podem permutar límit i suma a la lleugera.

Si $z \in D_R(0)\backslash\{z_0\}$, llavors,

$$\frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n,$$

on $A_1 = 0$ i per a $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A_n =& \sum_{m=0}^{n-1} z_0^{n-1-m} z^m - n z_0^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(z_0^{n-1-m} z^m - z_0^{n-1} \right) = \sum_{m=0}^{n-1} z_0^{n-1-m} \left(z^m - z_0^m \right) \\ =& (z-z_0) \sum_{m=1}^{n-1} z_0^{n-1-m} \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{m-1-k} z^k = (z-z_0) \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{n-2-k} z^k. \end{aligned}$$

Per tant, si triem $|z_0| < \rho < R$, per a $|z| < \rho$ i $n \geqslant 2$, es compleix que

$$\begin{aligned} |A_n| \leqslant& |z-z_0| \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} |z_0|^{n-2-k} |z|^k \leqslant |z-z_0| \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \rho^{n-2} \\ =& |z-z_0| \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \right) \rho^{n-2} = |z-z_0| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \leqslant |z-z_0| n^2 \rho^{n-2}. \end{aligned}$$

Tot plegat ens dona que si $|z| < \rho$,

$$\left| \frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) \right| \leqslant |z-z_0| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2}.$$

Però les sèries de potències $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| z^{n-2}$ i $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| z^n$ tenen el mateix radi de convergència, i el radi d'aquesta darrera sèrie és

$$\frac{1}{\limsup_n (n^2 |a_n|)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}}} = R > \rho.$$

Així doncs, $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2} = C < \infty$ i, per tant,

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) \right| \leqslant \lim_{z \to z_0} C|z-z_0| = 0,$$

com volíem demostrar. □

A partir del teorema acabat de provar, sabem que tota sèrie de potències és holomorfa en el seu disc de convergència i que es deriva fent-ho terme a terme. Amb això, podem calcular el valor de la suma de diverses sèries. Per exemple, sabem que

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Derivant, obtenim

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}, \qquad |z| < 1.$$

Per tant,

$$-\frac{z}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Observem que la classe de funcions analítiques en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és trivialment tancada per la suma. Es compleix que també és tancada respecte al producte, com a conseqüència del teorema de Mertens:

Teorema 3.32. *Siguin f i g les sumes de les sèries de potències $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$ i $\sum_{n\geqslant 0} b_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$, respectivament, amb r menor que ambdós radis de convergència.*

Llavors la sèrie producte de Cauchy *d'aquestes dues,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (z-a)^n$$

convergeix absolutament en $D_r(a)$ i la seva suma és $f \cdot g$ en $D_r(a)$.

En particular, el producte de dues funcions analítiques en un obert de $\mathbb{C}$ és analítica en aquest obert.

Exercicis

3.4.1. *Discutir l'analiticitat de*

a) $8\bar{z} + i$,

b) $\dfrac{z}{\bar{z}+2}$,

c) $\dfrac{z^3+2z+i}{z-1}$ *(vegeu la figura 3.7),*

d) $x^2 - y^2 + 2xyi$,

e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,

f) $\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$,

g) $|z|^2 + 2z$,

h) $\dfrac{|z|^2+z}{2}$. ◁

3.4.2. *Trobeu la suma de les sèries*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n!}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ *si* $|z| < 1$. ◁

3.4.3. *Sigui $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ per $|z| < R$ on R és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si $f(z_k) = 0$ per una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \to 0$ quan $k \to \infty$, aleshores $f(z) \equiv 0$ (i.e. $c_n = 0$ per a tot $n \geqslant 0$).* Indicació*: Calculeu $f(0)$ i considereu la sèrie $f(z)/z$).* ◁

3.4.4. *Demostreu que si dues sèries* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *i* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió* $(z_k)_k$ *tal que* $z_k \neq 0$ *i* $z_k \to 0$ *quan* $k \to \infty$ *aleshores* $a_n = b_n$ *per a tot* $n \geqslant 0$. ◁

3.4.5. *Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.8.1.*

3.4.6. *Considereu la sèrie*

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot z *del disc de convergència.*

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}.$$ ◁

3.4.7. *Considereu la sèrie de potències*

$$\sum_{n\geqslant 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$ *?* ◁

3.4.8. *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n (2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació*: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.*

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$. ◁

3.5. Algunes funcions holomorfes importants

L'exponencial complexa: ja havíem vist que ve definida per

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

La sèrie té radi de convergència $R = +\infty$, i per tant e^z defineix una funció entera amb

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

La identitat

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w; \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

també es pot veure de la següent manera:

Per $a \in \mathbb{C}$, considerem la funció $f_a(z) = e^z\, e^{a-z}$. Com que és producte de funcions enteres, la funció f_a és entera amb

$$f_a'(z) = e^z\, e^{a-z} + e^z\, (-e^{a-z}) = 0.$$

Per tant f_a és constant en $\mathbb{C}$, és a dir que $f_a(z) = f_a(a) = e^a$, així que

$$e^z\, e^{a-z} = e^a.$$

Posant $a = z + w$ obtenim el resultat.

De la identitat anterior, tenim que $e^z\, e^{-z} = 1$, i deduïm que $e^z \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i també

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Recordem també que

(i) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $|e^{it}| = 1$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Definició 3.33 (Funcions trigonomètriques)**.** Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

vegeu la figura 3.3. Fent servir el desenvolupament en sèrie de potències de e^z, tenim que

$$\sin z = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(i^n - (-i)^n)}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}.$$

També

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}.$$

Per tant, $\sin z$ i $\cos z$ estenen les corresponents funcions $\sin x$ i $\cos x$ de $\mathbb{R}$ a tot el pla complex. •

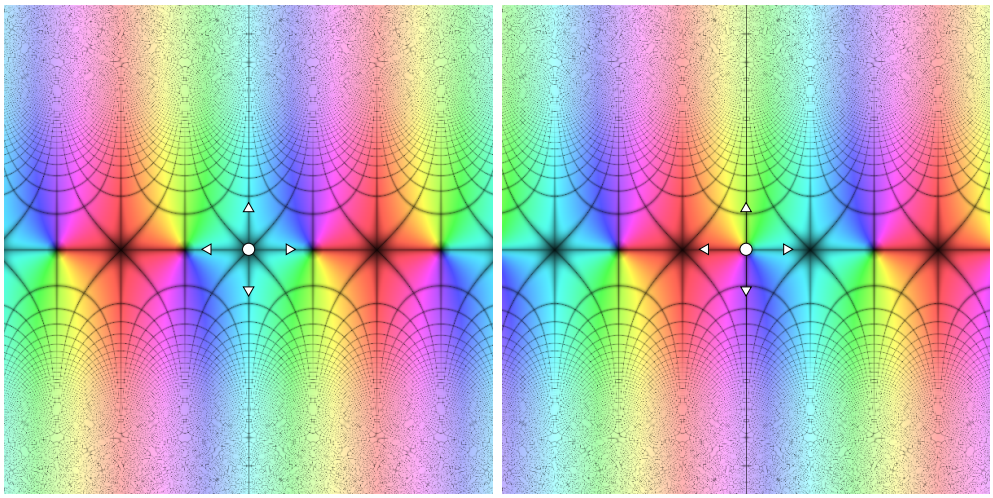


Figura 3.3.: A l'esquerra, la funció cosinus, a la dreta el sinus en $6\mathcal{Q}$.

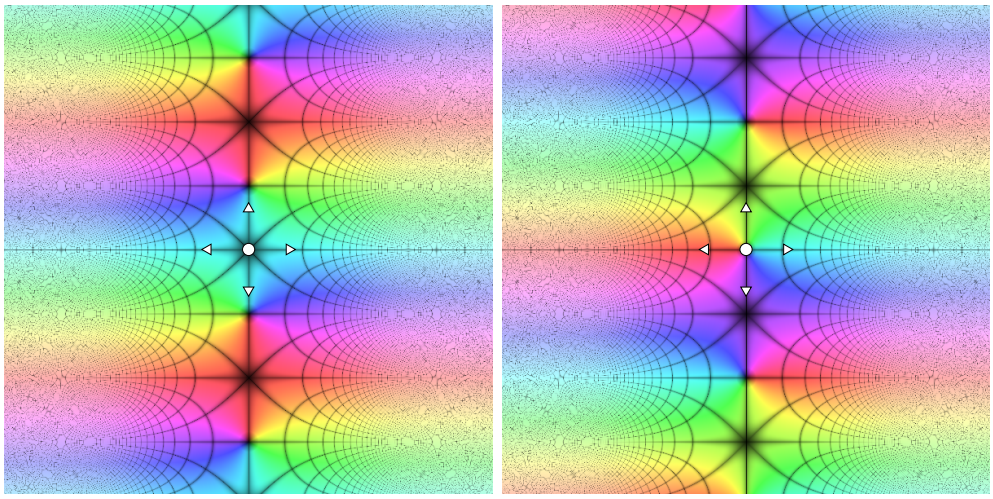


Figura 3.4.: Cosinus hiperbòlic i sinus hiperbòlic en $6\mathcal{Q}$.

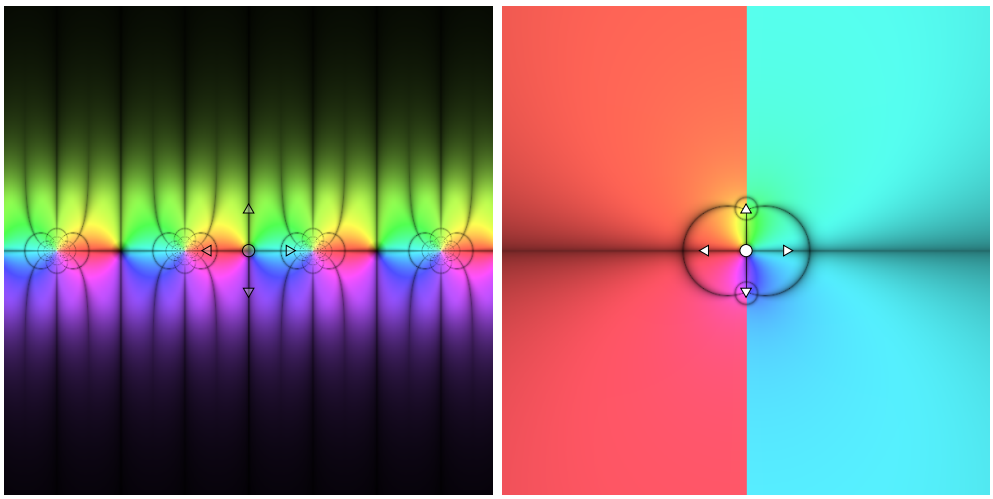


Figura 3.5.: Tangent i branca principal de l'arctangent en $6\mathcal{Q}$, vegeu l'exercici 3.5.5.

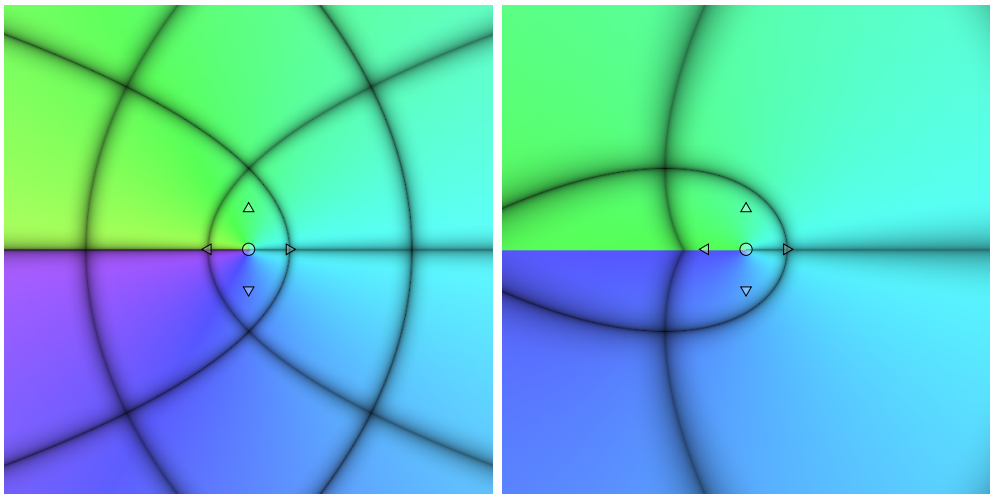


Figura 3.6.: Arrel quadrada principal i arrel cúbica principal en $6\mathcal{Q}$.

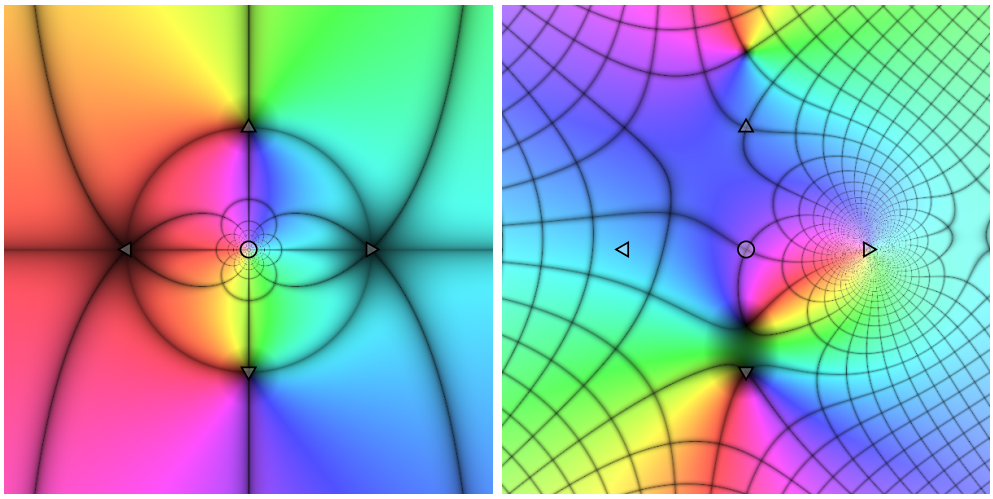


Figura 3.7.: $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ i $\frac{z^3+2z+i}{z-1}$ en $2\mathcal{Q}$, presenten singularitats, vegeu l'exercici 2.1.7.

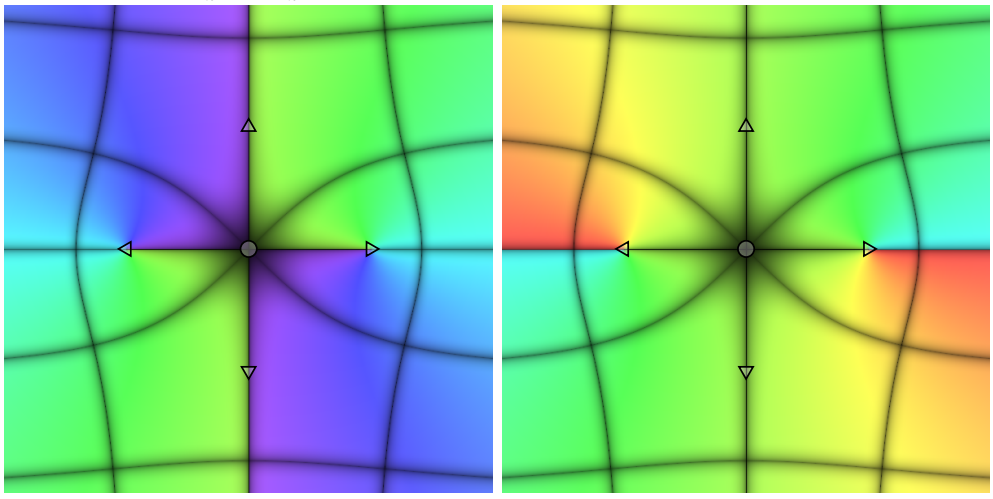


Figura 3.8.: Determinació principal de $\sqrt{z^2-1}$ i de $i\sqrt{1-z^2}$ en $2\mathcal{Q}$, vegeu l'exercici 2.5.3.

Advertència 3.34. Ara $\sin z$ i $\cos z$ no són fitades! Per exemple

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} |\sin(it)| = +\infty.$$

•

Exercicis

3.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ *i* $\cos z$ *són funcions enteres amb*

$$(\sin z)' = \cos z; \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$, *i també* $\sin(-z) = -\sin z$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z sinw$. ◁

3.5.2.

Resoleu les següents equacions:

a) $\sin z = 4$ *b)* $\cos z = i$. ◁

3.5.3. *a) Proveu que* $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$ *i que* $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$, *per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

b) Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.

c) Deduïu de (b) que, per a z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, *es verifica:*

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ *si, i només si,* $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ *si, i només si,* $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ *o bé* $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *se satisfà:*

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ *(vegeu l'exercici 1.3.2).*

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) Sobre quines rectes està acotada la funció sinus? I la funció cosinus? ◁

3.5.4. *(a) Proveu que per a cada $w \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, l'equació $\tan z = w$ té infinites solucions, que són la funció multivaluada*

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ l'equació no té cap solució.

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ difereixen de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ als anells $\{r < |w-i| < R\}$, $\{r < |w+i| < R\}$, $0 < r < R < 2$, però que sí que n'hi ha si $2 < r < R < +\infty$.

3.5.5. *Demostra que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\mathrm{Arctan} w := \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

és $\mathbb{C}\backslash\{iy : |y| \geqslant 1\}$. ◁

3.5.6. *a) Sigui $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ que compleix que $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$. Definim $f(z) := -\mathcal{L}(2-2z)$. Demostreu que f és holomorfa en $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty)$. Calculeu $f(0)$ i $f(-i)$.*

b) Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2z-1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\mathrm{Log}\,(2-2z)$, per tot $z \in D := D_{1/2}(1/2)$, on Log és la determinació principal del logaritme.

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ i $f(z)$? Indicació*: Relacioneu primer $\mathcal{L}(z)$ amb $\mathrm{Log}\,(z)$ per $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.* ◁

3.5.7. *Sigui $\sqrt{\cdot}$ la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$ complint que $\sqrt{-1} = i$ i sigui $f(z) = \sqrt{3z+2}$.*

1. *Expresseu $\sqrt{\cdot}$ en termes d'una determinació del logaritme i argument.*

   Recordem que

   $$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg z)}.$$

2. *Quina és la regió més gran of f és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix z tal que $f(z) = -i$?*

3. *Què val $f(\frac{i-2}{3})$?* ◁

3.5.8. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt* $a = 1$ *de la funció* $f(z) = \sqrt[3]{z}$ *on* $\sqrt[3]{\cdot}$ *denota la determinació de l'arrel cúbica definida a* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *tal que* $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. ◁

3.5.9. *Els* polinomis de Legendre[4] $P_j(\zeta)$ *són els coeficients de* z^j *en el desenvolupament de Taylor*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z+z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ *és un polinomi de grau* j *i calcular* P_0, P_1, P_2 *i* P_3.

◁

[4] Adrien-Marie Legendre, París, 1752 – 1833, https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

En aquest capítol expliquem com la integració del càlcul en diverses variables aplica al pla complex. Veurem en particular com integrar sobre corbes amb notació complexa, el teorema fonamental del càlcul per funcions amb primitives holomorfes, i una extensió d'aquest resultat anomenat teorema de Cauchy, on l'holomorfia es demana ja no a la primitiva si no a la pròpia funció a integrar, i a més es pot relaxar la hipòtesi de $\mathbb{C}$-derivabilitat en un punt aïllat del domini per demanar-hi tan sols continuïtat. Aquest resultat ens portarà a la fórmula integral de Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-a)}\, dw, \qquad \text{per a tot } a \in D_r(z),$$

la pedra angular de la teoria local de l'anàlisi complexa, coneguda com a teoria local de Cauchy.

Un cop demostrada la fórmula integral de Cauchy, deduirem un munt de propietats de les funcions holomorfes $f \in H(\Omega)$:

- Propietat de la mitjana: l'avaluació $f(z)$ coincideix amb la mitjana de la funció en una bola centrada en z.
- Analiticitat: podem expressar f localment com a sèrie de potències.
- Desigualtats de Cauchy: $|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|, \qquad n \geqslant 0.$
- Teorema de Liouville[1]: si $f \in H(\mathbb{C})$ és fitada, és constant.
- Teorema fonamental de l'àlgebra: tot polinomi de coeficients complexos té almenys una arrel.
- Teorema de Morera[2]: si $g \in C(\Omega)$ integra 0 en vores de triangles, aleshores és holomorfa.
- Fórmula integral de Cauchy per derivades $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$.
- Ordre dels zeros: si $f(a) = 0$ aleshores $f(z) = g(z)(z-a)^n$ amb g holomorfa i $g(a) \neq 0$.
- Principi de prolongació analítica: si els zeros de f tenen un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv 0$.

[1] Joseph Liouville, Saint-Omer, 1809–1882, https://ca.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville
[2] Giacinto Morera, Novara, 1856–1909, https://ca.wikipedia.org/wiki/Giacinto_Morera

- Principi del mòdul màxim: si el màxim absolut de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ s'assoleix a l'interior, aleshores f és constant.

Algunes d'aquestes propietats, com ara la de la mitjana, les desigualtats de Cauchy o el teorema de Liouville, de fet, es compleix per tota funció harmònica (vegeu l'exercici 3.2.3) i es poden estendre a $\mathbb{R}^d$ amb $d \geqslant 3$, però les demostracions aquí presentades apliquen només al cas de variable complexa.

4.1. Corbes

Definició 4.1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Una *corba* en Ω és una aplicació $\gamma : [a,b] \to \Omega$ contínua.

La imatge (recorregut) de γ és $\gamma^* = \gamma([a,b]) \subset \Omega$. Observeu que podria tenir interseccions. El punt $\gamma(a)$ s'anomena *punt inicial*, i $\gamma(b)$ *punt final*.

Diem que és una *corba tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diem que és una *corba simple* si γ és injectiva (és a dir, no té interseccions).

Diem que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ és una *corba de classe* C^1 si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, amb $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([a,b])$ (en particular és derivable per la dreta en a i per l'esquerra en b). En aquest cas, definim

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t).$$

Diem que és una *corba* C^1 *a trossos* si hi ha una partició de l'interval $[a,b]$, diguem $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, de manera que $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ és de classe C^1 per $k = 1, \ldots, n$. Farem servir el nom de *camí* per indicar una corba C^1 a trossos. •

Definició 4.2. Una *reparametrització* de γ és una corba $\eta : [c,d] \to \Omega$ de manera que $\eta = \gamma \circ \varphi$, on $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ és un homeomorfisme. En aquest cas, els recorreguts coincideixen, és a dir, $\eta^* = \gamma^*$, només canvia la velocitat en què la recorrem. Per exemple, una reparametrització de la corba $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ és $\eta(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \pi]$.

En el cas de camins, les reparametritzacions són a més a més, de classe C^1 a trossos, i demanarem que φ i φ^{-1} també siguin C^1 a trossos.

La *corba inversa* de γ és la corba $\gamma^- : [a,b] \to \Omega$ definida per $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ (és a dir, recorre la imatge en sentit contrari). •

Definició 4.3 (Suma de camins)**.** Escrivim la *suma de camins*: $\gamma \vee \eta$ (recorrem primer γ i després η). •

Definició 4.4 (Longitud d'una corba)**.** Si $\gamma \in C^1$, la longitud de γ és

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Si γ és un camí (corba C^1 a trossos), llavors, seguint la notació de la Definició 4.1, definim

$$\mathrm{L}(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\, dt. \qquad \bullet$$

Definició 4.5 (Integrals de funcions amb valors complexos)**.** Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrable (en sentit de Riemann o de Lebesgue). Definim

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}\big(f(t)\big)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}\big(f(t)\big)\,dt. \qquad \bullet$$

Lema 4.6. *[Propietats de la integral] Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ són integrables, aleshores:*

(i) la integral és $\mathbb{C}$-lineal: si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, llavors

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt,$$

(ii) se satisfà la desigualtat triangular per integrals*:*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Demostració. Deixem la primera propietat com a exercici pel lector.

Per $A \in \mathbb{C}$, podem posar $|A| = e^{i\theta}A$, és a dir, $-\theta \in \arg(A)$. Llavors, prenent $A = \int_a^b f(t)\,dt$ i aplicant (i), tenim que

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = e^{i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b e^{i\theta}f(t)\,dt.$$

Com que

$$\int_a^b e^{i\theta}f(t)\,dt \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b e^{i\theta}f(t)\,dt = \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{i\theta}f(t)\,dt\right),$$

de manera que, fent servir la definició de la integral d'una funció amb valors complexos, veiem que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{i\theta}f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\Big(e^{i\theta}f(t)\Big)dt.$$

Com que $\operatorname{Re}\Big(e^{i\theta}f(t)\Big) \leqslant \Big|e^{i\theta}f(t)\Big| = |f(t)|$, obtenim el resultat. □

Exercicis

4.1.1. *Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t), t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i $z(t)$ és injectiva. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular).* ◁

4.1.2. *Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtexs $-1-i, 1-i, 1+i, -1+i$ seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud?* ◁

4.2. Integració sobre corbes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, i $\gamma : [a, b] \to \Omega$ corba de classe C^1. Definim les *integrals de camí*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt \qquad \text{i} \qquad \int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

En cas que γ sigui un camí (corba C^1 a trossos), ho partim a trossos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt \qquad \text{i} \qquad \int_\gamma f(z)\,|dz| := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Exemple 4.7 (Exemple de dificultat de càlcul)**.** Sigui $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, i sigui $f(z) = e^z$. Llavors

$$\int_\gamma e^z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,ie^{it}\,dt = \quad ?$$

Més endavant, al Corol·lari 4.10, veurem que aquesta integral dona zero. Fer el càlcul directe d'aquest tipus d'integrals pot ser una tasca difícil, encara que de vegades es pot calcular fàcilment. Per exemple, si $\gamma(t) = a + e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ i $k \in \mathbb{Z}$ (donem k voltes al cercle de radi 1 centrat en el punt a: si $k > 0$ anem en sentit contrari a les agulles del rellotge, i al revés si $k < 0$), llavors

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ik\,e^{ikt}}{e^{ikt}}\,dt = 2\pi ik. \qquad \triangleleft$$

Proposició 4.8 (Propietats)**.**

1. *Donat un camí γ, tenim que*

$$\int_\gamma \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. *Si recorrem la corba en sentit invers, el signe canvia, és a dir,*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

3. *Si γ és C^1 a trossos (camí), llavors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

En particular, si $|f| \leqslant M$ per a tot $z \in \gamma^*$, llavors $\left|\int_\gamma f dz\right| \leqslant M\,\mathrm{L}(\gamma)$.

4. Si η és una reparametrització C^1 de γ, llavors

$$\int_\gamma f(z)dz = \pm \int_\eta f(z)dz,$$

on el signe és positiu si la reparametrització preserva el sentit i negatiu en cas contrari.

Demostració. 1. Exercici.

2. Tenim que $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$. Llavors

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma^-(t)\big)\,(\gamma^-)'(t)\,dt = -\int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\,\gamma'(a+b-t)\,dt.$$

Fent el canvi de variable $s = a+b-t$, obtenim

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)(-ds) = -\int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Directe a partir de la definició de la integral sobre una corba i la propietat (ii) del lema 4.6.

4. Tenim que $\eta = \gamma \circ \varphi$, i com que estem treballant amb corbes C^1, l'aplicació bijectiva $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ també ha de ser de classe C^1. Si $\varphi(c) = a$ (la reparametrització preserva el sentit), llavors

$$\int_\eta f(z)dz = \int_c^d f\big(\eta(t)\big)\,\eta'(t)\,dt = \int_c^d f\Big(\gamma\big(\varphi(t)\big)\Big)\gamma'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Llavors, fent el canvi de variable $s = \varphi(t)$, obtenim

$$\int_\eta f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.$$

Si, en canvi, la reparametrització no preserva el sentit, és a dir, si $\varphi(c) = b$, aleshores podem combinar aquesta demostració amb l'apartat 2 per obtenir el signe canviat. □

El següent resultat correspondria a una versió de la *regla de Barrow* del càlcul per integrals sobre corbes.

Teorema 4.9. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f contínua en Ω. Suposem que existeix F* primitiva holomorfa *de f (és a dir, $F' = f$). Aleshores, per a tot camí γ en Ω, es compleix*

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Demostració. Tenim que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt.$$

Si posem $g(t) = u(t) + iv(t) \coloneqq F(\gamma(t))$, com que $(F \circ \gamma)'(t) = F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)$, es compleix que $(F \circ \gamma)'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t)$, de manera que, aplicant la regla de Barrow usual a $\mathbb{R}$, obtenim

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt + i \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} v'(t)\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u(t_k) - u(t_{k-1})) + i \sum_{k=1}^{n} (v(t_k) - v(t_{k-1})) \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = g(b) - g(a) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).\end{aligned}$$

□

Corol·lari 4.10. *[Conseqüències]*

- *Si γ és un camí tancat en Ω i f té primitiva holomorfa en Ω, aleshores*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

  Per exemple, si $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, llavors $\int_\gamma e^z dz = 0$.

- *Si f té primitiva holomorfa en Ω, llavors $\int_\gamma f(z)dz$ no depèn del camí $\gamma : [a, b] \to \Omega$. Només depèn dels punts inicials i finals (no cal ni parametritzar la corba). Per exemple, si γ és un camí que va de 1 a $2i$, aleshores*

$$\int_\gamma z^3 dz = \left[\frac{z^4}{4}\right]_1^{2i} = \left(\frac{(2i)^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

Exercicis

4.2.1. *Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{dz}{|z^m|}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{|z^m|}.$$ ◁

4.2.2. *Sigui $\gamma = \partial D_r(0)$. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\int_\gamma z^n\,dz$.* ◁

4.2.3. *Sigui $\gamma = [i + 1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:*

a) $\int_\gamma \sin(2z)\,dz$ *b)* $\int_{|z|=1} ze^{z^2}\,dz$ *c)* $\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z}\,dz$ ◁

4.2.4. *Avaluar les següents integrals.*

a) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{6}{(z-i)^2}+\frac{2}{z-i}+1-3(z-i)^2\right)dz$ *si* γ *és* $|z-i|=4$ *recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.*

b) $\displaystyle\int_\gamma (x-2xyi)dz$ *al llarg del contorn* $\gamma : z = t+it^2$ *amb* $t\in[0,1]$.

c) $\displaystyle\int_\gamma (|z-1+i|^2-z)dz$ *al llarg de la semicircumferència* $\gamma : z = 1-i+e^{it}$ *on* $t\in[0,\pi]$.

d) La funció no analítica $f(z)=x^2+iy$ *(per què?) al llarg de* $|z|=1$ *recorreguda un cop en sentit antihorari.* ◁

4.2.5. *Calcular les següents integrals al llarg del camí* γ *que s'indica.*

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ *per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de* $-3i$ *a* $3i$. *Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre?* Indicació*: considerar la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si* $y=0, x\leqslant 0$.

b) $\displaystyle\int_\gamma e^z\cos z dz$ *per un camí d'origen* $a=i$ *i final* $b=\pi$.

c) $\displaystyle\int_\gamma z^{1/2}dz$ *per la branca principal de* $z^{1/2}$ *per un camí d'origen* $a=i$ *i final* $b=\pi$ *que no talli la semirecta* $(-\infty,0]$. ◁

4.2.6.

Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ *que és holomorfa a* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ *i positiva a* $(1,\infty)$.

(a) Vegeu que $z+\sqrt{z^2-1}$ *omet l'eix real negatiu si* $z\in\Omega=\mathbb{C}\backslash(-\infty,1]$, *de manera que la determinació principal* $\operatorname{Log}(z+\sqrt{z^2-1})$ *està definida a* Ω.

(b) Vegeu que $\operatorname{Log}(z+\sqrt{z^2-1})$ *és una primitiva de* $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ *a* Ω.

(c) Avalueu $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$, *on* γ *és el tros de cercle* $|z-1|=\sqrt{2}$ *que va de* i *a* $-i$ *passant pel semiplà de la dreta (*$\operatorname{Re} z>0$*).*

Indicació*: comproveu que* $\sqrt{z^2-1}=e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(z-1)+\operatorname{Log}(z+1))}$ *s'estén a* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ *de manera contínua.* ◁

4.2.7. *Siguin* $\gamma_1 := \{|z|=1 : \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ *i* $\gamma_2 := \{|z|=2 : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$. *Demostreu que:*

a) $\left|\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+2}\right| \leqslant \pi$

b) $\left|\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$

c) $\left|\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz\right| \leqslant 2\pi e$

d) $\left|\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz\right| \leqslant \pi e^2.$ ◁

4.2.8. *(a) Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors*

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz.$$

(b) Deduïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$ ◁

4.3. Teorema de Cauchy

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert, $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\overline{U} \subset \Omega$, i tenim dues funcions $f, g \in C^1(\Omega)$, pel teorema de Green[3] (vegeu l'exercici 4.3.4) se satisfà la fórmula de Green en variable complexa:

$$\int_U \left(\partial f + \bar{\partial} g\right)\, dm = \frac{i}{2} \int_{\partial U} \left(f\, d\bar{z} - g\, dz\right). \tag{4.1}$$

Aquí, entenem que $\int_{\partial U} f\, d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}\, dt = \int_\gamma f\, (dx - i dy)$ per alguna corba γ que parametritzi ∂U en sentit antihorari, on indiquem $\int_\gamma F_1\, dx = \int_a^b F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\, dt$ i anàlogament per $\int_\gamma F_2\, dy$. Així doncs, prenent $f = 0$, podem deduir que si $g \in H(\Omega)$, aleshores

$$\int_{\partial U} g(z)\, dz = 0.$$

A continuació obtindrem un resultat lleugerament més general sense fer ús de la fórmula de Green. El primer resultat, anomenat teorema de Cauchy-Goursat[4] o també teorema de Cauchy per triangles, és un resultat clau per tal de provar el teorema de Cauchy per un disc o per oberts convexos. Aquests resultats seran suficients per a veure la fórmula integral de Cauchy i les conseqüències de la teoria local.

Teorema 4.11 (Cauchy-Goursat)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $p \in \Omega$ i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \backslash \{p\})$. Llavors*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$.

[3] George Green, Nottingham, 1793–1841, https://ca.wikipedia.org/wiki/George_Green

[4] Édouard Jean-Baptiste Goursat, París, 1858–1936, https://ca.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Goursat

Observació 4.12.

1. Ens cal tenir tot el triangle ple T dins d'Ω. És a dir, si la frontera del triangle ∂T envolta un forat d'Ω, llavors no s'aplica.
2. En cas que f sigui holomorfa a tot Ω excepte un punt p, però f no és contínua en p, tampoc s'aplica. •

Demostrem abans un cas particular:

Proposició 4.13. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Llavors $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$.*

Demostració. Tenim orientada la frontera ∂T del nostre triangle en sentit contrari a les agulles del rellotge. Fent servir els punts mitjos de cada segment, partim el nostre triangle T en 4 triangles T_1, T_2, T_3, T_4. Totes les fronteres ∂T_i d'aquests triangles venen orientades en sentit contrari a les agulles del rellotge, de manera que el triangle del mig té els costats orientats en sentit contrari als costats comuns dels altres triangles (així quan es fa la suma de les integrals sobre la frontera d'aquests 4 triangles, les integrals en els segments del mig es cancel·len, al calcular-se un en un sentit, i l'altre en sentit contrari). És convenient que us feu el dibuix. Llavors

$$\int_{\partial T} f = \int_{\partial T_1} f + \int_{\partial T_2} f + \int_{\partial T_3} f + \int_{\partial T_4} f.$$

Observem que

$$\mathrm{L}(\partial T_j) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}(\partial T); \quad \operatorname{diam}(T_j) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(T), \qquad 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

Anomenem $T^{(1)} = T_{j_1}$ a un triangle dels 4 que maximitzi el valor absolut de la integral de camí:

$$\left|\int_{\partial T^{(1)}} f\right| \geqslant \left|\int_{\partial T_j} f\right|, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

Llavors

$$\left|\int_{\partial T} f\right| \leqslant 4 \left|\int_{\partial T^{(1)}} f\right|.$$

Repetim el procés amb $T^{(1)}$ per tal d'obtenir un altre triangle $T^{(2)}$ amb propietats anàlogues. De manera inductiva, obtenim una successió $\{T^{(k)}\}$ de triangles que satisfan

(i) $T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \cdots \supset T^{(k)} \supset \ldots$;

(ii)
$$\left|\int_{\partial T^{(k)}} f\right| \leqslant 4 \left|\int_{\partial T^{(k+1)}} f\right|;$$

(iii) $\mathrm{L}\left(\partial T^{(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}(\partial T^{(k)})$ i també $\operatorname{diam}(T^{(k+1)}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(T^{(k)})$.

Tot això implica que

(a)
$$\left|\int_{\partial T} f\right| \leqslant 4^n \left|\int_{\partial T^{(n)}} f\right|;$$

(b) $\mathrm{L}\left(\partial T^{(n)}\right) = 2^{-n}\,\mathrm{L}(\partial T)$ i també $\operatorname{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n}\operatorname{diam}(T)$.

De (b) se segueix que $diam(T^{(n)}) \to 0$, així que juntament amb (i), tenim una successió decreixent de compactes en un espai mètric complet amb diàmetres que tendeixen a zero. Llavors
$$\bigcap_k T^{(k)} = \{z_0\}.$$
Aquest resultat és com el teorema dels intervals encaixats, i se sol veure en assignatures anteriors del grau de matemàtiques.

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és holomorfa en z_0, podem trobar $\delta > 0$ de manera que $D_\delta(z_0) \subset \Omega$ i
$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$
En altres paraules, tenim que
$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon\,|z - z_0|, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{4.2}$$
Prenem n prou gran de manera que $\operatorname{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n}\operatorname{diam}(T) < \delta$. Com que $z_0 \in T^{(n)}$, se segueix que $T^{(n)} \subset D_\delta(z_0)$.

Com que la funció $g_0(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ té primitiva holomorfa (ja que és un polinomi holomorf), tenim que
$$\int_{\partial T^{(n)}} g_0(z)dz = 0,$$
i per tant
$$\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - g_0(z))dz\right| = \left|\int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\,dz\right|.$$
Aplicant (4.2) obtenim
$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)dz\right| &< \varepsilon \int_{\partial T^{(n)}} |z - z_0|\,|dz| \leqslant \varepsilon \operatorname{diam}(T^{(n)})\,\mathrm{L}(\partial T^{(n)}) \\ &= \varepsilon\, 4^{-n} \operatorname{diam}(T)\,\mathrm{L}(\partial T).\end{aligned}$$
Per tant, per (a), veiem que
$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| < \varepsilon \operatorname{diam}(T)\,\mathrm{L}(\partial T).$$
Com que $\varepsilon > 0$ és arbitrari i $\operatorname{diam}(T)$ i $\mathrm{L}(\partial T)$ són fixes, se segueix que
$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$
tal com volíem veure. □

Demostració del teorema de Cauchy-Goursat. En cas que el punt p, on no sabem si f és holomorfa, es trobi fora del triangle ple T, simplement podem agafar una regió Ω' amb $p \notin \Omega'$ de manera que $T \subset \Omega'$. Com que $f \in H(\Omega')$, aplicant la proposició 4.13 obtenim $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

En cas que el punt p es trobi en el triangle ple T, sempre ens reduirem al cas que p sigui un dels vèrtexs del triangle. Anem doncs a fer aquest cas primer.

Si p és un dels vèrtexs del triangle, fixem $\varepsilon > 0$, i partim el triangle T en dues parts. Una que sigui un petit triangle T_ε de diàmetre $< \varepsilon$ amb vèrtex p, i l'altra part quedaria un trapezi Z. Com que el trapezi el podem partir en dos triangles, i el punt p queda fora dels dos triangles plens, aplicant el cas anterior tenim que

$$\int_{\partial Z} f(z)dz = 0.$$

Llavors

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial Z} f(z)dz + \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz.$$

Com que f és contínua en Ω, en particular és contínua en el compacte T, així que hi ha una constant positiva M de manera que $|f(z)| \leqslant M$ per a tot $z \in T$. En particular, $|f(z)| \leqslant M$ per a tot $z \in T_\varepsilon$, i M no depèn de ε. Llavors

$$\left|\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \int_{\partial T_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \leqslant M\,\mathrm{L}(\partial T_\varepsilon) < 3M\,\varepsilon.$$

Com que ε és arbitrari, deduïm que

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Si p es troba en ∂T, llavors ajuntem p amb el vèrtex del triangle que no es troba en el segment que conté p, per formar dos triangles, i pel cas anterior obtenim que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Si p es troba a l'interior del triangle T, ajuntem aquest punt amb tots els vèrtexs del triangle formant tres triangles, i aplicant el cas anterior veiem que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. □

Teorema 4.14 (Teorema de Cauchy per un disc)**.** *Sigui D un disc obert i $f \in C(D)$. Si $f \in H(D\backslash\{p\})$ amb $p \in D$, llavors f té primitiva holomorfa en D, i*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en D.

Demostració. Pel teorema 4.9, només cal provar que f té primitiva holomorfa en D. Fixem $a \in D$, i definim

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw, \qquad z \in D,$$

on $[a, z]$ és el segment que uneix a amb z.

Sigui $z_0 \in D$ i anem a provar que F és holomorfa en z_0 amb $F'(z_0) = f(z_0)$. Ens cal provar que

$$\lim_{|h|\to 0} \left| \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| = 0.$$

Considerem el triangle ∂T amb vèrtexs a, $z_0 + h$, z_0 amb $|h|$ prou petit per tal que $z_0 + h \in D$. Com que tot el triangle ple T es troba dins del disc D, aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, obtenim que

$$\int_{\partial T} f(w)dw = 0.$$

És a dir,

$$\int_{[a,z_0+h]} f(w)dw + \int_{[z_0+h,z_0]} f(w)dw - \int_{[a,z_0]} f(w)dw = 0,$$

així que, tenint en compte la definició de F, tenim que

$$F(z_0+h) - F(z_0) = -\int_{[z_0+h,z_0]} f(w)dw = \int_{[z_0,z_0+h]} f(w)dw.$$

Per tant, com que $f(z_0) = \frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} f(z_0)dw$, arribem a la desigualtat

$$\left| \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| \leqslant \frac{1}{|h|} \int_{[z_0,z_0+h]} |f(w) - f(z_0)|\,|dw|.$$

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és contínua en z_0, hi ha $\delta > 0$ de manera que $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|w - z_0| < \delta$. Prenent doncs h amb $|h| < \delta$, obtenim

$$\left| \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{|h|} L\big([z_0, z_0+h]\big) = \varepsilon,$$

ja que la longitud del segment $[z_0, z_0 + h]$ és $|h|$. □

Observació 4.15. Per tal de poder fer aquesta prova, ha estat clau el fet que podem triar h de manera que el triangle amb vèrtexs a, $z_0 + h$, z_0 es trobi dins de D. Això mateix ho podem fer si agafem un obert convex. Recordem que un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu *convex* si per tot parell de punts $a, b \in \Omega$ el segment $[a, b] \subset \Omega$. Aleshores, la mateixa prova ens serveix canviant el disc obert D, per qualsevol obert convex Ω, de manera que obtenim el següent resultat. •

Teorema 4.16 (Teorema de Cauchy per oberts convexos)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega\backslash\{p\})$ amb $p \in \Omega$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω, i*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en Ω.

Exercicis

4.3.1. *Recordeu que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ *per a tot* $a > 0$. Indicació*: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle* $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx)\, dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

4.3.2. *Determineu el domini d'holomorfia de les funcions* f *donades i digueu perquè* $\int_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$,

b) $f(z) = \operatorname{Log}(z + 3)$. ◁

4.3.3. *Sigui* $u : D \to \mathbb{R}$ *una funció* harmònica *en un disc* D*, és a dir, tal que* $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial u = 0$. *Demostra que existeix una funció* $v : D \to \mathbb{R}$ *harmònica tal que* $(u + iv)$ *és holomorfa. L'anomenem* harmònica conjugada. Indicació*: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per* $F = U + iV$ *es poden escriure com* $\partial F = 2\partial U$ *o com* $\overline{\partial U} = -i\bar{\partial} V$. ◁

4.3.4. *El teorema de Green diu que si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *és un obert i* $U \subset \Omega$ *és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera* C^1*) i tal que* $\overline{U} \subset \Omega$*, aleshores tot camp vectorial* $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *amb* $F \in C^1(\Omega)$ *satisfà que*

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dm = \int_{\partial U} (F_1\, dx + F_2\, dy)\,.$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). ◁

4.3.5. *Continuant amb l'exercici 4.3.4, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, coneguda com a* fórmula de Cauchy-Pompeiu[5]*, que diu que si* $\phi \in C^1(\Omega)$ *i* $z_0 \in U$*, aleshores*

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0}\, dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C_c^1(\Omega)$ *ens diu* $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$*, on* $\mathcal{C}$ *indica la transformada de Cauchy*

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\psi(z)}{z - z_0}\, dm(z).$$ ◁

[5]Dimitrie Pompeiu, Broscăuți, 1873–1954, https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie_Pompeiu

4.4. Fórmula integral de Cauchy

Hem vist les versions locals del teorema de Cauchy, provant el teorema de Cauchy per a un triangle i el teorema de Cauchy en oberts convexos. El proper resultat és la fórmula integral de Cauchy i obtindrem les conseqüències més importants de la teoria local: desenvolupament local en sèries de potències d'una funció holomorfa, zeros de funcions holomorfes (factorització local), principi de prolongació analítica, desigualtats de Cauchy, teorema de Liouville, teorema fonamental de l'àlgebra, teorema de l'aplicació oberta i principi del mòdul màxim.

Teorema 4.17 (Fórmula integral de Cauchy (versió local))**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \qquad |z_0 - a| < r,$$

on $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Observació 4.18. Ens cal tenir tot el disc tancat $\overline{D_r(a)}$ dins d'Ω. Aleshores, el resultat no s'aplicaria necessàriament si, per exemple, $\Omega = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. El teorema, ara com ara exclouria fins i tot el cas que f fos contínua en $\overline{\mathbb{D}}$ (ens caldria tenir f holomorfa en un obert que contingui $\overline{\mathbb{D}}$), tot i que aquest cas es pot demostrar per pas al límit. •

Observació 4.19. Moltes vegades al llarg del text, farem us de la notació $\int_{|z-a|=r} f(z)\, dz$ per indicar que estem integrant sobre la corba $\sigma_a(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (fent només una volta al cercle). Així, la fórmula integral de Cauchy es pot escriure com

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \qquad |z_0 - a| < r.$$

•

Demostració. Com que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$, hi ha $r_1 > r$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset D := D_{r_1}(a) \subset \Omega$. Fixem $z_0 \in \Omega$, i definim la funció

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si} \quad z \in D \backslash \{z_0\} \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Clarament g és holomorfa en $D\backslash\{z_0\}$. Vegem que g és també contínua en z_0, ja que al ser f holomorfa, aleshores

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0).$$

Així doncs, tenim que $g \in C(D) \cap H(D\backslash\{z_0\})$. Com que $\gamma_r \subset D$, pel teorema de Cauchy per un disc se segueix que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = 0.$$

És a dir,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Per tant,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z-z_0}\right).$$

Per acabar la prova, ens cal veure que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z-z_0} = 1, \qquad z_0 \in D_r(a). \tag{4.3}$$

Recordem que si $z_0 = a$ i $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, aleshores (4.3) es compleix, vegeu l'exemple 4.7. Volem veure que això segueix sent cert per a qualsevol altre punt de $D_r(a)$. Observem primer que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}+(a-z_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+(a-z_0)}{re^{it}+(a-z_0)}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a-z_0)\,dt}{re^{it}+(a-z_0)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a-z_0)\,dt}{re^{it}+(a-z_0)}.$$

Per tant, només cal provar que

$$I := \int_0^{2\pi}\frac{(a-z_0)\,dt}{re^{it}+(a-z_0)} = 0.$$

Si $z_0 = a$ no hi ha res a provar. Llavors suposem que $z_0 \neq a$. Si $\eta(t) = e^{-it}$, amb $t \in [0, 2\pi]$, tenim $\eta^* = \partial\mathbb{D}$ i $\eta'(t) = -ie^{-it}$. Aleshores,

$$I = (a-z_0)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{e^{it}(r+(a-z_0)e^{-it})} = -\frac{(a-z_0)}{i}\int_\eta \frac{dw}{r+(a-z_0)w}.$$

Ara, posant $h(w) = (r+(a-z_0)w)^{-1}$, només ens cal provar que

$$\int_{|w|=1} h(w)dw = 0,$$

seguint la notació introduïda a l'observació 4.19, i això ens ho dona el teorema de Cauchy per un disc, si podem veure que h és holomorfa en un disc centrat al 0 de radi $R > 1$. Ara bé, h és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en el punt $w_0 = \frac{r}{z_0 - a}$, i com que $|w_0| > 1$, podem trobar tal R, així que ja hem provat el que es demanava. □

Observació 4.20. Aplicant el teorema de Cauchy per oberts convexos, fent servir la mateixa prova, podem demostrar el següent resultat:

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, γ camí tancat d'Ω i $f \in H(\Omega)$. Aleshores

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\, \mathrm{Ind}(\gamma, z_0), \qquad z_0 \notin \gamma^*,$$

on

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

és l'*índex* de γ respecte al punt z_0. Més endavant, veurem la interpretació geomètrica de l'índex com també algunes propietats (essencialment compta el número de voltes que fa γ al voltant del punt z_0). •

Fins al final del capítol, estudiem les conseqüències directes de la fórmula integral de Cauchy. Comencem per la propietat de la mitjana.

Lema 4.21 (Propietat de la mitjana)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$ i suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Demostració. Per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Parametritzant la corba fent $z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ens queda

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

□

Exercicis

4.4.1. *Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:*

a) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz$;

b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$;

d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1}$;

e) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3}$;

f) $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz$;

g) $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz$;

h) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz$. ◁

4.4.2. *Sigui p un polinomi de grau n, amb tots els seus zeros continguts en $D_R(0)$. Demostreu que*

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = 2\pi i n. \qquad \triangleleft$$

4.4.3. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z}\right) dz$, i deduïu que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,dt}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leqslant r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \qquad \triangleleft$$

4.4.4. *Siguin $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1}\right) dw. \qquad \triangleleft$$

4.4.5. *Es consideren els següent exercicis relacionats amb la Fórmula Integral de Cauchy.*[6]

a) Calculeu $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$ sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.

b) És cert que $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z}\,dz = 0$ si C és tancada i simple?

4.5. Sèries de potències

Teorema 4.22 (Desenvolupament local en sèrie de potències)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Tota funció holomorfa en Ω és localment una sèrie de potències. Concretament, si $R_a = \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad \text{per tot } |z-a| < R_a,$$

amb

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw, \qquad \text{per tot } r < R_a$$

i el radi de convergència de la sèrie és major o igual a R_a.

Combinant aquest resultat amb el teorema 3.30, veiem que f és holomorfa en Ω si i només si f hi és analítica.

[6] De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

Demostració. Per $0 < r < R_a$, tenim que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Aplicant la fórmula integral de Cauchy obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \qquad |z-a| < r.$$

Volem escriure aquesta integral com una sèrie de potències. Tenim que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{(z-a)}{w-a}\right)}.$$

Ara, observem que per w amb $|w-a| = r$, tenim que

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1,$$

i per tant

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.$$

Llavors

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Introduint aquesta expressió en la fórmula integral de Cauchy, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\, \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw.$$

Ara volem intercanviar l'ordre d'integració amb el sumatori. Això ho podem fer si la sèrie de funcions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a| = r\}$, on

$$f_n(w) = f(w)\, \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Per w amb $|w-a| = r$, tenim que

$$|f_n(w)| \leqslant \left(\max_{w:|w-a|=r} |f(w)| \right) \frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leqslant \frac{C_r}{r} \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n.$$

Com que $|z-a| < r$, llavors $\sum_n \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n < \infty$, així que aplicant el criteri M de Weierstrass, se segueix que la sèrie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a| = r\}$. Intercanviant doncs la integració amb el sumatori, tenim que per $|z-a| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n. \qquad \square$$

Corol·lari 4.23. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Aleshores $f \in C^\infty(\Omega)$ i totes les seves derivades són holomorfes.*

Demostració. Com que això ja ho sabem per sèries de potències, és conseqüència del resultat anterior. $\square$

Exercicis

4.5.1. *Desenvolupeu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:*

a) $1/z$, $a=1$,

b) z^2e^z, $a=0$,

c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a=0$,

d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a=0$,

e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a=0$,

f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a=0$.

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). ◁

4.5.2. *Sigui $\alpha\in\mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha\mathrm{Log}(1+z)}$ llavors per $|z|<1$*

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots$$

(generalització del binomi de Newton*).*

4.5.3. *Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:*

a) $f(z)=\cos^2 z$, $a=0$.

b) $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a=1$.

c) $\sqrt[3]{z}$, $a=1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ és la determinació de l'arrel cúbica en $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ que val $(-1+i\sqrt{3})/2$ en $z=1$. ◁

4.5.4. *Considereu la funció $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ i el punt $a=-1$.*

1. *"Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a.*
2. *Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a.* ◁

4.5.5. *a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?*

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\dfrac{1}{2-z}+\dfrac{z}{3-z}$?

4.5.6. *Determinar com a mínim els coeficients a_1,a_2,a_3,a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$ centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$.*

4.5.7. *Vegem com el teorema 4.22 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real f és analítica en un interval obert $I\subset\mathbb{R}$ si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostra que si f és analítica en I aleshores hi és derivable. Troba una funció infinites vegades derivable en $\mathbb{R}$ que no hi sigui analítica. Troba una funció f analítica en $\mathbb{R}$ que tingui radi de convergència 1.*

4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

Com que també sabem que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (vegeu l'observació 3.31), obtenim el següent resultat

Lema 4.24 (Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$ i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Notem que el requisit que la circumferència estigui centrada en a serà relaxat en el corol·lari 4.38.

Exemple 4.25. Calculem

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z-1)^2}\, dz.$$

La funció $f(z) = ze^z$ és entera. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim que

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i\, f'(1) = 4\pi i\, e.$$

◊

Lema 4.26 (Desigualtats de Cauchy)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!\, M_r}{r^n}, \qquad n \geqslant 0,$$

on $M_r = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Observació 4.27. En particular, tenim que $|f(a)| \leqslant \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$. •

Demostració. Aplicant la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Per tant

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leqslant \frac{n!}{2\pi} \int_{|w-a|=r} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}}\, |dw| = \frac{n!}{2\pi\, r^{n+1}} \int_{|w-a|=r} |f(w)|\, |dw| \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi\, r^{n+1}}\, M_r\, \mathrm{L}\left(\{|w-a| = r\}\right) = \frac{n!\, M_r}{r^n}. \end{aligned}$$

□

Observació 4.28. La desigualtat no es pot millorar. Per exemple, sigui $f(z) = z^n$, $a = 0$ i $r = 1$. En aquest cas, $M = M_1 = \sup_{|z|=1} |f(z)| = 1$, i també tenim que $f^{(n)}(0) = n!$, així que $|f^{(n)}(0)| = n!\, M$. •

Exercicis

4.6.1. *Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ calculeu*

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.2. *Siguin $0 \leqslant m \leqslant n$ enters. Calculeu*

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}}\, dz. \quad \triangleleft$$

4.6.3. *Intenteu calcular $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades (potser cal recordar la desigualtat $|\int_\Gamma f(z)dz| \leqslant \int_\Gamma |f(z)||dz|$.)*

a) Considereu la semicircumferència C en el semiplà superior centrada a 0 amb radi R i tancada pel segment de l'eix OX. Calculeu $\displaystyle\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és el segment de $-R$ a R i C_2 la part restant de C. Fent servir la desigualtat triangular per integrals donar una fita superior de $\left|\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz\right|$.

c) Fent servir els apartats anteriors calcular $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$. Que passa si R tendeix a infinit? $\triangleleft$

4.6.4. *Sigui $\alpha > 0$ i $f \in H(\mathbb{D})$ complint que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1-|z|)^\alpha |f(z)| \leqslant c$. Demostreu que per a tot $n \geqslant 0$, $|f^{(n)}(0)| \leqslant cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha$.* $\triangleleft$

4.6.5. *Sigui f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leqslant M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant CMe$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.*
Indicació*: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant \frac{M}{r} e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$.* $\triangleleft$

4.6.6. *(a) Suposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leqslant M$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen*

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{R^k}.$$

(b) Suposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està acotat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul acotat per 1. $\triangleleft$

4.6.7. *Proveu que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leqslant |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\, e. \quad \triangleleft$$

4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

Teorema 4.29 (Teorema de Liouville)**.** *Tota funció entera i fitada és constant.*

Demostració. Sigui $z \in \mathbb{C}$. Per a tot $R > 0$, tenim que $\overline{D_R(z)} \subset \Omega = \mathbb{C}$ i $f \in H(\mathbb{C})$. Com que $|f(w)| \leqslant M$ per a tot $w \in \mathbb{C}$, aplicant les desigualtats de Cauchy amb $n = 1$, obtenim

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1!\,M}{R} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$, ja que M no depèn de R. Per tant $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i f és constant. □

Corol·lari 4.30. *Si f és entera amb $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, llavors f és constant.*

Demostració. En efecte, considerem la funció entera $g(z) = e^{-f(z)}$. Llavors

$$|g(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leqslant e^0 = 1,$$

de manera que g és entera i fitada. Pel teorema de Liouville, g és constant, i per tant f és constant. □

Teorema 4.31 (Teorema fonamental de l'àlgebra)**.** *Sigui P un polinomi (holomorf) no constant. Hi ha $z_0 \in \mathbb{C}$ amb $P(z_0) = 0$.*

Demostració. Suposem que $P(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aleshores la funció $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ és entera. Si veiem que és fitada, aplicant el teorema de Liouville arribaríem a contradicció. Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, llavors

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \longrightarrow +\infty$$

quan $|z| \to +\infty$, així que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$, fet que clarament implica que f és fitada. Com que f és entera i fitada, pel teorema de Liouville, f ha de ser constant, de manera que P és constant !! □

Corol·lari 4.32. *Tot polinomi de grau n té exactament n arrels complexes (comptant multiplicitats).*

Demostració. Sabem que P té un zero, diem α_1. Llavors $P(z) = (z - \alpha_1)P_1(z)$, on P_1 és un polinomi de grau $n - 1$, que també té un zero si $n \geqslant 2$. Iterant aquest procés obtenim el resultat. □

Exercicis

4.7.1. *Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim.* ◁

4.7.2. *La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \to \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el Teorema de Liouville?* ◁

4.7.3. *Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu*

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. ◁

4.7.4. *Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leqslant |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.* ◁

4.7.5. *Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que*

(a) Si $|f| \geqslant 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, llavors f és constant.

(c) Si $\operatorname{Im} f \leqslant 1$, llavors f és constant. ◁

(d) Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.

4.7.6. *Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leqslant Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f?* ◁

4.7.7. *Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f?* ◁

4.8. Teorema de Morera

Teorema 4.33 (Teorema de Morera)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in C(\Omega)$. Si per a tot triangle $T \subset \Omega$, es té*

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0,$$

llavors f és holomorfa en Ω.

Demostració. Si resseguim la prova del teorema de Cauchy per un disc, veiem que hem provat que si $D \subset \Omega$ és un disc obert, $f \in C(D)$ i $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset D$, llavors f té primitiva holomorfa en D.

Fixem $z_0 \in \Omega$, i prenem $r > 0$ de manera que $D_r(z_0) \subset \Omega$. Llavors f té primitiva F holomorfa en $D_r(z_0)$, així que $f = F'$ és holomorfa en z_0. □

Corol·lari 4.34. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \backslash \{p\})$. Llavors $f \in H(\Omega)$.*

Demostració. Pel teorema de Cauchy-Goursat, tenim que $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$, i aplicant el teorema de Morera, se segueix que f és holomorfa en Ω. □

Teorema 4.35 (Principi de reflexió de Schwarz[7]). *Sigui Ω un domini simètric respecte de l'eix real, i anomenem $\Omega_+ = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ i $\Omega_- = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. Sigui $g \in H(\Omega_+)$ tal que per tot $x \in \mathbb{R} \cap \Omega$ existeix $g(x) := \lim_{\Omega_+ \ni z \to x} g(z)$ i $g(x) \in \mathbb{R}$. Aleshores la funció*

$$f(z) := \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \\ g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \cap \Omega \\ \overline{g(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega_- \end{cases}$$

satisfà que $f \in H(\Omega)$.

Demostració. Que $f \in C(\Omega)$ és un exercici (vegeu l'exercici 4.8.1). Per veure que f és holomorfa n'hi ha prou amb veure que integra zero en triangles, en el sentit del teorema de Morera.

Notem que $f \in H(\Omega_-)$ per la regla de la cadena (vegeu l'observació 3.25, el lema 3.24 i l'exemple 3.18), doncs per $z \in \Omega_-$ tenim que

$$\bar\partial f(z) = \overline{\partial \bar f}(z) = \overline{\partial g(\bar{\cdot})(z)} = \overline{\bar\partial g(\bar z) \cdot 1} = 0.$$

Per veure que la integral

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

s'anul·la en triangles que intersequin amb la recta real, n'hi ha prou amb veure que s'anul·la en quadrilàters convexos continguts en $\Omega_- \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ o en $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ i amb un costat contingut en la recta real. Ara, aquesta integral s'anul·la en quadrilàters continguts en Ω_- o en Ω_+ per l'holomorfia de f en aquests dos dominis (i de Cauchy-Goursat), i per pas al límit obtenim el mateix per quadrilàters convexos amb un costat contingut en $(\Omega \cap \mathbb{R})$. □

Teorema 4.36 (Teorema de Weierstrass). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions de $H(\Omega)$ de manera que $f_n \to f$ uniformement sobre els compactes d'Ω. Llavors $f \in H(\Omega)$, i $f_n' \to f'$ uniformement sobre els compactes d'Ω.*

Demostració. Com que $f_n \in H(\Omega) \subset C(\Omega)$ i $f_n \to f$ uniformement sobre compactes, se segueix que $f \in C(\Omega)$. Llavors, pel teorema de Morera, per provar que $f \in H(\Omega)$, ens cal veure que

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$. Fixem $T \subset \Omega$ triangle. Com que $f_n \to f$ uniformement en el compacte ∂T, podem passar el límit a fora de la integral en el càlcul que segueix,

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = \int_{\partial T} \lim_n f_n(z)\, dz = \lim_n \int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0,$$

ja que, al ser f_n holomorfes en Ω, aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, tenim que

$$\int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0.$$

[7] Karl Hermann Amandus Schwarz, Sobieszów, 1843–1921, https://ca.wikipedia.org/wiki/Hermann_Schwarz

Finalment, per veure que $f' = \lim_n f_n'$ i que la convergència és uniforme en compactes, n'hi ha prou amb veure que ho és en $K_\varepsilon = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \Omega^c) \geqslant \varepsilon\} \cap \overline{D_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}$ per $\varepsilon > 0$. Aleshores (sempre que $K_\varepsilon \neq \varnothing$), usem la fórmula integral de Cauchy per a derivades amb radi $r = \varepsilon/2$, i obtenim

$$\sup_{z_0 \in K_\varepsilon} \left|f'(z_0) - f_n'(z_0)\right| \overset{\text{L.4.24}}{=} \sup_{z_0 \in K_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-z_0)^2}\, dz \right| \leqslant \frac{1}{r} \sup_{K_{\varepsilon/2}} |f - f_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

suposant que ε és prou petit (fa falta ja que quan $z \in \partial D_r(z_0)$ tenim que $|z| \leqslant |z_0| + r \leqslant \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$ i, per tant, $z \in K_{\varepsilon/2}$ si, per exemple $\varepsilon < 1$). □

Exercicis

4.8.1. *Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz.* ◁

4.8.2. *Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corol·lari 4.34 del teorema de Morera?* ◁

4.8.3. *(a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui*

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-itz} dt$$

(quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h; si prenem iz en el lloc de z, H s'anomena transformada de Laplace[8] *bilateral de h). Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leqslant Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.*

(b) Sigui h una funció contínua a $[0,1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert[9]

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$. ◁

4.8.4. *Sigui f holomorfa en un obert Ω, i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que hi ha $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat*

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació*: proveu primer que la funció G definida per*

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & si \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω. ◁

[8] Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749–1827, https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

[9] David Hilbert, Königsberg, 1862–1943, https://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \qquad |z_0 - a| < r.$$

També tenim la fórmula integral de Cauchy per derivades.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Observem aquí una diferència: podem aplicar la fórmula integral de Cauchy per a tot $z_0 \in D_r(a)$; i en canvi en la versió per derivades només tenim l'enunciat per a $z_0 = a$, que és el centre del disc. Així doncs, una qüestió que ens apareix de manera natural és si en la fórmula integral de Cauchy per derivades, també podem agafar $z_0 \in D_r(a)$ igual que en la fórmula de Cauchy. La resposta és que sí, i serà conseqüència del següent resultat.

Teorema 4.37 (Derivació sota el signe d'integració)**.** *Siguin $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ oberts i $\gamma : [a,b] \to \Omega_2$ un camí en Ω_2. Sigui $F : \Omega_1 \times \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ una funció contínua. Si $F(\cdot, z)$ és holomorfa en Ω_1 per a cada $z \in \gamma^* := \gamma([a,b])$, llavors la funció definida per*

$$f(w) = \int_\gamma F(w,z)\, dz, \qquad w \in \Omega_1$$

és holomorfa en Ω_1 amb

$$f'(w) = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial w}(w,z)\, dz, \qquad w \in \Omega_1.$$

Abans de passar a la prova d'aquest teorema, apliquem-lo per provar la versió desitjada de la fórmula integral de Cauchy per derivades.

Corol·lari 4.38 (Fórmula integral de Cauchy per derivades)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad |z_0 - a| < r,$$

Demostració. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, com que f és holomorfa en Ω, per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_{|z-a|=r} F(w,z)\, dz, \qquad w \in D_r(a),$$

on

$$F(w,z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)}.$$

Passarem a aplicar el teorema de derivació sota el signe integral amb $\Omega_1 = D_r(a)$, $\Omega_2 = \Omega$ i la corba $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Tenim que $\gamma^* = \gamma[0, 2\pi] = \{z : |z - a| = r\}$. Com que $w \in D_r(a)$ i $|z - a| = r$, llavors clarament F és contínua en $D_r(a) \times \gamma[0, 2\pi]$, i també, per $z \in \gamma[0, 2\pi]$ fixat, la funció $F_z(w) = F(w, z)$ és holomorfa en w. Així doncs, aplicant el teorema de derivació sota el signe integral, se segueix que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz, \qquad w \in D_r(a).$$

Iterant aquesta fórmula, obtenim que

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz, \qquad |w - a| < r.$$

□

Per provar el teorema 4.37, és suficient demostrar el següent cas particular.

Proposició 4.39. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $F : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$ contínua. Si $F(w, s)$ és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$, llavors la funció*

$$f(w) = \int_a^b F(w, s)\, ds$$

és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, s)\, ds, \quad w \in \Omega.$$

Demostrem ara el teorema de derivació sota el signe integral a partir de la proposició anterior.

Demostració del teorema 4.37. Podem suposar que γ és de classe C^1. Llavors

$$\int_\gamma F(w, z)\, dz = \int_a^b F(w, \gamma(s))\, \gamma'(s) ds = \int_a^b G(w, s)\, ds,$$

on $G(w, s) = F(w, \gamma(s))\, \gamma'(s)$ que és clarament contínua en $\Omega_1 \times [a, b]$ degut a la hipòtesi sobre F. També G és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$. Per tant, aplicant la proposició, se segueix que f és holomorfa en Ω_1 amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, \gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial w}(w, z)\, dz.$$ □

Demostració de la proposició. Podem suposar $a = 0$ i $b = 1$. Per $n \geqslant 1$, considerem la suma finita de funcions

$$f_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\big(w, \frac{k}{n}\big), \qquad w \in \Omega.$$

Com que, per hipòtesi, les funcions $F(w, \frac{k}{n})$ són holomorfes en w i en tenim una suma finita, se segueix que les funcions f_n són holomorfes en Ω.

Per veure que f és holomorfa en Ω, provarem que $f_n \to f$ uniformement sobre els compactes d'Ω, així que aplicant el teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.36), obtindrem que $f \in H(\Omega)$.

Sigui $K \subset \Omega$ compacte. Recordem que una funció contínua en un compacte és uniformement contínua. Per tant, al ser F contínua en el compacte $K \times [0,1]$, donat $\varepsilon > 0$, hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$\sup_{w \in K} \Big| F(w, s_1) - F(w, s_2) \Big| < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad |s_1 - s_2| < \delta. \tag{4.4}$$

Observem que, com que $\frac{1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$, tenim que

$$f_n(w) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(w, \frac{k}{n}\right) ds.$$

També

$$f(w) = \int_0^1 F(w,s)\, ds = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(w,s)\, ds.$$

Aleshores, si $n > 1/\delta$ i $w \in K$,

$$\begin{aligned} \big| f_n(w) - f(w) \big| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w,s) \right) ds \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w,s) \right| ds \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{(k-1)}{n} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

on hem aplicat (4.4), ja que per $s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Obtenim $\big|s - \frac{k}{n}\big| < \frac{1}{n} < \delta$, ja que hem triat $n > 1/\delta$. Per tant,

$$\sup_{w \in K} \big| f_n(w) - f(w) \big| < \varepsilon, \qquad n > 1/\delta,$$

provant que $f_n \to f$ uniformement en compactes d'Ω, i per tant f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass.

Fixem ara $w \in \Omega$ i prenem $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(w)} \subset \Omega$. Per la fórmula integral de Cauchy per derivades (la versió on prenem el centre del disc, que ja tenim provada), tenim que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{1}{(z-w)^2} \left(\int_0^1 F(z,s)\, ds \right) dz.$$

Finalment, aplicant el teorema de Fubini obtenim

$$f'(w) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z,s)}{(z-w)^2}\, dz \right) ds = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial w}(w,s)\, ds,$$

ja que com que fixat $s \in [0,1]$, la funció $F_s(w) = F(w,s)$ és holomorfa, per la fórmula integral de Cauchy per la derivada, tenim que

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w,s) = F_s'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{F_s(z)}{(z-w)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{F(z,s)}{(z-w)^2}\,dz.$$

Per tal de justificar l'aplicació del teorema de Fubini, cal provar que

$$J := \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_{|z-w|=r} \frac{|F(z,s)|}{|z-w|^2}\,|dz|\right) ds < \infty.$$

Com que F és contínua en $\Omega\times[0,1]$, en particular és contínua en el compacte $\partial D_r(w)\times[0,1]$ i, per tant, fitada en aquest compacte. Llavors hi ha una constant $M > 0$ de manera que $|F(z,s)| \leqslant M$ per a tot z amb $|z-w| = r$ i tot $s \in [0,1]$. Llavors

$$J = \frac{1}{2\pi r^2}\int_0^1 \int_{|z-w|=r} |F(z,s)|\,|dz|\,ds \leqslant \frac{M}{2\pi r^2}\int_0^1 2\pi r\,ds < \infty. \qquad \square$$

Exercicis

4.9.1. *Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades*

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-1/2)^2}dz.$ *b)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z-2)^4}dz.$ *c)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{e^{i\theta}}\,d\theta.$ ◁

4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

Tot seguit estudiem el conjunt de punts on una funció holomorfa donada val zero, l'anomenat *conjunt de zeros* de la funció. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$, i escrivim

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Proposició 4.40. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si existeix $a \in \Omega$ de manera que $f^{(n)}(a) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, llavors $f \equiv 0$.*

Demostració. Sigui

$$A = \big\{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\big\}.$$

Tenim que A és no buit ja que $a \in A$. Vegem que A és relativament tancat en Ω. Donada una successió $\{b_k\} \subset A$ amb $b_k \to b \in \Omega$, volem provar que $b \in A$. Com que cada $f^{(n)}$ és contínua i $b_k \in A$, tenim que

$$f^{(n)}(b) = f^{(n)}(\lim_k b_k) = \lim_k f^{(n)}(b_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b \in A.$$

Per tant A és tancat en Ω. Vegem que A és obert. Sigui $b \in A$. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D_r(b)} \subset \Omega$ i

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n = 0, \qquad z \in D_r(b).$$

Com que $f(z) = 0$ per a tot $z \in D_r(b)$, se segueix que $D_r(b) \subset A$ així que A també és obert.

Com que Ω és connex, i A és no buit, i obert i tancat en Ω a la vegada, se segueix que $A = \Omega$ i $f \equiv 0$ en Ω. □

Teorema 4.41. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Per a tot $z_0 \in Z(f)$ hi ha un únic $m \in \mathbb{N}$ (anomenat l'ordre o multiplicitat del zero z_0) de manera que*

$$f(z) = (z-z_0)^m\, g(z), \qquad z \in \Omega,$$

on $g \in H(\Omega)$ amb $g(z_0) \neq 0$.

Demostració. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ i tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n, \qquad z \in D_r(z_0).$$

Sabem que $a_0 = f(z_0) = 0$. Sigui m el mínim nombre natural amb $a_m \neq 0$ (aquest mínim existeix per la proposició anterior, ja que $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$). Tenim que

$$f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^m\, h(z), \qquad z \in D_r(z_0),$$

amb

$$h(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{k \geqslant 0} a_{m+k}(z-z_0)^k, \qquad z \in D_r(z_0)$$

que és holomorfa en $D_r(z_0)$ amb $h(z_0) \neq 0$. Finalment, definint

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{si} \quad z \in \Omega\backslash\{z_0\} \\ \\ h(z_0) & \text{si} \quad z = z_0, \end{cases}$$

tenim que $\lim_{z\to z_0} g(z) = a_m = h(z_0) \neq 0$, g és holomorfa en $\Omega\backslash\{z_0\}$ i g és contínua en z_0 i, per tant, holomorfa en tot Ω, vegeu el corol·lari 4.34. □

Exemple 4.42. Trobem la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció

$$f(z) = 6\sin(z^3) + z^9 - 6z^3.$$

Tenim que

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7),$$

vegeu l'Observacio 3.3. Per tant,

$$\sin(z^3) = z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{5!} + \mathcal{O}(z^{21}),$$

així que

$$f(z) = 6\sin(z^3) + z^9 - 6z^3 = \frac{6z^{15}}{5!} + o(z^{20}),$$

i per tant $z = 0$ té ordre o multiplicitat 15.

$\Diamond$

Corol·lari 4.43. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Llavors els zeros de f són aïllats.*

Demostració. Sigui $z_0 \in Z(f)$. Pel teorema anterior existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb $g \in H(\Omega)$ i $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat, hi ha $\varepsilon > 0$ de manera que $g(z) \neq 0$ per $z \in D_\varepsilon(z_0)$, així que $f(z) \neq 0$ si $z \in D_\varepsilon(z_0)$ amb $z \neq z_0$. □

Recordem que z_0 és un punt d'acumulació d'un conjunt A si hi ha una successió $(z_n)_n \subset A\backslash\{z_0\}$ amb $z_n \to z_0$.

Teorema 4.44 (Principi de prolongació analítica)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $Z(f)$ té un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv 0$ en Ω.*

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ punt d'acumulació de $Z(f)$, és a dir, hi ha $z_n \in Z(f)$ amb $z_n \to z_0$. Com que f és contínua, llavors $f(z_0) = \lim_n f(z_n) = 0$, i $z_0 \in Z(f)$, pel que z_0 és un zero de f que no és aïllat. Com que sabem que els zeros d'una funció holomorfa no idènticament nul·la són aïllats, això implica que $f \equiv 0$. □

Corol·lari 4.45. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa, no idènticament zero. Llavors el conjunt de zeros de f és un conjunt finit o numerable.*

Demostració. Podem escriure $\Omega = \bigcup_n K_n$, on $K_n := \{z \in \mathbb{C};\, d(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n}\} \cap \overline{D_n(0)}$. Llavors, per a cada n, K_n és compacte (tancat i fitat a $\mathbb{C}$). Donat que f no és idènticament zero, els zeros són aïllats, i es compleix en particular que $Z(f) \cap K_n$ és finit (si no hi hauria un punt d'acumulació), així que

$$Z(f) = \bigcup_n (Z(f) \cap K_n)$$

és finit o numerable en ser unió numerable de conjunts finits. □

Observació 4.46. En cas que f tingui un número infinit de zeros, aquests s'han d'acumular a la frontera d'Ω. Si f és entera, llavors els zeros s'acumulen a $\{\infty\}$. Per exemple, els zeros de $f(z) = \sin z$ són $k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. •

El principi de prolongació analítica s'aplica moltes vegades en la forma següent:

Corol·lari 4.47 (Principi de prolongació analítica, versió 2)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f, g \in H(\Omega)$. Si $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ té un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv g$ en Ω.*

Demostració. Apliquem el principi de prolongació analítica a la funció holomorfa $h = f - g$, i obtenim el resultat, ja que $Z(h) = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. □

En particular, si Ω és connex i $f, g \in H(\Omega)$ coincideixen en, per exemple, un obert, o bé un arc, o una recta, o un cercle, o un segment; llavors $f \equiv g$ en Ω.

Exemple 4.48. Cerquem totes les funcions $f \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 1$. Observem que

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \Big(\frac{1}{n}\Big)^2 \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}.$$

Llavors la funció $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ és holomorfa en $\mathbb{D}$ i compleix que $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, i deduïm que $f, g \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$. Com que $\frac{1}{n} \to 0 \in \mathbb{D}$ i $\mathbb{D}$ és connex, llavors aplicant el principi de prolongació analítica, obtenim que

$$f(z) = g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

◊

Exercicis

4.10.1. *Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:*

$$a)\quad \frac{z^2+1}{z^2-1} \qquad b)\quad z^2 \sin z \qquad c)\quad f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}\ . \qquad \triangleleft$$

4.10.2. *Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2\cos z^3 + z^6 - 2$.* ◁

4.10.3. *Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:*

a) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$.

b) $f(z) = (z^2 - \pi^2)\sin z/z$.

c) $f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3$.

Aquí $\sqrt{\cdot}$ és la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ que val -1 en $z = 1$. ◁

4.10.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ a una regió Ω és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.* ◁

4.10.5. *Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0,1)$ i tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:*

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n, aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n, aleshores f és constant. ◁

4.10.6. *Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:*

(a) $|f(1/n)| \leqslant 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geqslant 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1+n^3) - 3\ln n$ per a $n > 1$. ◁

4.10.7. *Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D_2(0)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$.* ◁

4.10.8. *Sigui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat.* ◁

4.10.9. *(a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leqslant C|z|^n$, per a $|z| \geqslant R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n.*

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació*: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \ldots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z-a_1)\cdots(z-a_n)$.* ◁

4.10.10. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim*

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x,0) = g(x) \quad v(x,0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$ ◁

4.11. El principi del mòdul màxim

Una característica de les funcions holomorfes és que no poden tenir màxims absoluts en el seu domini de definició. Podem observar el contrast amb l'anàleg real: existeixen moltes funcions derivables amb màxims absoluts en l'interior del domini de definició com, per exemple, la funció $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 1 - x^2$ que té un màxim absolut en $x = 0$.

Teorema 4.49 (Principi del mòdul màxim)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim absolut en Ω, llavors f és constant.*

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ amb $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ per a tot $z \in \Omega$. Posem

$$A = \big\{z \in \Omega : |f(z)| = |f(z_0)|\big\}.$$

Es compleix que A és no buit ja que $z_0 \in A$. Com que Ω és connex, si veiem que A és obert i tancat en Ω, tindrem que $A = \Omega$, que implica que $|f|$ és constant i, per l'exercici 3.2.6, també f és constant. Ja sabem que A és tancat en Ω, ja que $|f|$ és contínua i $A = (|f|)^{-1}(x_0)$ amb $x_0 = |f(z_0)|$.

Vegem que A és obert. Donat $a \in A$, volem trobar $r > 0$ de manera que $D_r(a) \subset A$. Sigui $r > 0$ tal que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Per la propietat de la mitjana, es compleix llavors que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + se^{it})\, dt, \qquad 0 < s \leqslant r.$$

Per tant, com que $a \in A$, obtenim

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{it})|\, dt \leqslant |f(z_0)| = |f(a)|, \qquad 0 < s \leqslant r.$$

Com que $|f|$ és contínua i $|f(a + se^{it})| \leqslant |f(a)|$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$, es verifica que

$$|f(a)| = |f(a + se^{it})|, \quad \forall t \in [0, 2\pi], \qquad 0 < s \leqslant r.$$

És a dir, $D_r(a) \subset A$. □

Passem ara a veure algunes conseqüències, que quan les apliquem, seguirem dient que apliquem el principi del mòdul màxim.

Corol·lari 4.50. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ regió fitada, i $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Llavors el màxim de $|f|$ s'assoleix a la frontera $\partial\Omega$.*

Demostració. Com que Ω és fitat, llavors $\overline{\Omega}$ és un tancat i fitat de $\mathbb{C}$ i per tant compacte. Com que $|f|$ és contínua en el compacte $\overline{\Omega}$, llavors $|f|$ té un màxim absolut en un punt a de $\overline{\Omega}$. Si $a \in \Omega$, pel principi del mòdul màxim, llavors $|f|$ és constant, així que, en particular, $|f|$ assoleix el màxim en tot punt $w \in \partial\Omega$. □

Corol·lari 4.51. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim local en Ω, llavors f és constant.*

Demostració. Per hipòtesi, hi ha $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ per a tot $z \in D_r(a)$. Com que $f \in H(D_r(a))$ i $|f|$ té un màxim absolut en $D_r(a)$, pel principi del mòdul màxim, se segueix que f és constant en $D_r(a)$ i, al ser Ω connex, aplicant el principi de prolongació analítica obtenim que f és constant en Ω. □

Lema 4.52 (Lema de Schwarz)**.** *Sigui $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ una funció holomorfa tal que $f(0) = 0$. Aleshores*

$$|f(z)| \leqslant |z| \quad \textit{per tot } z \in \mathbb{D},$$

i $|f'(0)| \leqslant 1$. Si es compleix la igualtat $|f(z_0)| = |z_0|$ en algun punt $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ o bé la igualtat $|f'(0)| = 1$, aleshores $f(z) = \lambda z$ per algun $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Demostració. Suposem $f \not\equiv 0$. Sabem que $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ és analítica, i $|g(z)| \leqslant \frac{1}{|z|}$. Pel principi del mòdul màxim,

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{r} \quad \text{en } D_r(0).$$

Fent $r \to 1$ deduïm la primera desigualtat. A més, $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$.

Si es produeix alguna igualtat $|f(z_0)| = |z_0|$ amb $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ (respectivament $|f'(0)| = 1$), aleshores g assoleix un extrem del mòdul en z_0 (respectivament en 0) i, per tant, g és constant. □

Exemple 4.53. Vegem que, per a tot polinomi holomorf P, tenim que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| \geqslant 1.$$

Aquest resultat ens diu que la funció $\frac{1}{z}$ no es pot aproximar uniformement per polinomis holomorfs en el compacte $S^1 = \{|z| = 1\}$.

Observem primer que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| = \sup_{|z|=1} \frac{|zP(z) - 1|}{|z|} = \sup_{|z|=1} |zP(z) - 1|.$$

Aleshores, si aquest suprem és estrictament menor que 1, tenim que, en ser la funció $h(z) = zP(z) - 1$ entera, pel principi del mòdul màxim

$$|h(0)| \leqslant \sup_{|z|=1} |h(z)| < 1,$$

però això no és possible ja que $h(0) = -1$. Per tant

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| \geqslant 1. \qquad \Diamond$$

Una altra propietat rellevant de les funcions holomorfes (no constants) és que envien oberts a oberts. Aquesta propietat no val per a funcions de variable real (tan regulars com vulguem). Per exemple, la imatge de la funció $f(x) = x^2$ de l'interval obert $(-1, 1)$ és $[0, 1)$ que no és obert.

Teorema 4.54 (Teorema de l'aplicació oberta)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ no constant. Aleshores f és oberta. És a dir, si U és un obert d'Ω, llavors $f(U)$ és obert.*

Demostració. Sigui $U \subset \Omega$ obert, i $z_0 \in U$. Per veure que $f(U)$ és obert, volem trobar un entorn de $w_0 := f(z_0)$ dins de $f(U)$. Considerem la funció

$$g(z) = f(z) - w_0, \qquad z \in \Omega.$$

Com que $g(z_0) = 0$ i els zeros de les funcions holomorfes són aïllats, al ser f no constant, podem trobar $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ amb $g(z) \neq 0$ per a tot $z \in \overline{D_r(z_0)} \backslash \{z_0\}$.

Sigui $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ amb $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, de manera que $\gamma^* = \partial D_r(z_0)$. Llavors $0 \notin (g \circ \gamma)^*$, on $g \circ \gamma$ denota la imatge per g de la corba γ. Per tant

$$\delta = \inf_{z \in \gamma^*} |g(z)| > 0.$$

És a dir,

$$|g(z)| \geqslant \delta, \qquad |z - z_0| = r.$$

Passarem a provar que $D_{\delta/2}(w_0) \subset f(U)$.

Suposem que $w \notin f(U)$. Això implica que la funció

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w} \tag{4.5}$$

és holomorfa en U. Pel principi del mòdul màxim, tenim que

$$|h(z_0)| \leqslant \sup_{z \in \gamma^*} |h(z)|. \tag{4.6}$$

(Aquesta desigualtat també es pot obtenir fent servir la propietat de la mitjana, per exemple). Com que $|g(z)| \geqslant \delta$ per $z \in \gamma^*$, tenim que

$$|h(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} = \frac{1}{|f(z) - w_0 + (w_0 - w)|} \leqslant \frac{1}{|g(z)| - |w - w_0|}$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta - |w - w_0|}, \qquad z \in \gamma^*.$$

Per tant,

$$\frac{1}{|w - w_0|} \overset{(4.5)}{=} |h(z_0)| \overset{(4.6)}{\leqslant} \frac{1}{\delta - |w - w_0|} \quad \Rightarrow \quad |w - w_0| \geqslant \frac{\delta}{2},$$

és a dir que $w \notin D_{\delta/2}(w_0)$. Concloem doncs que f és oberta. □

Exercicis

4.11.1. *Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone[10]-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.53.*

4.11.2. *Trobeu el màxim de:*

a) $|\cos z|$ *i* $|\sin z|$ *a* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ *i* $|e^{z^2}|$ *a* $|z| \leqslant 1$. ◁

4.11.3. *Trobeu totes les funcions holomorfes en* $\mathbb{D}$ *tals que* $f(1/2) = 3$ *i* $|f(z)| \leqslant 3$ *si* $|z| < 1$. ◁

4.11.4. *Es considera* $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ *i el disc* D *de radi* 2 *centrat a* 5. *Provar que* $f(z)$ *assoleix el valor màxim i mínim del mòdul a* $|z - 5| = 2$. Indicació*: considerar* $1/f(z)$. ◁

4.11.5. *Sigui* f *una funció holomorfa en el disc* $D_R(0)$, $R > 0$. *Definim*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 \leqslant r < R.$$

Demostreu que si f *no és constant, aleshores* $M(r)$ *és estrictament creixent a* $[0, R)$. ◁

4.11.6. *Sigui* f *una funció holomorfa en un obert connex* Ω *i* D *un disc obert tal que* $\overline{D} \subset \Omega$. *Suposeu que* $|f(z)| = c$ *per tot* $z \in \partial D$, *on* c *és una constant. Proveu que* f *té almenys un zero en* D *o bé* f *és constant en* Ω. Indicació*: Distingiu segons si* $c = 0$ *o* $c > 0$. *En el segon cas, proveu que si* f *no té zeros en* D, *aleshores* f *és constant en* D. ◁

4.11.7. *Sigui* f *una funció holomorfa i no constant en* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *un obert connex. Suposeu que existeix* $a \in \Omega$ *tal que* $|f(a)| \leqslant |f(z)|$ *per a tot* $z \in \Omega$. *Proveu que aleshores* $f(a) = 0$. ◁

4.11.8. *Sigui* $f \in H(\mathbb{C})$ *no constant. Demostreu que, per a tot* $c > 0$,

$$\overline{\{z;\, |f(z)| < c\}} = \{z;\, |f(z)| \leqslant c\}.$$ ◁

[10] Marshall Harvey Stone, New York City, 1903–1989, https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_H._Stone

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Un cop hem estudiat la teoria local de Cauchy, el proper objectiu és estudiar propietats globals de les funcions holomorfes. Mitjançant la versió global del teorema de Cauchy, estudiarem la relació entre l'holomorfia d'una funció i la topologia del domini on està definida. Per a donar aquesta versió global, cal estudiar un concepte topològic, el de camí homòleg a zero. Veurem aplicacions importants de la teoria global, entre les que es troben el teorema dels residus, que ens permetrà calcular molts dipus d'integrals, o el principi de l'argument i teorema de Rouché que controlen els zeros de les funcions holomorfes.

5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

Comencem amb la noció d'índex d'una corba tancada γ respecte d'un punt z_0, $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$. Intuïtivament, $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$ compta el número de voltes que ha de donar sobre sí mateix un observador col·locat en el punt z_0 per a resseguir la corba, vegeu la figura 5.2.

Abans de donar la definició, necessitem el següent resultat:

Proposició 5.1. *1. Siguin $a, w_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ complint que $D_r(a) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sigui $z_0 \in D_r(a)$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Llavors existeix una única* determinació del logaritme *en $D_r(a)$, $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.*

2. Sigui $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme *de γ, $\hat{\gamma}$, complint que $\hat{\gamma}(a) = w_0$. A més, si γ és diferenciable, aleshores $\hat{\gamma}$ també ho és i $\hat{\gamma}'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$.*

Demostració. Provem 1. La unicitat és immediata, ja que dues determinacions del logaritme només poden diferir en un múltiple de 2π per la proposició 2.30. Per veure l'existència, sigui $a = |a|e^{i\alpha}$. Llavors $D_r(a) \subset \mathbb{C}\backslash e^{i\alpha}(-\infty, 0]$ i si ℓ és una determinació del logaritme a $\mathbb{C}\backslash e^{i\alpha}(-\infty, 0]$, llavors $\ell_{|D_r(a)}$ és una determinació del logaritme a $D_r(a)$. Es compleix, doncs, que si denotem $k = \frac{w_0 - \ell(z_0)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, la funció $\mathcal{L}(z) := \ell(z) + 2\pi i k$ és una determinació del logaritme en $D_r(a)$ tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.

Provem ara 2. Com abans, la unicitat és evident. Per demostrar l'existència, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $a = 0$ i $b = 1$. Sigui $\varepsilon = \frac{1}{2}\inf_{t\in[0,1]} |\gamma(t)| > 0$. Donat que γ és uniformement contínua en $[0, 1]$, existeix $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$ per a tot $s, t \in [0, 1]$ tal que $|t - s| \leqslant \delta$.

Sigui $n \geqslant 1$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$ i sigui $z_k = \gamma(\frac{k}{n})$, per a $k = 0, 1, \cdots n-1$. Llavors $|z_k - z_{k+1}| < \varepsilon$ i $\gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subset D_\varepsilon(z_k) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, per a $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Aplicant l'apartat 1, sigui $\mathcal{L}_0$ l'única determinació del logaritme en $D_\varepsilon(z_0)$ tal que $\mathcal{L}_0(z_0) = w_0$. I, recurrentment, per a $k = 1, \cdots n-1$, sigui $\mathcal{L}_k$ l'única determinació del logaritme en $D_\varepsilon(z_k)$ tal que $\mathcal{L}_k(z_k) = \mathcal{L}_{k-1}(z_k)$.

Llavors si $k = 1, \cdots n-1$, $\mathcal{L}_{k-1} = \mathcal{L}_k$ en $D_\varepsilon(z_k) \cap D_\varepsilon(z_k)$. Per tant, la funció $\hat{\gamma}(t) = \mathcal{L}_k(\gamma(t))$, si $\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}$, $k = 0, \cdots n-1$, és la determinació del logaritme de γ complint $\hat{\gamma}(0) = w_0$.

Finalment, si γ és diferenciable, com a conseqüència de la construcció de $\hat{\gamma}$ i del fet que les determinacions del logaritme són holomorfes, es verifica que $\hat{\gamma}$ és diferenciable i si $\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}$, llavors $\hat{\gamma}'(t) = \mathcal{L}_k'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$. □

Definició 5.2 (Índex d'una corba tancada respecte a un punt)**.** Sigui $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una corba tancada en $\mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Llavors, l'índex de γ respecte a z es defineix per:

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i},$$

on $\hat{\gamma}_z$ és qualsevol determinació del logaritme de $\gamma_z : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, definida per $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$, vegeu la figura 5.1. •

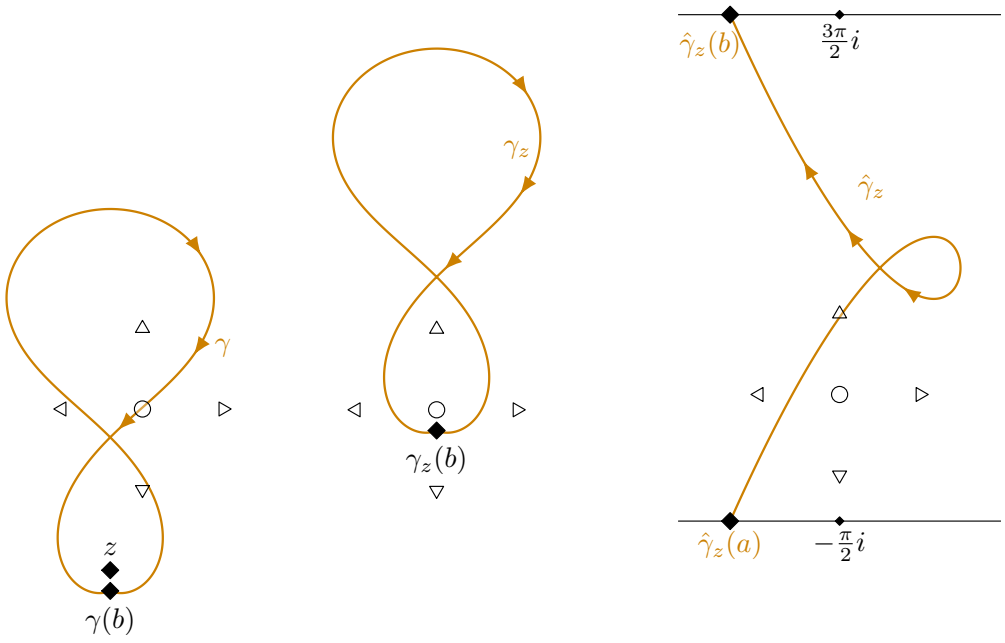


Figura 5.1.: Construcció de $\hat{\gamma}_z$ com a logaritme de $\gamma_z = \gamma - z$. Notem que en aquest cas tenim $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = 1$, ja que $\hat{\gamma}_z$ augmenta en $2\pi i$ al recórrer el camí, és a dir que l'argument de $\gamma(t) - z$ augmenta en 2π al recórrer el camí γ.

Observació 5.3. 1. Donat que dues determinacions del logaritme de γ_z difereixen en un múltiple de $2\pi i$, l'índex està ben definit.

2. L'índex $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ és un nombre enter. En efecte, donat que γ és una corba tancada, γ_z també ho és i, per tant, $e^{\hat{\gamma}_z(b)} = \gamma_z(b) = \gamma_z(a) = e^{\hat{\gamma}_z(a)}$. Llavors,

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

Aquest valor doncs, pot ser positiu, negatiu o zero: una volta és positiva si es realitza en el sentit contrari a les agulles del rellotge i és negativa si es fa en el sentit de gir de les agulles del rellotge, vegeu la figura 5.3. •

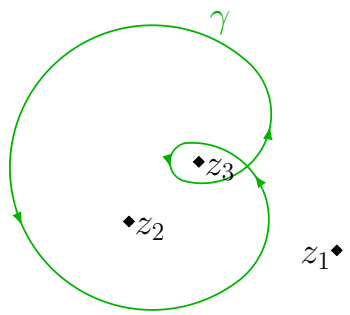


Figura 5.2.: Tenim $\operatorname{Ind}(\gamma, z_1) = 0$, ja que des de z_1 podem observar tot el camí sense haver de "girar" sobre nosaltres mateixos. En canvi, $\operatorname{Ind}(\gamma, z_2) = 1$ perquè ens cal fer una volta si som a z_2, i $\operatorname{Ind}(\gamma, z_3) = 2$ perquè ens cal fer dues voltes per resseguir el camí amb la mirada si ens situem a z_3. Vegeu l'observació 5.3.

Observació 5.4 (Càlcul geomètric de l'índex)**.** Fixem una semirecta L amb origen z_0 que no travessi punts on el camí té interseccions. Per cada vegada que el camí γ passa per L en sentit positiu, li sumem 1, i si passa en sentit negatiu, li restem 1. Veure figures 5.3–5.5. •

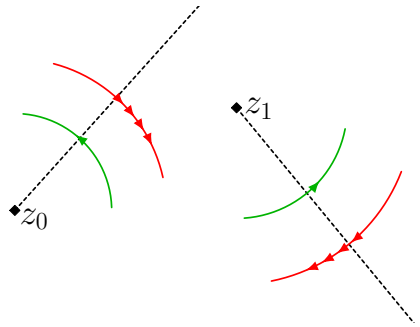


Figura 5.3.: Podem observar els camins verds que intersequen en sentit positiu o antihorari i els vermells en negatiu o horari, vegeu l'observació 5.4.

Proposició 5.5 (Expressió integral de l'índex)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, γ un camí tancat en Ω i $z_0 \notin \gamma^*$. L'índex de γ respecte a z_0 ve definit com*

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

En particular, si γ^- denota el camí invers de γ (és a dir, recorregut en sentit invers), tenim que

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma^-, z) = -\mathrm{Ind}\,(\gamma, z), \qquad z \notin \gamma^*.$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que γ és de classe $\mathcal{C}^1$ ja que, altrament, descompondríem el camí i la integral en un nombre finit de trossos. Llavors si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\hat{\gamma}_z$ és una determinació del logaritme de $\gamma_z = z + \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, es verifica que

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma, z) = \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b (\hat{\gamma}_z)'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad \square$$

A continuació ens mirem l'índex $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z)$ com una funció de z.

Proposició 5.6 (Propietats de la funció índex)**.** *Sigui γ un camí tancat. Llavors:*

a) La funció $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z) : \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{Z}$ és contínua;

b) $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$;

c) $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z) = 0$ si z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

Demostració. (a) Per $z, z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$, tenim que

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{Ind}\,(\gamma, z) - \mathrm{Ind}\,(\gamma, z_0)\big| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Big(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0}\Big)dw\right| \\ &= \frac{|z - z_0|}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{dw}{(w - z)(w - z_0)}\right|.\end{aligned}$$

Volem veure que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \to z_0$. Sigui

$$\delta := \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(z_0, \gamma^*).$$

Clarament tenim que $|w - z_0| \geqslant 2\delta$ si $w \in \gamma^*$. Llavors, per $|z - z_0| < \delta$, tenim també

$$|w - z| \geqslant |w - z_0| - |z - z_0| \geqslant 2\delta - \delta = \delta, \qquad w \in \gamma^*.$$

Per tant, si $|z - z_0| < \delta$, tenim que

$$\big|\mathrm{Ind}\,(\gamma, z) - \mathrm{Ind}\,(\gamma, z_0)\big| \leqslant \frac{|z - z_0|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dw|}{|w - z|\,|w - z_0|} \leqslant \frac{|z - z_0|}{4\pi\delta^2}\ \mathrm{L}(\gamma).$$

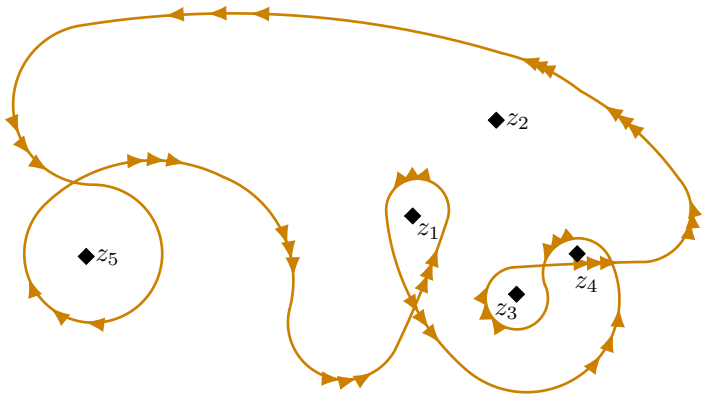


Figura 5.4.: Per a calcular l'índex de γ respecte a z_j, tracem una semirecta partint del punt i sumem interseccions amb la corba en sentit positiu i restem les de sentit negatiu, tal com il·lustra la figura 5.3.

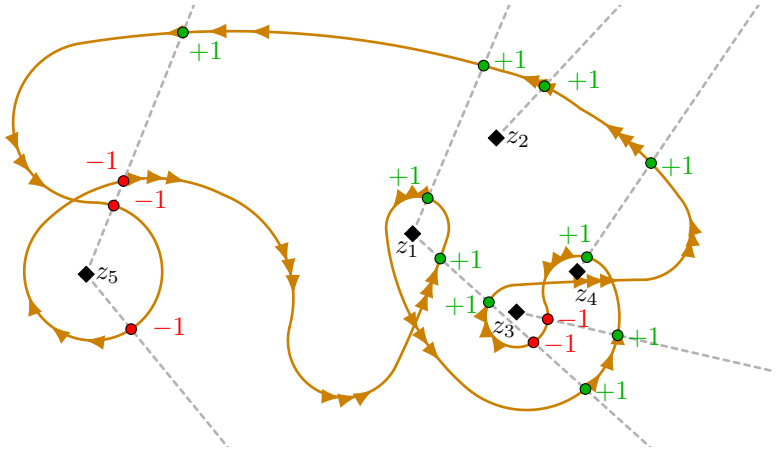


Figura 5.5.: Trobem $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_1) = 1{+}1 = 1{+}1{-}1{+}1 = 2$ per dues semirectes diferents. Així mateix calculem $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_2) = 1$, $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_3) = 0$, $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_4) = 2$ i $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_5) = -1$.

Com que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \to z_0$, ja hem provat la continuïtat de la nostra funció.

(b) Com que la funció $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ és contínua i pren valors en $\mathbb{Z}$, és constant en cada component connexa.

(c) Sabem que és constant en aquesta component. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\gamma^* \subset D_R(0)$ i també $R > \mathrm{L}(\gamma)$ on $\mathrm{L}(\gamma)$ és la longitud de γ. Si $|z| > 2R$, llavors $|w - z| \geqslant |z| - |w| \geqslant 2R - R = R$ per $w \in \gamma^*$, i per tant

$$\big|\operatorname{Ind}(\gamma, z)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|dw|}{|w - z|} \leqslant \frac{1}{2\pi R} \mathrm{L}(\gamma) < \frac{1}{2\pi}.$$

Com que $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ ha de ser un enter, l'única possibilitat és que valgui 0, i com que l'índex és constant en aquesta component, val zero en tot punt d'aquesta. □

Exercicis

5.1.1. *Considerem el camí* $\gamma(t) = 4e^{it} \cos \frac{2}{3}t$, $(0 \leqslant t \leqslant 6\pi)$. *Calculeu* $\operatorname{Ind}(\gamma, 3)$ *i* $\operatorname{Ind}(\gamma, 1)$. ◁

5.1.2. *Considerem el camí* $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. *Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu*

$$\int_\gamma \frac{3z - 3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}\, dz.$$ ◁

5.2. El teorema global de Cauchy

Recordem la fórmula integral de Cauchy per oberts convexos: Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex i sigui $f \in H(\Omega)$. Llavors

$$f(z_0) \operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \qquad z_0 \notin \gamma^*$$

per a tot camí tancat γ en Ω, vegeu el teorema 4.17 i l'observació 4.20.

Exemple 5.7. Sigui γ la corba en forma de infinit o "ulleres", anomenada lemniscata de Bernoulli[1] (vegeu la figura 5.6), amb $-1/2$ i $1/2$ un a dins de cada part. Com que la funció $f(z) = \cos(\frac{\pi}{2}z)$ és entera (holomorfa a tot $\mathbb{C}$), tenim que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\, dw = 2\pi i \cos 0 \operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i,$$

i també

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - 1/2}\, dw = 2\pi i \cos(\frac{\pi}{4}) \operatorname{Ind}(\gamma, 1/2) = 2\pi i \cos(\frac{\pi}{4})\,(-1) = -\sqrt{2}\,\pi i.$$ ◊

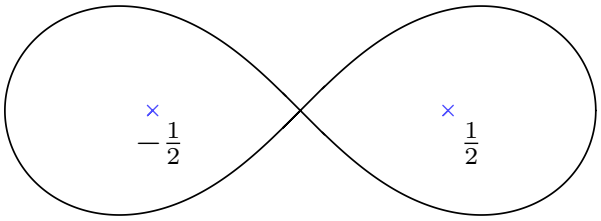


Figura 5.6.: Lemniscata de Bernouilli.

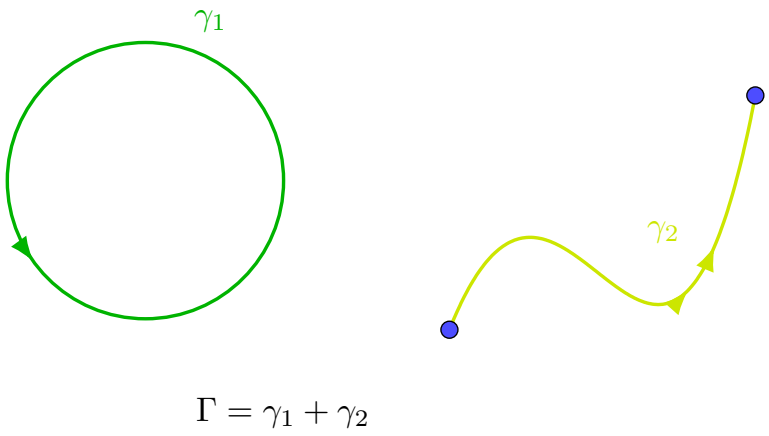


Figura 5.7.: Una cadena formada per dos camins.

Volem obtenir versions més generals tant del teorema de Cauchy com de la fórmula integral de Cauchy, que siguin vàlides per oberts no necessàriament convexos, com també per unions de camins.

Definició 5.8 (Cadenes i cicles)**.** Una *cadena* és una combinació lineal de camins

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \gamma_i, \qquad n_i \in \mathbb{Z},$$

on γ_i és un camí per a tot $1 \leqslant i \leqslant k$. Vegeu la figura 5.7 per exemples de cadenes.

La imatge o recorregut de Γ és $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_k^*$.

Si $f \in C(\Gamma^*)$, definim la integral per linealitat

$$\int_\Gamma f = n_1 \int_{\gamma_1} f + \cdots + n_k \int_{\gamma_k} f.$$

Diem que Γ és un *cicle* si γ_i és un camí tancat per a tot $1 \leqslant i \leqslant k$.

[1] Jacob Bernoulli, Basilea, 1654–1705, https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli

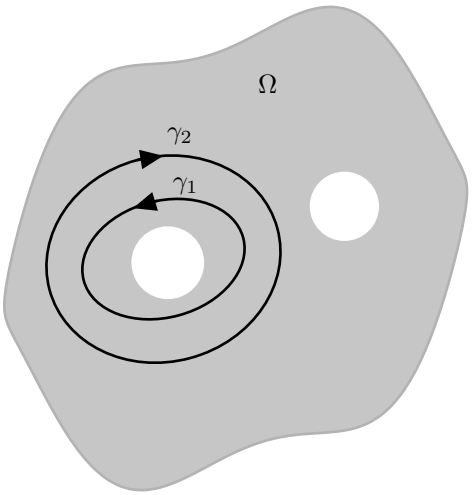


Figura 5.8.: Vegeu l'observació 5.11.

L'*índex d'un cicle* Γ respecte d'un punt $z_0 \notin \Gamma^*$ és

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{i=1}^{k} n_i \operatorname{Ind}(\gamma_i, z_0). \qquad \bullet$$

Degut a la definició, aquest índex té les mateixes propietats que l'índex d'una corba: és un enter, és constant en cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$, i val zero en la component no fitada.

Exemple 5.9. Considerem les corbes $\gamma_1(t) = 4e^{it}$ i $\gamma_2(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Formem el cicle

$$\Gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Tenim $\operatorname{Ind}(\Gamma, 6i) = 0$, ja que estem a la component no fitada. També

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, 2) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, 2) - \operatorname{Ind}(\gamma_2, 2) = 1 - 0 = 1.$$

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, 0) - \operatorname{Ind}(\gamma_2, 0) = 1 - 1 = 0. \qquad \lozenge$$

Definició 5.10 (Homologia)**.** Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i Γ un cicle en Ω. Diem que Γ és *homòleg a 0* en Ω si

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0 \qquad \forall a \notin \Omega.$$

Posem $\Gamma \approx 0$ en Ω per indicar que Γ és homòleg a 0 en Ω. $\bullet$

Exemple 5.11. En la figura 5.8, els camins γ_1 i γ_2 **no** són homòlegs a 0 en Ω. En canvi, el cicle $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ **sí** que ho és. $\lozenge$

Definició 5.12. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω. Diem que Γ_1 és homòleg a Γ_2 en Ω si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω. En aquest cas, fem servir la notació $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω. •

Teorema 5.13 (Teorema de Cauchy global)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui Γ un cicle en Ω homòleg a 0 en Ω. Llavors*

(a) Fórmula integral de Cauchy global*:*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \qquad \forall z \in \Omega\backslash\Gamma^*.$$

(b) teorema de Cauchy global:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Observació 5.14. Si tenim un cicle Γ en Ω de manera que $\int_\Gamma f = 0$ per a tota $f \in H(\Omega)$, llavors si prenem un punt $a \notin \Omega$, la funció $f_a(z) = \frac{1}{z-a}$ és holomorfa en Ω, i

$$\mathrm{Ind}\,(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_a(z) = 0, \qquad \forall a \notin \Omega.$$

Per tant, el fet que Γ sigui homòleg a 0 en Ω és una condició necessària per tal que valgui el teorema de Cauchy. •

Prova de (b) a partir de (a). Fixem $a \in \Omega\backslash\Gamma^*$, i definim la funció $F(z) = (z-a)f(z)$, que és holomorfa en Ω. Aplicant la fórmula integral de Cauchy, com que $F(a) = 0$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\,dz \overset{\text{a)}}{=} F(a)\,\mathrm{Ind}\,(\Gamma, a) = 0.$$

Prova de (a). Considerem la funció $F : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida per

$$F(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si} \quad z \neq w \\ \\ f'(z) & \text{si} \quad z = w. \end{cases}$$

Llavors F és contínua en $\Omega \times \Omega$ (vegeu la demostració al final de la prova), i per a tot $w \in \Omega$, la funció $F_w(z) := F(z,w)$ és holomorfa en Ω (clarament és holomorfa en $\Omega\backslash\{w\}$ i contínua en Ω, i sabem que aquestes dues condicions, aplicant el teorema de Cauchy-Goursat i el Teorema de Morera (concretament usant el corol·lari 4.34), impliquen que és holomorfa a tot Ω). Pel teorema de derivació sota el signe integral, la funció

$$g(z) = \int_\Gamma F(z,w)\,dw, \qquad z \in \Omega$$

és holomorfa en Ω.

Ara volem estendre aquesta funció a tot $\mathbb{C}$, per tal d'obtenir una funció entera. Considerem l'obert no buit

$$U = \big\{w \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* : \mathrm{Ind}\,(\Gamma, w) = 0\big\}.$$

Observeu que donat que hem vist que $\mathrm{Ind}(\Gamma, \cdot)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$, U és la unió d'algunes d'aquestes components connexes que són obertes, i entre elles està la component connexa no fitada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. A més, com que Γ és homòleg a 0 en Ω, tenim que $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, a) = 0$ per a tot $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, de manera que $\mathbb{C}\backslash\Omega \subset U$, i per tant

$$\Omega \cup U = \mathbb{C}.$$

Definim

$$\widetilde{g}(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad z \in U.$$

Per $z \in U \cap \Omega$, fent servir la definició d'índex obtenim que

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z) \int_\Gamma \frac{dw}{w - z} \\ &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - 2\pi i f(z)\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = \widetilde{g}(z), \end{aligned}$$

ja que $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = 0$ per $z \in U$. Per tant, la funció $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida per

$$G(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si} \quad z \in \Omega \\ \\ \widetilde{g}(z) & \text{si} \quad z \in U \end{cases}$$

està ben definida a tot $\mathbb{C}$ i és entera.

Vegem que és fitada. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\Gamma^* \subset \{|\zeta| \leqslant R\}$. Observem que, si $|z| > 2R$, llavors z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$, així que $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = 0$, que implica que $z \in U$. Per tant, si $|z| > 2R$, tenim que

$$|G(z)| = |\widetilde{g}(z)| \leqslant \int_\Gamma \frac{|f(w)|}{|w - z|}\, |dw| \leqslant M\, \frac{\mathrm{L}(\Gamma)}{R}, \tag{5.1}$$

on $M = \sup_{w\in\Gamma^*} |f(w)|$ i $\mathrm{L}(\Gamma)$ és la suma de les longituds dels camins del cicle. Per tant, G és fitada en $\{|z| > 2R\}$. Com que G és contínua, G també és fitada en el compacte $\overline{D_R(0)}$, de manera que G és una funció entera i fitada. Pel teorema de Liouville, G és constant. Ara bé, (5.1) també ens diu que $\lim_{|z|\to\infty} G(z) = 0$ que, al ser G constant, implica que $G \equiv 0$.

Així doncs, per $z \in \Omega\backslash\Gamma^*$, tenim que

$$0 = \frac{G(z)}{2\pi i} = \frac{g(z)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z)\, \mathrm{Ind}\,(\Gamma, z). \qquad \square$$

Demostració de la continuïtat de F. Comprovem que la funció $F : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida per

$$F(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si} \quad z \neq w \\ \\ f'(z) & \text{si} \quad z = w, \end{cases}$$

és contínua en $\Omega \times \Omega$.

En efecte, sigui $\Delta = \{(z,w) \in \Omega \times \Omega;\, z = w\}$ la diagonal, que és un tancat relatiu en $\Omega \times \Omega$. Llavors, F és contínua en $\Omega \times \Omega \backslash \Delta$ i ens queda comprovar que F és també contínua en els punts de la diagonal.

Fixem un punt $a \in \Omega$ i considerem un disc $D_r(a) \subset \Omega$. Siguin $z \neq w \in D_r(a)$. Llavors es verifica

$$\begin{aligned} |F(z,w) - F(a,a)| &= \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(z) - f'(a)z - (f(w) - f'(a)w)}{z-w} \right| \\ &= \frac{1}{|z-w|} \left| \int_{[w,z]} (f'(\zeta) - f'(a)) d\zeta \right| \leqslant \frac{|z-w|}{|z-w|} \sup_{\zeta \in [w,z]} |f'(\zeta) - f'(a)|. \end{aligned}$$

Observeu que donat que $F(z,z) = f'(z)$, aquesta desigualtat val també si $z = w$. Tenint en compte que f' és contínua en a, i per tant,

$$\lim_{(z,w)\to(a,a)} \sup_{\zeta \in [w,z]} |f'(\zeta) - f'(a)| = 0,$$

obtenim que

$$\lim_{(z,w)\to(a,a)} F(z,w) = F(a,a) = f'(a). \qquad \square$$

Vegem ara una aplicació immediata del teorema anterior.

Corol·lari 5.15. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i $f \in H(\Omega)$. Siguin Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω. Si $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω, llavors*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Demostració. Com que el cicle $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω, aplicant el teorema de Cauchy global, tenim que

$$0 = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz. \qquad \square$$

Exemple 5.16. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Per r_1, r_2 amb $r < r_1 < r_2 < R$, considerem els cercles $\gamma_1(t) = r_1 e^{it}$ i $\gamma_2(t) = r_2 e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Com que $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \approx 0$, tenim que γ_1 i γ_2 són corbes homòlogues en Ω, i per tant

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

per a tota funció f holomorfa en Ω. $\Diamond$

Corol·lari 5.17 (Fórmula integral de Cauchy per derivades-versió global)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui Γ cicle en Ω homòleg a 0. Llavors*

$$f^{(n)}(z)\,\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw, \qquad \forall z \in \Omega\backslash\Gamma^*.$$

Demostració. Com que l'índex és constant en cada component connexa d'$\Omega\backslash\Gamma^*$, només cal aplicar la versió global de la fórmula integral de Cauchy, i derivar sota el signe integral. □

Exercicis

5.2.1. *Considerem el camí $\gamma(t) = (2\sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2\sin(3t))$, amb $t \in [0, 2\pi]$. Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$, i trobeu el valor de*

$$\int_{\gamma}\frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1}\,dz.$$ ◁

5.3. Homotopia i teorema de Cauchy

Definició 5.18 (Homotopia)**.** Siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ corbes tancades. Diem que γ_0 i γ_1 són *homòtopes* en Ω (posem $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω) si existeix una aplicació contínua $H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ de manera que

(i) $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ per a tot $t \in [a, b]$;

(ii) $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ per a tot $t \in [a, b]$;

(iii) $H(a, s) = H(b, s)$ per a tot $s \in [0, 1]$. •

Observem que la condició (iii) ens diu que les corbes $\gamma_s(t) \coloneqq H(t, s)$ són tancades per a tot $s \in [0, 1]$.

Essencialment, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω, llavors la corba γ_0 s'ha de poder deformar contínuament cap a la corba γ_1 sense passar per cap punt que no sigui d'Ω (veure l'exemple de la Figura 5.9).

Definició 5.19 (Corba homòtopa a 0 o contractible)**.** Diem que una corba γ és *homòtopa a 0* en Ω o *contractible* en Ω (posem $\gamma \sim 0$ en Ω) si γ és homòtopa a una corba constant (és a dir, a un punt). •

Observació 5.20. Evidentment, el concepte de corbes homòtopes també té sentit per corbes que no siguin tancades però tinguin els mateixos extrems. Quan es parla d'homotopia de corbes no tancades d'extrems fixats, se sol imposar que l'homotopia sigui contínua, compleixi (i) i (ii) de la definició 5.18, però que en lloc de la condició (iii) compleixi que les corbes $\gamma_s(t) \coloneqq H(t, s)$ tinguin el mateix punt inicial i final que γ_0 i γ_1, és a dir, $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ i $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ per a tot $s \in [0, 1]$).

Es pot veure fàcilment que dues corbes d'extrems fixats γ_0 i γ_1 són homòtopes en Ω si i només si $\gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és homòtopa a 0 en Ω, vegeu la definició 4.3. •

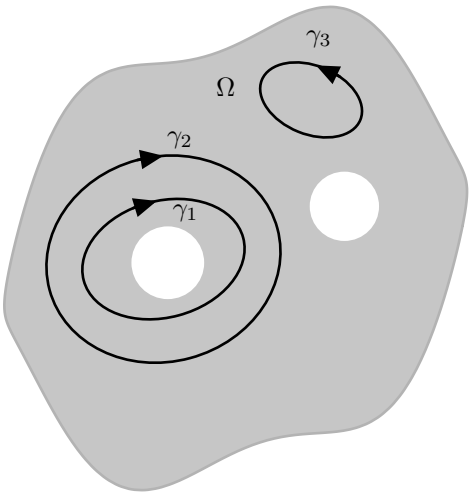


Figura 5.9.: Tenim $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_3 \sim 0$. Tenim en canvi que $\gamma_1 \not\sim \gamma_3$, $\gamma_1 \not\sim 0$ i $\gamma_2 \not\sim 0$.

Proposició 5.21. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ dues corbes tancades en Ω de manera que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω. Llavors*

$$\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z) \qquad \forall z \notin \Omega.$$

És a dir, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω, aleshores γ_0 és homòloga a γ_1 en Ω. En particular, $\gamma \sim 0$ en Ω implica que γ és homòloga a 0 en Ω. Ara bé, el recíproc no és cert (veure la figura 5.10 per un exemple d'una corba en un obert Ω homòloga a 0, però no homòtopa a 0 en Ω).

Demostrem primer un resultat d'invariància de l'índex sota pertorbacions, conegut informalment com el *teorema de l'arbre, la persona i el gos*.

Lema 5.22. *Siguin $\gamma, \eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ dues corbes tancades i sigui $z \in \mathbb{C}$. Si*

$$\big|\gamma(t) - \eta(t)\big| < |z - \gamma(t)| \qquad \forall t \in [a,b],$$

llavors $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \operatorname{Ind}(\eta, z)$.

Demostració. Observem que la hipòtesi implica que $z \notin \gamma^* = \gamma[a,b]$. També tenim que $z \notin \eta^*$ ja que per $t \in [a,b]$ tenim

$$|z - \eta(t)| = |z - \gamma(t) + (\gamma(t) - \eta(t))| \geqslant |z - \gamma(t)| - |\gamma(t) - \eta(t)| > 0.$$

A més a més, per a $t \in [a,b]$, escrivint $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$ i $\eta_z(t) = \eta(t) - z$ tenim que

$$|\gamma_z(t) - \eta_z(t)| < |\gamma_z(t)|.$$

Tot plegat ens dona que $0 \notin \gamma_z^*$ i la corba tancada $\alpha_z = \frac{\eta_z}{\gamma_z}$ verifica

$$\big|1 - \alpha_z(t)\big| < 1 \qquad \forall t \in [a,b].$$

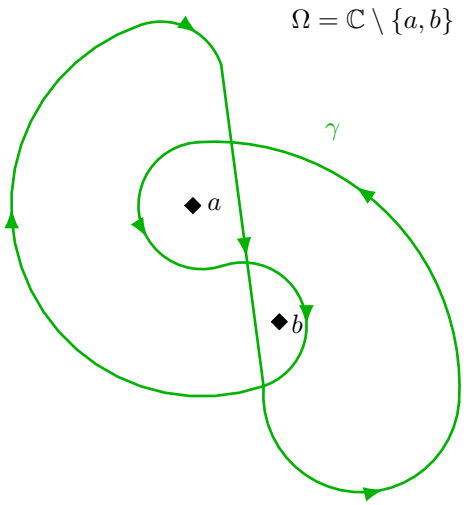


Figura 5.10.: El camí γ és homòleg a 0 en Ω ja que $\mathrm{Ind}\,(\gamma, a) = 0 = \mathrm{Ind}\,(\gamma, b)$, però $\gamma \not\sim 0$ en Ω, ja que no és contractible.

Sigui $\hat{\gamma}_z$ una determinació del logaritme de γ_z i $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $D_1(1)$. Llavors, $\hat{\alpha}_z := \mathcal{L} \circ \alpha_z$ és una determinació del logaritme d'α_z i, per tant, $\hat{\eta}_z := \hat{\gamma}_z + \hat{\alpha}_z$ és una determinació del logaritme de η_z. En conseqüència,

$$\begin{aligned} 2\pi i \mathrm{Ind}\,(\eta, z) &= \hat{\eta}_z(b) - \hat{\eta}_z(a) = (\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)) + (\hat{\alpha}_z(b) - \hat{\alpha}_z(a)) \\ &= \hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a) = 2\pi i \mathrm{Ind}\,(\gamma, z). \end{aligned}$$

Aquí hem usat que, com que η i γ són corbes tancades, també ho és α_z i, en particular,

$$\hat{\alpha}_z(b) = \mathcal{L}(\alpha_z(b)) = \mathcal{L}(\alpha_z(a)) = \hat{\alpha}_z(a). \qquad \square$$

Demostració de la proposició 5.21. Sigui H una homotopia entre γ_0 i γ_1. Volem veure que $\mathrm{Ind}\,(\gamma_0, z) = \mathrm{Ind}\,(\gamma_1, z)$ per a tot $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Sigui $z \in \mathbb{C}\backslash\{\Omega\}$. Com que $[a, b] \times [0, 1]$ és compacte, $H([a, b] \times [0, 1])$ també i H és uniformement contínua. Per tant,

(1) $\varepsilon = d(z, H([a, b] \times [0, 1])) = \inf_{(t,s)\in[a,b]\times[0,1]} |z - H(t, s)| > 0$

(2) Existeix $n \geqslant 1$ tal que per a tot $t \in [a, b]$ i tots $s_1, s_2 \in [0, 1]$ tals que $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$,

$$|H(t, s_1) - H(t, s_2)| < \varepsilon.$$

Per a cada $s \in [0, 1]$, considerem la corba tancada γ_s en Ω definida per $\gamma_s(t) = H(t, s)$, si $t \in [a, b]$. Llavors, (1) i (2). ens donen que per a tot $t \in [a, b]$, i tot $s_1, s_2 \in [0, 1]$ amb $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$,

$$|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < |z - \gamma_{s_1}(t)|.$$

Aplicant el lema anterior, deduïm que $\operatorname{Ind}(\gamma_{s_1}, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_{s_2}, z)$, per a tot $s_1, s_2 \in [0,1]$ amb $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$. En particular,

$$\operatorname{Ind}(\gamma_{\frac{k-1}{n}}, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_{\frac{k}{n}}, z),$$

per a $k = 1, \cdots, n$. Per tant,

$$\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z). \qquad \square$$

Com que tota corba homòtopa a zero en Ω, és homòloga a zero en Ω, a partir del teorema de Cauchy global, obtenim la següent versió homotòpica.

Teorema 5.23 (Versió homotòpica del teorema de Cauchy)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i γ un camí tancat en Ω homòtop a 0 en Ω. Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

(a) $\int_\gamma f(z)dz = 0$;

(b)

$$f(z)\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad \forall z \in \Omega \backslash \gamma^*.$$

Com a culminació de la teoria, tenim els següents corol·laris, amb gran quantitat d'aplicacions, com veurem en els capítols següents.

Teorema 5.24 (Teorema de deformació)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i siguin γ_0, γ_1 camins tancats homòtops en Ω. Llavors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Demostració. Tenim que $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1$ és un cicle en Ω. Si $z \notin \Omega$, per la proposició 5.21 tenim que $\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z)$, així que $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \notin \Omega$, i per tant el cicle Γ és homòleg a 0 en Ω. Pel teorema de Cauchy global obtenim que

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \qquad \square$$

Corol·lari 5.25 (Teorema de la independència del camí)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin γ_0, γ_1 camins amb extrems fixos i homòtops en Ω (vegeu l'observació 5.20). Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Demostració. El camí $\gamma := \gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és tancat (ull: en aquest cas, estem considerant el camí que primer recorre γ_0 i després la corba γ_1 en sentit contrari) i homòtop a 0 en Ω, vegeu l'observació 5.20. Aleshores el resultat és conseqüència del teorema anterior. $\square$

5.4. Dominis simplement connexos

Com ja hem mencionat en seccions anteriors, un domini simplement connex és intuïtivament un obert connex del pla "sense forats". En aquests tipus de dominis, tota la teoria anterior pren una forma especial ja que, per exemple, totes les corbes tancades són contractibles, una propietat que, de fet, es pot prendre com a definició.

Definició 5.26. Un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és *simplement connex* si és connex i tota corba tancada en Ω és homòtopa a 0 en Ω. •

De fet, si $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, aleshores són equivalents:

- Ω és simplement connex,
- tot cicle en Ω és homòleg a 0 en Ω, i
- $\mathbb{C}_\infty \backslash \Omega$ és connex

Vegeu [BC13, proposició 6.4], per exemple, on la definició de partida és la tercera, per veure l'equivalència de la segona i la tercera. Que la primera implica la segona és la proposició 5.21. Que la tercera implica la primera es pot veure usant arguments elementals, vegeu l'exercici 5.4.2. Per exemple, sabem que $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ és connex, però no simplement connex. Aquí tenim $\mathbb{C}\backslash\Omega = \{0\}$ que és connex. En canvi $\mathbb{C}_\infty\backslash\Omega = \{0\} \cup \{\infty\}$ que no és connex. Notem que la definició de simplement connex en dimensions superiors o en espais arc-connexos sol ser anàloga a la segona de les anteriors.

Teorema 5.27 (Teorema de Cauchy per dominis simplement connexos)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, $f \in H(\Omega)$ i γ un camí tancat en Ω. Llavors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ i també val la fórmula integral de Cauchy.*

Demostració. Com que Ω és simplement connex, podem usar directament la versió homotòpica del teorema de Cauchy. □

Proposició 5.28 (Existència de primitives en dominis simplement connexos)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω.*

Demostració. Fixem un punt $a \in \Omega$. Com que Ω és un obert connex, llavors és arc-connex, de manera que donat $z \in \Omega$, hi ha una corba que uneix a amb z en Ω[3]. Com que volem que sigui derivable a trossos, podem suposar que es tracta d'una poligonal $L_{a,z} \subset \Omega$. Definim

$$F(z) = \int_{L_{a,z}} f(w)\, dw, \qquad z \in \Omega.$$

Donat h amb $|h|$ prou petit, considerem el camí tancat γ format per la poligonal $L_{a,z}$, el segment $[z, z+h]$ i la poligonal $L_{a,z+h}$ (recorreguda en sentit contrari). Com que Ω és simplement connex, pel teorema de Cauchy tenim que

$$0 = \int_\gamma f(w)dw = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w)dw - F(z+h).$$

[3]Recordem que no és cert en general que un conjunt connex sigui arc-connex.

A partir d'aquí acabem la prova, veient que F és holomorfa amb $F'(z) = f(z)$, igual com vam fer en el teorema de Cauchy per un disc, vegeu el teorema 4.14. □

Proposició 5.29 (Determinació del logaritme en dominis simplement connexos)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors existeix $g \in H(\Omega)$ amb*

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $e^{w_0} = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$.

Demostració. Com que $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors la funció f'/f és holomorfa en Ω. Per la proposició anterior, té primitiva holomorfa G. Considerem la funció $H(z) = e^{G(z)} \in H(\Omega)$ amb $H(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors la funció f/H és holomorfa en Ω amb derivada donada per

$$(f/H)' = \frac{f'H - fH'}{H^2}.$$

Però $H' = HG' = Hf'/f$ així que $f'H - fH' = 0$. Per tant f/H és igual a una constant $c \neq 0$ en Ω. És a dir,

$$f(z) = c\, e^{G(z)} = e^{G(z)+c'}$$

per alguna constant c'. Agafant $g(z) = G(z) + c' + 2k\pi i$ per un $k \in \mathbb{Z}$ apropiat, tenim que $g(z_0) = w_0$ i la proposició queda provada. □

Com a exemple, veiem que en la regió $\Omega = \mathbb{C}\backslash E$, on E és una espiral que surt del 0 fins a l'infinit, hi ha determinació holomorfa del logaritme de z (ja que Ω és simplement connex, la funció $f(z) = z \in H(\Omega)$, i $f(z) \neq 0$ en Ω).

Comentari 5.30. El fet que tota funció holomorfa tingui primitiva en Ω, o que tota funció holomorfa sense zeros en Ω tingui determinació del seu logaritme en Ω, caracteritza els dominis simplement connexos (vegeu [BC13, teorema 6.22]), encara que quan tenim un obert connex Ω, la millor manera de comprovar si és simplement connex és mirar si $\mathbb{C}_\infty\backslash\Omega$ és connex o no. •

Exercicis

5.4.1. *Siguin $f, g \in H(\mathbb{C})$ tals que $f^2 + g^2 \equiv 1$. Demostra que existeix $h \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos(h)$ i $g = \sin(h)$.* ◁

5.4.2. *Demostra que si $\mathbb{C}_\infty\backslash\Omega$ és connex i Ω és un obert connex, aleshores tota corba tancada γ és homòtopa a 0.* ◁

5.4.3. *[Determinació de l'arrel en dominis simplement connexos] Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors existeix $g \in H(\Omega)$ amb*

$$g(z)^2 = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $w_0^2 = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$.

5.5. Funcions harmòniques

En aquesta secció farem servir la notació introduïda a la secció 3.2.

Definició 5.31 (Funció harmònica)**.** Diem que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és una *funció harmònica* si $f \in C^2(\Omega)$ i el seu *laplacià*

$$\Delta f = (\partial_x)^2 f + (\partial_y)^2 f = 0.$$

Diem que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és una funció antiholomorfa si $f \in C^1(\Omega)$ i

$$\partial f = 0. \qquad \bullet$$

Exemple 5.32. Les funcions lineals $f(x + iy) = x + y$ són evidentment harmòniques. Però hi ha altres polinomis harmònics. Per exemple, $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2)$ i $f(z) = 2xy = \operatorname{Im}(z^2)$. $\lozenge$

Observació 5.33 (Càlcul del laplacià amb les derivades de Wirtinger)**.** Notem que si $f \in C^2(\Omega)$, aleshores

$$4\bar{\partial}\partial f = 2\bar{\partial}(\partial_x f - i\partial_y f) = \partial_x\partial_x f + i\partial_y\partial_x f - i\partial_x\partial_y f - i^2\partial_y\partial_y f = \Delta f,$$

on hem usat el teorema d'igualtat de les derivades creuades per cancel·lar els termes amb ∂_x i ∂_y. Anàlogament trobem que

$$4\partial\bar{\partial} f = \Delta f. \qquad \bullet$$

En particular, hem demostrat el següent resultat.

Lema 5.34. *[Holomorfia implica harmonicitat] Una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és harmònica si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i*

$$\bar{\partial}\partial f \equiv 0,$$

si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i

$$\partial\bar{\partial} f \equiv 0.$$

En particular, f és harmònica si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i $\partial f \in H(\Omega)$.

Lema 5.35. *Sigui $f \in H(\Omega)$. Aleshores les seves parts reals i imaginàries són harmòniques.*

Demostració. Notem que $\partial\bar{\partial} f = 0$. Per tant, pel lema 5.34, la funció f és harmònica. Però $\Delta f = 0$ si i només si $\Delta u = 0$ i $\Delta v = 0$, on $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. $\square$

Anem a veure com podem obtenir el resultat en direcció contrària. Evidentment no és suficient que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ i $v : \Omega \to \mathbb{R}$ siguin harmòniques per tal que $u + iv$ sigui holomorfa, ja que si no serien condicions equivalents. Però per tota u harmònica i de valors reals sí que podem trobar v tal que $u + iv$ sigui holomorfa. Comencem per veure en primer lloc que podem descompondre tota funció harmònica com a suma de la seva part holomorfa i la seva part antiholomorfa en dominis simplement connexos.

Lema 5.36. *[Descomposició en parts holomorfa i antiholomorfa] Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funció harmònica. Aleshores existeixen dues funcions $F, G \in H(\Omega)$ tals que*

$$f = F + \overline{G}.$$

A més, la descomposició és única mòdul constants additives.

Demostració. Pel lema 5.34 tenim que $\partial f \in H(\Omega)$. Per la proposició 5.28 podem trobar una primitiva holomorfa $F : \Omega \to \mathbb{C}$, és a dir tal que

$$\bar{\partial} F = 0 \quad \text{i} \quad \partial F = \partial f.$$

Anomenem $G = \overline{f - F}$. Aleshores

$$\bar{\partial} G \overset{\text{O.3.25}}{=} \overline{\partial \bar{G}} = \overline{\partial (f - F)} = 0.$$

Per veure la unicitat, notem que si $f = \widetilde{F} + \overline{\widetilde{G}} = F + \overline{G}$ amb $F, G, \widetilde{F}, \widetilde{G} \in H(\Omega)$, aleshores tenim que

$$\partial \bar{G} = \overline{\bar{\partial} G} = 0 = \overline{\bar{\partial} \widetilde{G}} = \partial \bar{\widetilde{G}}$$

i per tant

$$(F - \widetilde{F})' = \partial (F - \widetilde{F}) = \partial (F + \overline{G} - \widetilde{F} - \overline{\widetilde{G}}) = \partial (f - f) = 0.$$

La proposició 3.14 ens permet concloure que $F - \widetilde{F} = c \in \mathbb{C}$. A més,

$$G - \widetilde{G} = \overline{(f - F) - (f - \widetilde{F})} = -\bar{c}. \qquad \square$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és harmònica, aleshores és *analítica real*, és a dir que per tot $z_0 = a + ib \in \Omega$ existeixen coeficients $a_{n,m}$ i un radi r tals que

$$f(x + iy) = \sum_{n,m \geqslant 0} a_{n,m} (x - a)^n (y - b)^m \quad \text{per } (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2.$$

De fet, tenim una forma més concreta, i és que els polinomis aproximadors són harmònics i per tant, en expressar el polinomi en termes de z i $\bar{z}$ no poden aparèixer termes creuats tipus $(z - z_0)^n (\overline{z - z_0})^m$ amb $n, m > 0$:

Lema 5.37 (Expressió en sèries de potències)**.** *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és harmònica, llavors per cada $z_0 \in \Omega$ existeixen coeficients $a_n, b_m \in \mathbb{C}$ tals que, si $R := \operatorname{dist}(z_0, \Omega^c)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m \geqslant 1} b_m (\overline{z - z_0})^m \quad \textit{per } |z - z_0| < R.$$

La convergència és uniforme i absoluta en compactes de $D_R(z_0)$.

Demostració. Sigui $r = \operatorname{dist}(z_0, \Omega^c)$. Aleshores f és harmònica en $H(D_r(z_0))$. Pel lema 5.36, existeixen $F, G \in H(D_r(z_0))$ tals que $f = F + \bar{G}$. Pel teorema 4.22, F i G es poden expressar en forma de sèries de potències amb radi de convergència major o igual a r. Absorbint els termes independents en $a_0 = F(z_0) + \overline{G(z_0)}$, obtenim el resultat. $\square$

Teorema 5.38 (Existència de la conjugada harmònica)**.** *Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funció harmònica. Aleshores existeix una funció harmònica $v : \Omega \to \mathbb{R}$ que anomenem* harmònica conjugada *de u tal que*

$$u + iv \in H(\Omega).$$

A més, v és única mòdul una constant real additiva.

Demostració. Pel lema 5.36, existeixen $F, G \in H(\Omega)$ tals que $u = F + \overline{G}$. En particular,

$$V := \operatorname{Im} F = \operatorname{Im} G,$$

i escrivim $U = \operatorname{Re} F$ i $\widetilde{U} = \operatorname{Re} G$.

En primer lloc veiem que $U = \widetilde{U} + c$. Efectivament, com que U i $\widetilde{U}$ prenen valors reals, tenim que $U = \bar{U}$ i el mateix passa amb $\widetilde{U}$, així que

$$F - G = U + iV - \widetilde{U} - iV = U - \widetilde{U} \in \mathbb{R},$$

de manera que

$$F - G = \overline{F - G},$$

així que

$$(F - G)' = \partial(F - G) = \partial\overline{F - G} = \overset{\text{3.25}}{=} \overline{\bar{\partial}(F - G)} = 0.$$

La proposició 3.14 ens permet concloure que $U - \widetilde{U} = F - G = c \in \mathbb{R}$.

Definim ara $v = 2V$. Com que $U = \widetilde{U} + c$, trobem $u = F + \bar{G} = 2U - c$ i $u + iv = 2F - c \in H(\Omega)$. □

Per acabar aquesta pinzellada de funcions harmòniques, ens interessem per com queda la fórmula integral de Cauchy en aquest context. Per simplificar les expressions, estudiarem el cas $a = 0$, és a dir que treballem amb discs centrats a l'origen.

Definició 5.39. El *nucli de Poisson*[4] és la funció

$$P(z, z_0) = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}.$$

El *nucli de Herglotz*[5] és la funció

$$H(z, z_0) = \left(\frac{z + z_0}{z - z_0}\right). \qquad \bullet$$

Notem que els dos nuclis estan relacionats per la fórmula

$$\operatorname{Re} H(z, z_0) = \operatorname{Re}\left(\frac{(z + z_0)\overline{(z - z_0)}}{|z - z_0|^2}\right) = P(z, z_0). \tag{5.2}$$

[4] Siméon Denis Poisson, Pithiviers, 1781–1840, https://ca.wikipedia.org/wiki/Sim%C3%A9on_Denis_Poisson

[5] Gustav Herglotz, Wallern, 1881–1953, https://ca.wikipedia.org/wiki/Gustav_Herglotz

Teorema 5.40 (Fórmula integral de Poisson)**.** *Sigui $f : D_R(a) \to \mathbb{C}$ una funció harmònica, i sigui $r < R$. Aleshores per tot $z_0 \in D_r(a)$ tenim que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} f(z) P(z-a, z_0-a) |dz|.$$

Demostració. Comencem per comprovar que aquesta fórmula val per funcions holomorfes en $D_R(0)$. Efectivament, la fórmula integral de Cauchy diu que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Per altra banda, com que $\frac{f(z)}{r^2 - z\overline{z_0}}$ és holomorfa en $z \in D_r(0)$ ja que el denominador no s'anul·la, i pel teorema de Cauchy per un disc, tenim que

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z(\overline{z - z_0})}\, dz = \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{r^2 - \overline{z_0} z}\, dz = 0.$$

Per tant,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} - \frac{f(z)\overline{z_0}}{z(\overline{z - z_0})} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} f(z) \left(\frac{z}{z - z_0} - \frac{\overline{z_0}}{(\overline{z - z_0})} \right) \frac{dz}{z}.$$

Notem que

$$\frac{z}{z - z_0} - \frac{\overline{z_0}}{(\overline{z - z_0})} = \frac{z(\overline{z - z_0}) - \overline{z_0}(z - z_0)}{|z - z_0|^2} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} = P(z, z_0).$$

Deduïm que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) P(re^{it}, z_0)\, \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} f(z) P(z, z_0)\, |dz|,$$

tal com volíem veure.

Si f és harmònica, aleshores considerem la descomposició $f(z+a) = F(z) + \overline{G(z)}$ donada en $D_R(0)$ pel lema 5.36. Trobem que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= F(z_0 - a) + \overline{G(z_0 - a)} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} F(z) P(z, z_0 - a)\, |dz| + \overline{\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} G(z) P(z, z_0 - a)\, |dz|} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} (F(z) + \overline{G(z)}) P(z, z_0 - a)\, |dz|, \end{aligned}$$

i concloem la demostració amb el canvi de variable $z = w - a$. □

Com a conseqüència veiem com podem recuperar el valor d'una funció holomorfa en termes de la seva part imaginària a la frontera (es pot obtenir una expressió anàloga també amb la part real).

Corol·lari 5.41 (Fórmula de representació de Herglotz)**.** *Donada una funció $f \in H(\Omega)$, si $v = \operatorname{Im} f$, aleshores per tot $r < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$ tenim que*

$$f(z_0) = \operatorname{Re} f(a) + \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, z_0-a)\, |dz|.$$

Demostració. Pel teorema 4.37 de derivació sota el signe d'integració, trobem que tota funció contínua $f \in C(\partial D_r(a))$ dona lloc a una funció holomorfa en el disc $D_r(a)$ en integrar contra el nucli de Herglotz. En particular, si definim per $z_0 \in D_r(a)$ la funció

$$g(z_0) \coloneqq \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, z_0-a)\, |dz|,$$

aquesta és holomorfa en $D_r(a)$. Per $z_0 \in D_r(a)$ trobem doncs que

$$\operatorname{Im} g(z_0) \coloneqq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} \operatorname{Re}\left(v(z) H(z-a, z_0-a)\right) |dz| \overset{(5.2)}{=} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) P(z-a, z_0-a)\, |dz|,$$

i per la fórmula integral de Poisson (vegeu el teorema 5.40) tenim que

$$\operatorname{Im} g = v \qquad \text{en } D_r(a).$$

Com que l'harmònica conjugada de v és única llevat d'una constant additiva, trobem que $f = g + c$ amb $c \in \mathbb{R}$. En particular, avaluant en a tenim que

$$\begin{aligned} c = f(a) - g(a) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} f(z) P(z-a, 0)\, |dz| - \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, 0)\, |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} u(z)\, |dz| = \operatorname{Re} f(a). \end{aligned}$$

□

Observació 5.42. En la demostració anterior, veiem que

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, z_0-a)\, \frac{dz}{z},$$

i per tant, utilitzant el teorema de derivació sota el signe integral, obtenim

$$g'(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \partial_{z_0} H(z-a, z_0-a)\, \frac{dz}{z} = \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \partial_{z_0} H(z-a, z_0-a)\, |dz|.$$

Per tant,

$$g'(z_0) = \frac{i}{\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \frac{z-a}{(z-z_0)^2}\, |dz|.$$

•

Exercicis

5.5.1. *Sigui $u : D \to \mathbb{R}$ una funció harmònica en un domini simplement connex Ω. Demostra que existeix una funció $v : D \to \mathbb{R}$ harmònica conjugada d'u (vegeu l'exercici 4.3.3).* ◁

5.5.2. *Demostra el lema 5.35 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament.* ◁

5.5.3. *Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ una* aplicació de Riemann*, és a dir un homeomorfisme holomorf entre $\mathbb{D}$ i Ω amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6, les derivades de les quals estenen contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i a $\partial\Omega$ respectivament. Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que*

$$\mathcal{L}(\varphi'(z_0)) = \operatorname{Re}\mathcal{L}(\varphi')(0) + \frac{i}{2\pi r}\int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}(\varphi'(z))H(z,z_0)|dz|.$$ ◁

5.5.4. *El* problema de Dirichlet *consisteix en trobar una funció harmònica en un domini obert Ω que sigui contínua fins la seva frontera $\partial\Omega$ i amb un valor prefixat a $\partial\Omega$. Suposem que ϕ_1 i ϕ_2 són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Provar que si Ω és simplement connex, aleshores $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt d'Ω.* Indicació*: trobar la funció v harmònica conjugada de $\phi_1 - \phi_2$ i aplicar el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2 + iv$.* ◁

5.5.5. *Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi* 1 *si sabem que la temperatura val* $\operatorname{Im} z$ *als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i* 0 *a la resta de punts de la vora. En particular veieu que la temperatura al centre del disc és* $1/\pi$. ◁

6. Sèries de Laurent

En aquest capítol veurem com són les singularitats aïllades de les funcions holomorfes i estudiarem els desenvolupaments en sèrie entorn d'una singularitat. Obtindrem el teorema dels residus, que ens permetrà calcular integrals definides i indefinides que altrament serien complicades.

6.1. Sèries de Laurent i singularitats

Veurem tot seguit que tota funció holomorfa en un anell té un desenvolupament en sèrie de Laurent[1], que té una expressió formal similar a les sèries de potències, considerant també exponents negatius.

Sigui $a \in \mathbb{C}$, i siguin $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Considerem l'anell

$$\Omega = \big\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\big\}.$$

Observem que a Ω, són holomorfes les funcions $1, (z-a), (z-a)^2, \ldots, (z-a)^n$, però també ho són les funcions $(z-a)^{-1}, (z-a)^{-2}, \ldots, (z-a)^{-n}$.

Definició 6.1 (sèrie de Laurent)**.** Anomenem *sèrie de Laurent* al voltant d'$a \in \mathbb{C}$ a una sèrie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n.$$

La part amb exponents negatius s'anomena la *part singular* de la sèrie de Laurent. •

Observem que $f_2(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$ és una sèrie de potències que tindrà un radi de convergència R_2, de manera que $f_2 \in H\big(D_{R_2}(a)\big)$.

Considerem ara la sèrie que correspondria a les potències negatives, amb $w = \frac{1}{z-a}$, és a dir, estudiem la sèrie $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$. Aquesta és també una sèrie de potències, que tindrà el seu radi de convergència R_1 i, en particular, convergirà uniformement en $|w| \leqslant r$, per a tot $r < R_1$. Aleshores

$$f_1(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

convergirà si $\frac{1}{|z-a|} < R_1$, és a dir, si $|z-a| > \frac{1}{R_1}$. I a més a més, la sèrie que defineix $f_1(z)$ convergeix uniformement en $\{|z-a| \geqslant 1/r\}$, on $r < R_1$.

[1] Pierre Alphonse Laurent, París, 1813–1854, https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre_Alphonse_Laurent

Ajuntant les dues parts de la sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, veiem que f és holomorfa en l'anell $\{\frac{1}{R_1} < |z-a| < R_2\}$ (sempre que $1/R_1 < R_2$). El recíproc d'aquesta afirmació també és certa: tota funció holomorfa en un anell s'expressa com una sèrie de Laurent.

Teorema 6.2. *[Existència i unicitat] Sigui $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ amb $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, i sigui $f \in H(\Omega)$. Aleshores hi ha una única sèrie de Laurent amb*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n, \qquad z \in \Omega.$$

A més, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en els compactes d'Ω. En particular,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \quad \textit{per qualsevol } \rho \in (r,R). \tag{6.1}$$

Demostració. Considerem les sèries $f_2(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n\,(z-a)^n$ i $f_3(w) = \sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\,w^n$ amb c_n donat per (6.1) (observem que el valor de ρ escollit no afecta, ja que si $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, els cercles $\gamma_{\rho_j}(t) = a + \rho_j e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$ són homòlegs en Ω, vegeu l'exemple 5.16), amb radis de convergència $R_2 = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$ i $R_3 = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}\right)^{-1}$.

Notem en primer lloc que si $n \in \mathbb{Z}$ i $r < \rho < R$, aleshores

$$|c_n| \overset{\text{P.4.8}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_{|w-a|=\rho} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}}|dw| \leqslant \frac{\sup_{\partial D_\rho(a)}|f|}{\rho^n}.$$

Per tant,

$$\frac{1}{R_2} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)}|f|}}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

i

$$\frac{1}{R_3} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)}|f|}\rho = \rho.$$

Com que $\rho \in (r,R)$ és arbitrari, deduïm que

$$R_1 := \frac{1}{R_3} \leqslant r \qquad \text{i} \qquad R \leqslant R_2.$$

Les sèries f_2 i f_3 convergeixen absolutament i uniforme en compactes dels seus discs de convergència $D_{R_2}(a)$ i $D_{R_3}(0)$ respectivament. Fent el canvi $w = (z-a)^{-1}$ en la segona sèrie deduïm que

$$f_1(z) := f_3(w) = \sum_{n\leqslant 1} c_n\,(z-a)^n$$

és convergent absolutament i uniforme en compactes de $\overline{D_{R_1}(a)}^c$. Per tant, $f_1 + f_2$ és convergent absolutament i uniforme en compactes d'Ω tal com volíem veure.

Resta demostrar que $f = f_1 + f_2$ i que la sèrie és única. Comencem per veure la coincidència. Fixem $z \in \Omega$. Prenem r_1, r_2 amb $r < r_1 < |z-a| < r_2 < R$, i considerem els cercles

$$\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}, \qquad \gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Definim el cicle $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Com que Γ és homòloga a 0 en l'anell Ω, i $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 1$, aplicant la fórmula integral de Cauchy global, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Ara desenvoluparem en sèrie cadascuna de les dos integrals, de la mateixa manera que vam fer quan vam provar que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, i ja haurem acabat. En primer lloc, per $w \in \gamma_2^*$, i com que $|z-a| < r_2 = |w-a|$, tenim que $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}},$$

i la convegència de la sèrie és uniforme en γ_2^* pel criteri M de Weierstrass. Per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k\geqslant 0}(z-a)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw = f_2(z).$$

Per a la segona integral, procedim anàlogament: observem que, per $w \in \gamma_1^*$ tenim que $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| = \frac{r_1}{|z-a|} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(w-a)^{k-1}}{(z-a)^k}.$$

Aplicant el criteri M-de Weierstrass, aquest cop en γ_1^*, deduïm que la sèrie anterior convergeix uniformement en γ_1^* i per tant podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^k}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r_1} f(w)\,(w-a)^{k-1}\,dw\right) = f_1(z).$$

Vegem ara la unicitat. Prenem ρ amb $r < \rho < R$. Recordem que, per $k \in \mathbb{Z}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq -1 \\ 1 & \text{si} \quad k = -1 \end{cases}$$

Si $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k (z-a)^k$ convergeix uniformement en els compactes d'Ω (això serà així per Cauchy-Hadamard), llavors podem treure el sumatori fora de la integral en el càlcul que segueix, per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho} (w-a)^{k-(n+1)} dw = b_n,$$

que determina el coeficient $b_n = c_n$ de manera única. □

Exercicis

6.1.1. *Calcular la sèrie de Laurent de*

a) $\dfrac{z-1}{z(z-4)^3}$ *a* $0<|z-4|<4$.

b) $1/e^{(1-z)}$ *per* $|z|>1$. ◁

6.1.2. *Per a la funció* $f(z)=\dfrac{\sin z\cos 3z}{z^4}$

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a* $z=0$.
2. *Calcular* $\oint f(z)dz$ *si es recorre* $|z|=1$ *un cop i en sentit antihorari.* ◁

6.1.3. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de* $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ *a les corones: (a)* $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$*, (b)* $\{z\in\mathbb{C}:0<|z-1|<1\}$*, (c)* $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ *i (d)* $\{z\in\mathbb{C}:|z-1|>1\}$. ◁

6.1.4. *Sigui* $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$*, donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a* 0 *allà on* f *és analítica (*$|z|<1, 1<|z|<3$ *i* $|z|>3$*).* ◁

6.1.5. *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent de*

a) $f(z)=z^2\cos\left(\dfrac{1}{3z}\right)$ *per* $|z|>0$.

b) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ *per* $0<|z|<R$. ◁

6.1.6. *Quina és la corona (o anell) de convergència de* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{2^{|n|}}$*?* ◁

6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Definició 6.3. Les *singularitats* d'una funció holomorfa són els punts on f no és holomorfa. És a dir, si $f\in H(\Omega\backslash E)$, llavors els punts de E s'anomenen les singularitats de f.

Una singularitat z_0 d'una funció holomorfa f es diu *aïllada* si hi ha $r>0$ de manera que $f\in H\big(D_r(z_0)\backslash\{z_0\}\big)$. •

Per exemple, les funcions

$$\frac{\sin z}{z};\qquad \frac{1}{z^2};\qquad e^{1/z}$$

són holomorfes a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, i tenen una singularitat aïllada en $z=0$.

Definició 6.4 (Singularitat evitable)**.** Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f. Diem que z_0 és una *singularitat evitable* de f si hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H\big(D_\varepsilon(z_0)\big)$ amb

$$f(z) = g(z) \qquad \forall z \in D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}. \qquad \bullet$$

És a dir, una singularitat evitable seria una singularitat "fictícia", ja que podriem redefinir la funció de manera que sigui holomorfa al voltant del punt. És clar que si z_0 és una singularitat aïllada de f, i existeix $\lim_{z\to z_0} f(z)$, llavors z_0 és una singularitat evitable de f (simplement definint $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$). Ara bé, existeix un criteri encara més feble per determinar quan una singularitat aïllada és evitable.

Proposició 6.5. *Sigui z_0 singularitat aïllada d'una funció holomorfa f. Llavors z_0 és evitable si i només si*

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Demostració. Tenim que $f \in H\big(D_r(z_0)\backslash\{z_0\}\big)$. Si z_0 és una singularitat evitable, llavors hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb $f(z) = g(z)$ per $z \in D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$. Per tant

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0.$$

Suposem ara que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$, i provarem que z_0 és una singularitat evitable de f. Definim

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ 0 & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}.$$

Llavors h és holomorfa en $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$. Com que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, la funció h és contínua en z_0, de manera que se segueix que h és holomorfa en $D_r(z_0)$ (veure una de les conseqüències del teorema de Morera). Com que $h(z_0) = 0$, pel teorema 4.41 hi ha $g \in H\big(D_r(z_0)\big)$ amb $h(z) = (z-z_0)g(z)$. En particular, $f(z) = g(z)$ per $z \neq z_0$, de manera que z_0 és una singularitat evitable de f. □

A partir d'aquesta proposició ja podem veure que la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ té una singularitat evitable en $z = 0$. En canvi, les singularitats en $z = 0$ de les funcions $\frac{1}{z^2}$ i $e^{1/z}$ no són evitables.

Definició 6.6 (Pol)**.** Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f. Diem que z_0 és un *pol* de f si

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty. \qquad \bullet$$

Exemple 6.7. La funció $\frac{1}{z^2}$ té un pol en $z = 0$. En canvi, la singularitat en $z = 0$ de la funció $f(z) = e^{1/z}$ no és evitable ni és un pol, ja que si $z = -x$, tenim que $e^{-1/x} \to 0$ quan $x \to 0$, i en canvi, per $z = ix$, tenim que $|e^{1/ix}| = 1$. ◊

Definició 6.8 (Singularitat essencial)**.** Una singularitat aïllada d'una funció holomorfa que no és evitable ni és un pol, es diu que és una *singularitat essencial*. •

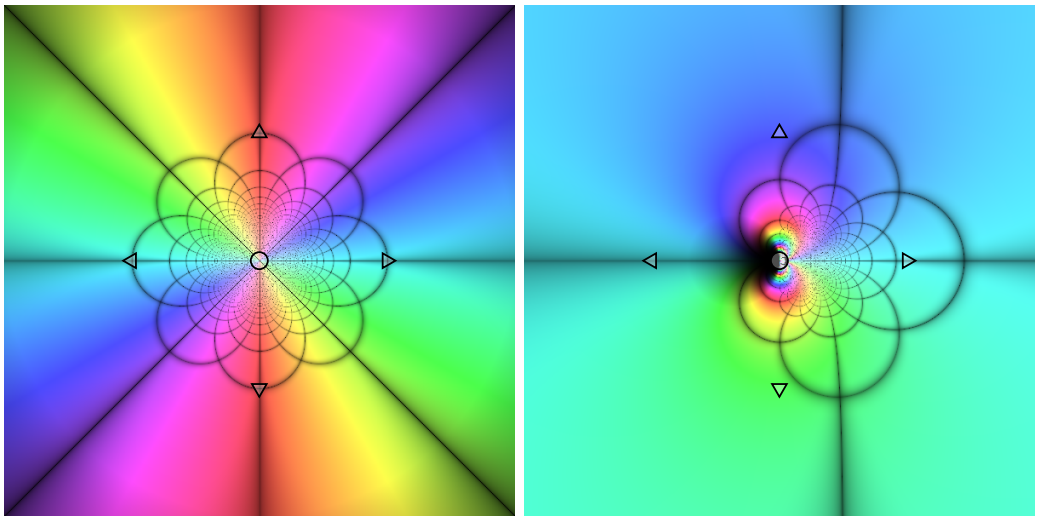


Figura 6.1.: A l'esquerra la funció $\frac{1}{z^2}$, amb un pol d'ordre 2 a l'origen; a la dreta $f(z) = e^{1/z}$, amb una singularitat essencial a l'origen.

Tornem al cas en què una funció f holomorfa en $D_R(z_0)\backslash\{z_0\}$ tingui un pol en el punt z_0. Donat que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, existeix $0 < r < R$ i per a tot $0 < |z-z_0| < r$, $f(z) \neq 0$. Si definim en $\Omega = D_r(z_0)$ la funció

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases},$$

es compleix que $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, que prova que g és contínua en z_0. Per tant, $g \in C(\Omega) \cap H(\Omega\backslash\{z_0\})$, que implica que $g \in H(\Omega)$. Com que $g(z_0) = 0$, pel teorema 4.41 hi ha $m \in \mathbb{N}$ de manera que $g(z) = (z-z_0)^m g_1(z)$, on $g_1 \in H(\Omega)$ amb $g_1(z_0) \neq 0$. En particular, $g_1(z) \neq 0$ en un entorn de z_0, de manera que podem desenvolupar en sèrie de potències al voltant de z_0 la funció $1/g_1$,

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-z_0)^k.$$

Llavors, per z en un entorn de z_0 amb $z \neq z_0$, tenim que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\,\frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-z_0)^k \\ &= \frac{A_0}{(z-z_0)^m} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots \frac{A_{m-1}}{(z-z_0)} + G(z), \end{aligned}$$

on G és una sèrie de potències al voltant de z_0, i $A_0 \neq 0$.

Definició 6.9. Donada una funció f amb un pol en z_0, anomenem *ordre del pol* z_0 al nombre natural m tal que podem escriure

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

amb $c_{-m} \neq 0$. •

Per exemple, la funció $f(z) = \frac{1}{z^2}$ té un pol d'ordre 2 en $z = 0$.
També veiem que z_0 és un pol de f d'ordre m, si

$$\lim_{z \to z_0} \left|(z - z_0)^k f(z)\right| = +\infty, \quad \text{per a tot } k < m,$$

i existeix el límit

$$c_m = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0.$$

Si tenim una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f, podem veure quin tipus de singularitat és mitjançant la sèrie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < r$.

Lema 6.10 (Classificació de singularitats aïllades en termes de la sèrie de Laurent)**.** *Sigui f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < r\}$ amb sèrie de Laurent donada per*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < r.$$

(i) z_0 és evitable si $c_{-n} = 0$ per a tot $n \geqslant 1$;

(ii) z_0 és un pol d'ordre m si $c_{-n} = 0$ per a tot $n > m$ i $c_{-m} \neq 0$;

(iii) z_0 és una singularitat essencial si hi ha infinits $c_{-n} \neq 0$ per $n > 0$.

El següent resultat ens dona una idea del que passa al voltant d'una singularitat essencial d'una funció holomorfa.

Teorema 6.11 (Casorati[2]-Weierstrass)**.** *Sigui f holomorfa en $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f, llavors*

$$f\Big(D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}\Big)$$

és dens en $\mathbb{C}$ per a tot $0 < \varepsilon \leqslant r$.

Demostració. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leqslant r$. Suposem que $f\big(D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}\big)$ no és dens en $\mathbb{C}$. Aleshores hi ha $w_0 \in \mathbb{C}$ i $t > 0$ de manera que

$$|f(z) - w_0| \geqslant t \qquad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

[2]Felice Casorati, Pavia, 1835–1890, https://ca.wikipedia.org/wiki/Felice_Casorati

En particular, $f(z) \neq w_0$ i per tant la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

és holomorfa en $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$. La condició (6.2) ens diu també que g és fitada, de manera que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)g(z) = 0$, que implica que $\{z_0\}$ és una singularitat evitable de g per la proposició 6.5. Llavors existeix

$$\alpha = \lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Si $\alpha = 0$, llavors $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, de manera que z_0 seria un pol de f, en contradicció amb la nostra hipòtesi. Finalment, si $\alpha \neq 0$, llavors

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 + \frac{1}{\alpha}$$

de manera que z_0 seria una singularitat evitable de f, en contradicció amb el fet que z_0 és una singularitat essencial de f. □

Un resultat més avançat (teorema gran de Picard[3]), ens diu que al voltant d'una singularitat essencial, una funció holomorfa pren tots els valors complexos excepte potser un.

Exercicis

6.2.1. *Construcció de funcions*

1. *Trobar una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.*
2. *Trobar una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$.* ◁

6.2.2. *Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0. Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que*

a) Si $n > m$ $h(z)$ té un zero d'ordre $n - m$ a z_0,

b) si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m - n$ a z_0,

c) si $n = m$ $h(z)$ és holomorfa i no nul·la a z_0. ◁

6.2.3. *Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f, calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per a què f sigui holomorfa en un entorn d'a, i si a és un pol de f, determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).*

[3] Charles Émile Picard, París, 1856–1941, https://ca.wikipedia.org/wiki/Charles_%C3%89mile_Picard

a) $f(z) = z\cos(1/z)$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3(z-1)^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{(1-e^z)^2}$. ◁

6.2.4. *Sigui* $f \in H(D_r(a)\backslash\{a\})$. *Suposem que existeix una successió* $(z_n)_n$ *tal que* $z_n \to a$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left|f\left(z_n + \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f *en el punt* a. ◁

6.2.5. *a) La funció* $\tan(1/z)$ *té una singularitat aïllada al* 0*? De quin tipus?*

b) Sigui 0 *singularitat aïllada de* $f(z)$. *Suposem que* $|f(z)| \leqslant |z|^{-\alpha}$ *on* $0 < \alpha < 1$. *Demostreu que* 0 *és una singularitat evitable.* ◁

6.3. Teorema dels Residus

L'objectiu és calcular el valor de $\int_\gamma f$ quan γ és un camí tancat en Ω, però la funció f no és holomorfa en tot Ω, sinó que té singularitats aïllades.

Definició 6.12. Sigui f holomorfa amb una singularitat aïllada en un punt a. Sigui

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$$

el desenvolupament en sèrie de Laurent de f al voltant del punt a. El *residu* de f en a és

$$\operatorname{Res}(f,a) = c_{-1}. \qquad \bullet$$

Proposició 6.13. *Sigui* $r > 0$ *i* $a \in \mathbb{C}$ *i sigui* $f \in H\big(D_r(a)\backslash\{a\}\big)$. *Llavors*

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a) \qquad \forall\, 0 < \varepsilon < r.$$

Demostració. Això és una conseqüència immediata del teorema 6.2 i de la definició de residu. □

Observació 6.14 (Càlcul de residus)**.** És clar que si $z = a$ és una singularitat evitable de f, llavors $\operatorname{Res}(f,a) = 0$.

Si $z = a$ és un pol simple de f, llavors

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Suposem que $z = a$ és un pol de f d'ordre m. En aquest cas, obtenim el desenvolupament de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad 0 < |z-a| < r.$$

Llavors, per $0 < |z-a| < r$, tenim que

$$g(z) := (z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \ldots$$

de manera que el residu de f en el punt a és el coeficient $(m-1)$-èssim del desenvolupament en sèrie de potències de la funció g, que sabem que és

$$\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Per tant, si $z = a$ és un pol de f d'ordre m, llavors

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\partial^{(m-1)}\big[(z-a)^m f(z)\big]_{z=a}. \qquad \bullet$$

Exemple 6.15. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)^2},$$

que té singularitats en els punts $z_0 = 1$ i $z_1 = -1$, que són pols d'ordre 2. Llavors, si $g(z) = (z-1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$, tenim que

$$\operatorname{Res}(f,1) = g'(1) = 0.$$

Si $h(z) = (z+1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, llavors $h'(z) = \frac{e^z(z-1)-2e^z}{(z-1)^3}$ i

$$\operatorname{Res}(f,-1) = h'(-1) = \frac{1}{2e}. \qquad \lozenge$$

Teorema 6.16 (Teorema dels residus)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $f \in H(\Omega\backslash A)$, on $A \subset \Omega$ no té punts d'acumulació en Ω. Si Γ és un cicle en $\Omega\backslash A$ que és homòleg a 0 en Ω, llavors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}(\Gamma,a)\operatorname{Res}(f,a).$$

Demostració. Vegem primer que la suma té un nombre finit de termes diferents de zero. Posem

$$K = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^*;\ \operatorname{Ind}(\Gamma,z) \neq 0\}.$$

Comprovem que K és compacte. Observem primer que $K \subset \Omega$, doncs per hipòtesi $\operatorname{Ind}(\Gamma,z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Si $\Gamma^* \subset D_R(0)$, llavors $\mathbb{C}\backslash D_R(0)$ està contingut en la component connexa no fitada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$, on es verifica que $\operatorname{Ind}(\Gamma,\cdot) = 0$. Per tant,

$K \subset D_R(0)$ i, en particular, K és **fitat**. Per altra banda, cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ és un obert i K és el complementari de les components connexes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ on l'índex val zero, es a dir, K és **tancat** i, en conseqüència, K és compacte.

Com que A no té punts d'acumulació en Ω, és finit o numerable i, en particular,

$$B = \{a \in A : \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a) \neq 0\} = K \cap A,$$

és finit ja que el compacte $K \subset \Omega$ no pot contenir punts d'acumulació. Per tant

$$B = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Considerem els discs oberts $D_i := D_{\varepsilon_i}(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$ amb $\overline{D_i} \cap (A\backslash\{a_i\}) = \varnothing$ de manera que

(i) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \subset \Omega, \quad i = 1, \ldots, n;$

(ii) $D_{\varepsilon_i}(a_i) \cap \Gamma^* = \varnothing, \quad i = 1, \ldots, n;$

(iii) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \cap \overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} = \varnothing \quad$ per $i \neq j$.

Per $i = 1, \ldots, n$, siguin $\gamma_i(t) = a_i + \varepsilon_i e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, cercles de centre a_i i radi ε_i, i considerem el cicle

$$\Lambda = \Gamma - \sum_{i=1}^{n} n_i\,\gamma_i, \qquad n_i = \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_i).$$

Llavors Λ és un cicle en $\Omega\backslash A$. Vegem que és homòleg a 0 en $\Omega\backslash A$. Hem de veure que

$$\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) = 0 \quad \text{per a tot } z \notin (\Omega\backslash A).$$

Si $z \notin \Omega$, llavors $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = 0$, ja que Γ és homòleg a 0 en Ω. També, per $i = 1, \ldots, n$, tenim que $\mathrm{Ind}\,(\gamma_i, z) = 0$, ja que z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C}\backslash\gamma_i^*$, de manera que $\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in A\backslash B$, llavors $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = 0$ per la definició del conjunt B. A més, també $\mathrm{Ind}\,(\gamma_i, z) = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ ja que z es troba a l'exterior del cercle γ_i. Per tant, $\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in B$, llavors $z = a_k$ per algun $1 \leqslant k \leqslant n$. Com que $\mathrm{Ind}\,(\gamma_i, a_k) = 0$ si $i \neq k$, i $\mathrm{Ind}\,(\gamma_k, a_k) = 1$, tenim que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) = \mathrm{Ind}\,(\Lambda, a_k) &= \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) - \sum_{i=1}^{n} n_i\,\mathrm{Ind}\,(\gamma_i, a_k) \\ &= \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) - n_k = \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) - \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) = 0.\end{aligned}$$

Així doncs, tenim una funció $f \in H(\Omega\backslash A)$, i Λ és un cicle en $\Omega\backslash A$ que és homòleg a 0 en $\Omega\backslash A$. Pel teorema de Cauchy global, tenim que

$$\int_\Lambda f(z)dz = 0.$$

És a dir,

$$0 = \int_\Lambda f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} n_i \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Per la proposició 6.13, tenim que

$$\int_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_i),$$

de manera que, com que $n_i = \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i)$, tenim que

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i) \operatorname{Res}(f, a_i). \qquad \square$$

Moltes vegades aplicarem el teorema dels residus quan tinguem una funció holomorfa amb un nombre finit de singularitats $\{a_1, \ldots, a_n\}$ dins d'una corba γ tancada simple, així que els índexos d'aquests punts valen 1. En aquest cas el teorema dels residus ens diu que

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i).$$

Exercicis

6.3.1. *Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$? Què passa si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$?* ◁

6.3.2. *Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. ◁

6.3.3. *Calculeu* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z - a}\, dz$ *pels diferents valors d'*$a \in \mathbb{C}$ *tals que* $|a| \neq 1$. ◁

6.3.4. *Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions.*

1. *Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0.*
2. *Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.*
3. *Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.*

4. Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$. ◁

6.3.5. *Suposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0. Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\mathrm{Res}(g, z_0) = m$.* ◁

6.3.6. *a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0, llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0.*

b) Proveu que $\mathrm{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. ◁

6.3.7. *Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.*

a) $f(z) = \dfrac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}$.

b) $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

c) $h(z) = \cos(1 - 1/z)$. ◁

6.3.8. *Avalueu* $\displaystyle\oint \frac{1}{(z + 1)(z - 1)(z - 2)(z - 3)(z - 4)(z - 5)} dz$ *al llarg de la corba $|z-3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari.* ◁

6.3.9. *Avalueu les següents integrals*

a) $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z - 2)(z + 5i)} dz.$ ◁

6.3.10. *Calculeu la integral de la funció* $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 + \sin z}$ *sobre la vora del disc $D_7(0)$.* ◁

6.3.11. *Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it, que passa pels punts -2 i 2. Calculeu*

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z - t)} dz, \quad \text{per a } t \neq 2.$$ ◁

6.4. Residu a l'infinit

Una funció holomorfa en un domini que contingui un entorn de l'infinit i tal que $f(\infty) \coloneqq \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ es pot entendre que hi té un pol. Si $f(\infty) \in \mathbb{C}$, parlarem d'una singularitat evitable, i si $\nexists f(\infty)$, d'una singularitat essencial. El teorema dels residus ens permet també relacionar el residu en aquesta singularitat amb els residus en $\mathbb{C}$.

Definició 6.17. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C}\backslash E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E, i sigui Γ una corba simple orientada positivament i tal que conté E. Aleshores el *residu de f a l'infinit* és

$$\operatorname{Res}(f,\infty) \coloneqq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz. \qquad \bullet$$

Pel teorema dels residus, si A és el conjunt de pols de f, tenim que

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\sum_{a\in A} \operatorname{Ind}(\Gamma,a)\ \operatorname{Res}(f,a).$$

Lema 6.18. *Sigui f holomorfa en $\mathbb{C}\backslash E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E. Aleshores el residu de f a l'infinit és*

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right).$$

Demostració. Fem el canvi de variable $w = 1/z$. Sigui C_t la circumferència de radi t, recorreguda en sentit antihorari. Si R és tal que C_R conté totes les singularitats, aleshores trobem

$$-2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_{1/R}^-} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-dw}{w^2},$$

on $C_{1/R}^-$ és la corba inversa de $C_{1/R}$, vegeu la definició 4.2. Canviant-ne l'orientació trobem

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_{1/R}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2} \overset{\text{T } 6.16}{=} -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right),$$

tal com volíem veure. □

Exercicis

6.4.1. *Trobar el valor la integral $\oint_{|z|=2} \dfrac{5z-1}{z(z-1)}dz$ calculant el residu de l'integrand a l'infinit.* ◁

6.4.2. *Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \dfrac{a^2-z^2}{z(z^2+a^2)}dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand.* ◁

6.4.3. *Avaluar $\oint_{|z|=1} e^{1/z}\sin(1/z)dz$.* ◁

6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

El teorema dels residus es pot fer servir per calcular diverses integrals reals. Farem diversos exemples típics.

Exemple 6.19. Tenim una funció racional R sense singularitats en $|z| = 1$, i volem calcular

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, podem posar

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}; \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

Com que $dz = ie^{it}\, dt$, llavors $dt = \frac{dz}{iz}$, de manera que

$$I = \frac{1}{i} \int_\gamma R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \frac{dz}{z},$$

on γ és el cercle $|z| = 1$. Ara apliquem el teorema dels residus i ja està.

Per exemple,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\, dz.$$

La funció

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

té singularitats en els punts $\alpha = (-2 + \sqrt{3})i$ i $\beta = (-2 - \sqrt{3})i$. Tenim que $|\alpha| < 1$ i $|\beta| > 1$, així que aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Com que α és un pol simple de f, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = \lim_{z \to \alpha} \frac{2}{z - \beta} = \frac{2}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}\, i}.$$

Per tant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$\Diamond$

Exemple 6.20. Càlcul d'integrals del tipus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx$$

on f no té cap pol en l'eix real.

Per exemple, donat $k > 0$, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx.$$

Tenim

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2}\, dx \right).$$

Així doncs, calcularem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2}\, dx.$$

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + k^2}.$$

Aquesta funció és holomorfa a tot $\mathbb{C}$, excepte en els punts ki, $-ki$ que són pols de f d'ordre 1. Prenem $R > 0$ molt gran, de manera que $R > k$. Integrem la funció f en el semicercle γ format pel segment $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Com que

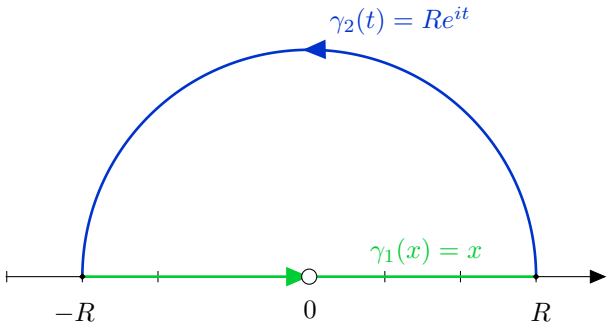


Figura 6.2.: Camins per l'exemple 6.20.

només el punt ki es troba en l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ki).$$

Calculem ara el residu de f en el punt ki. Com que és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, ki) = \lim_{z \to ki} (z - ki) f(z) = \lim_{z \to ki} \frac{e^{iz}}{z + ki} = \frac{e^{iki}}{2ki},$$

així que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{\pi}{k}\,e^{-k}.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+k^2}\,dx.$$

Fent $R \to \infty$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+k^2}\,dx + \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi}{k}\,e^{-k},$$

on

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Si veiem que $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{k}\,e^{-k} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{2k}\,e^{-k}.$$

Provem doncs que $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$. Tenim que

$$I_R = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+k^2}\,Ri\,e^{it}\,dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{|e^{iRe^{it}}|}{|R^2e^{2it}+k^2|}\,R\,dt.$$

Com que $|e^{iRe^{it}}| = e^{-R\sin t}$, fent servir que $|R^2e^{2it}+k^2| \geqslant R^2-k^2$, i que $\sin t \geqslant 0$ per $t \in [0,\pi]$, veiem que

$$|I_R| \leqslant \frac{R}{R^2-k^2}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt \leqslant \frac{\pi R}{R^2-k^2} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$, provant el resultat desitjat. ◊

Exemple 6.21. Si f té algun pol en l'eix real, evitem el pol. Per exemple, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Integrant per parts, es pot veure que aquesta integral impròpia és convergent (encara que no és absolutament convergent). Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

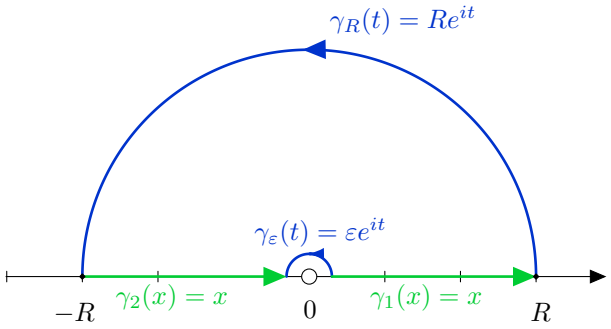


Figura 6.3.: Camins per l'exemple 6.21.

que és holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Integrem f en el camí γ de la següent figura. Pel teorema de Cauchy, tenim que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Per altra banda, com que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 - \gamma_\varepsilon$, amb $\gamma_1(x) = x$ per $x \in [\varepsilon, R]$; $\gamma_2(y) = y$ per $y \in [-R, -\varepsilon]$; $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$ i $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ per $t \in [0, \pi]$, tenim que

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx.$$

També, després de fer el canvi $x = -y$, tenim que

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iy}}{y}\, dy = -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Fent $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$, obtenim

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx + \lim_{R\to+\infty} I_R - \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon,$$

amb

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz; \qquad I_\varepsilon = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

Es compleix que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{x}\, dx = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

A més, $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$, vegeu l'exercici 6.5.1.

Tot plegat ens dona que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon.$$

Vegem ara que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z}\, dz = 0.$$

Efectivament, com que, per $|z| = \varepsilon$, per $0 < \varepsilon < 1$, tenim que

$$\left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| \leqslant \frac{e^{|z|} - 1}{|z|} \leqslant e^{|z|} = e^{\varepsilon} \leqslant e.$$

(aquestes desigualtats es poden veure a partir del desenvolupament en sèrie de l'exponencial). Llavors

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z}\, dz \right| \leqslant e \operatorname{Long}(\gamma_\varepsilon) = e\, \pi \varepsilon,$$

que tendeix a zero quan ε tendeix a zero.

Això implica que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} \frac{i\, \varepsilon e^{it} dt}{\varepsilon e^{it}} = \pi\, i.$$

Per tant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \qquad \lozenge$$

Exemple 6.22. Si R és una funció racional sense pols a l'eix real amb $\lim_{z \to \infty} zR(z) = 0$ (és a dir, $R = P/Q$ amb grau $Q \geqslant$ grau $P + 2$), podem calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx,$$

$\lozenge$

vegeu l'exercici 6.5.3.

Exemple 6.23. Càlcul de

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n}, \qquad n \geqslant 2.$$

Aquesta integral és convergent ja que $n > 1$. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^n},$$

que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les solucions de $z^n + 1 = 0$, és a dir, en

$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

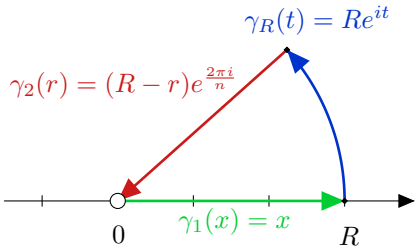


Figura 6.4.: Camins per l'exemple 6.23.

Integrem la funció f en el "formatget" γ del dibuix, amb $R > 1$ gran. Només el pol a_0 es troba en l'interior del camí γ, de manera que, pel teorema dels residus,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_0).$$

◊

Exemple 6.24. Per $0 < \alpha < 1$, podem calcular

$$\int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha}\, dx$$

on Q no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ amb $\lim_{z\to\infty} zQ(z) = 0$.

En aquest cas, considerem la funció

$$f(z) = Q(z)\, z^{-\alpha}, \qquad z^{-\alpha} = e^{-\alpha \mathcal{L}z},$$

amb $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$, amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Llavors $z^{-\alpha}$ és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$. En aquest cas, integrem f en el recinte "comecocos" γ de la figura

Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R - \gamma_2 - \gamma_\varepsilon$, amb

$$\begin{aligned}
\gamma_1(x) &= x + i\varepsilon; && x \in [0, R^*];\\
\gamma_R(t) &= Re^{it}; && t \in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*]\\
\gamma_2(x) &= x - i\varepsilon; && x \in [0, R^*];\\
\gamma_\varepsilon(t) &= \varepsilon e^{it}; && t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],
\end{aligned}$$

vegeu l'exercici 6.5.5. ◊

Exemple 6.25. Calcular integrals del tipus

$$\int_0^\infty R(x)\, \ln x\, dx,$$

on R no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ i si $R = P/Q$, grau$Q \geqslant$ grauP + 2.

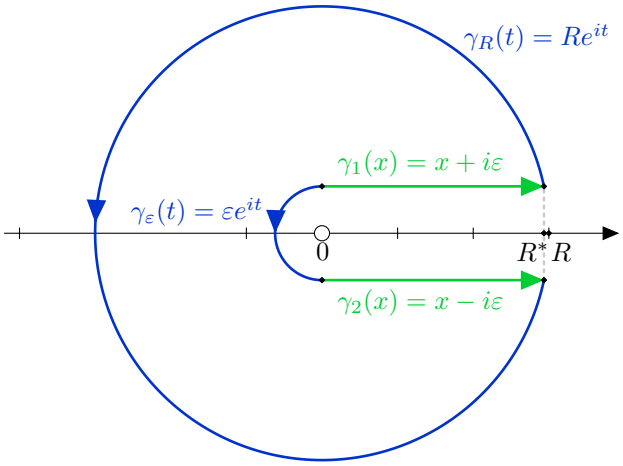


Figura 6.5.: Camins per l'exemple 6.24.

Observem, primer, que si raonem com en els casos anteriors i agafem la funció $g(z) = R(z)\,\mathcal{L}z$ on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció g en la regió "comecocos"del cas anterior, es compleix que $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, així que $\mathcal{L}z \to \ln x$ si $\varepsilon \to 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, de manera que $\mathcal{L}z \to \ln x + 2\pi i$ si $\varepsilon \to 0$. Tot plegat ens dona que si $z = x + i\varepsilon$, amb $x > 0$, $g(x + i\varepsilon) \to R(x)\ln x$, i $g(x - i\varepsilon) \to -R(x)(\ln x + 2\pi i)$ quan $\varepsilon \to 0$ i no podem calcular la integral desitjada.

Per aquest motiu, agafem la funció

$$f(z) = R(z)\,(\mathcal{L}z)^2,$$

on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió "comecocos"del cas anterior. ◊

Exercicis

6.5.1. *Per $r > 0$, considerem la corba $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ definida per $\gamma_r(t) = re^{it}$, i sigui*

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

Demostreu que $\lim_{r\to\infty} I(r) = 0$. ◁

6.5.2. *Considereu la funció $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$.*

(a) Determineu les singularitats de f.

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor. ◁

6.5.3. *Demostreu que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$ ◁

6.5.4. *Calculeu*

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}.$$

◁

6.5.5. *Donat $a \in (0,1)$ calculeu el valor de la integral*

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx.$$ ◁

6.5.6. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}.$$ ◁

6.5.7. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$ ◁

6.5.8. *Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n = 0, 1, 2, \cdots$):*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt.$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2+\cos t}\,dt.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-x+1}\,dx.$ ◁

6.5.9. *Justifiqueu la convergència de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

6.5.10. *Siguin $f(z) = e^z/z^2$ i la recta $\gamma = \{1 + it;\ t \in (-\infty, +\infty)\}$.*

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Indicació*: integreu f sobre la vora del semidisc de centre $z_0 = 1$ i radi R amb $\operatorname{Re} z \leqslant 1$.*

b) Deduïu que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{2\pi}{e}$. ◁

6.5.11. *Considereu*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2+1)^2(z^2+4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos). ◁

6.5.12. *Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que*

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)dx.$$

Observació: *Podeu utilitzar que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.* ◁

6.5.13. *(a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \to 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f.*

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geqslant 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=\frac{1}{n}} \frac{1}{f(z)}dz \neq \int_{|z|=\frac{1}{n+1}} \frac{1}{f(z)}dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f. Indicació*: Utilitzeu el Teorema de deformació i l'apartat anterior.* ◁

6.5.14. *Calculeu, justificant tots els passos, la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+x+1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació*: Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z^\alpha}{z^2+z+1}$*. Definiu una determinació del logaritme* $log(z)$ *a* $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ *de manera que* $z^\alpha = e^{\alpha log(z)}$*. Finalment integreu la funció* $f(z)$ *a la mateixa regió que les integrals del tipus*

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln(x)dx. \qquad \triangleleft$$

6.6. Principi de l'argument

El principi de l'argument i el teorema de Rouché es fan servir per calcular el nombre de zeros i pols d'una funció holomorfa (excepte per pols) dins d'una corba tancada.

Definició 6.26. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Diem que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *meromorfa* en Ω si $f \in H(\Omega\backslash E)$, on $E \subset \Omega$ està format per punts aïllats, i aquestes singularitats de f són pols. En aquest cas, posem $f \in M(\Omega)$. •

Teorema 6.27 (Principi de l'argument)**.** *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un obert i* $f \in M(\Omega)$*. Denotem per* Z *el conjunts dels zeros de* f *en* Ω*, i per* E *el conjunt de pols de* f *en* Ω*. Sigui* γ *un camí tancat en* $\Omega\backslash(Z \cup E)$*, homòleg a* 0 *en* Ω*. Llavors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in Z} \mathrm{Ind}\,(\gamma,z)\,m(f,z) - \sum_{p\in E} \mathrm{Ind}\,(\gamma,p)\,m(f,p),$$

on $m(f,z)$ *és la multiplicitat del zero* z*, i* $m(f,p)$ *denota l'ordre del pol* p*.*

Observació 6.28. S'anomena el principi de l'argument, ja que si $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ és la corba imatge, llavors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \mathrm{Ind}\,(\Gamma,0),$$

així que, si γ és una corba tancada simple, llavors el nombre de zeros menys el nombre de pols de f en l'interior de γ (comptant multiplicitats) és igual al nombre de voltes que dona la corba imatge $f(\gamma)$ al voltant del zero, que seria la variació de l'argument al llarg de $f(\gamma)$ dividit per 2π.

En efecte, tenim que

$$\mathrm{Ind}\,(\Gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-0} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}{f(\gamma(t))} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \qquad \bullet$$

Demostració del teorema 6.27. Observem que si f és holomorfa en $\Omega\backslash E$, llavors la funció $h = f'/f$ és holomorfa en $\Omega\backslash(E \cup Z)$. Aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{w\in E\cup Z} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, w\right) \operatorname{Ind}(\gamma, w).$$

• Si z_0 és un zero de f de multiplicitat m, llavors $f(z) = (z-z_0)^m\, g(z)$, on g és holomorfa en un entorn de z_0 amb $g(z_0) \neq 0$. Llavors, en un entorn de z_0 tenim que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Com que $g(z) \neq 0$ en un entorn de z_0, llavors g'/g és holomorfa en aquest entorn, de manera que

$$\operatorname{Res}(f'/f, z_0) = m.$$

• Si p_0 és un pol de f d'ordre m, llavors $\widetilde{g}(z) = (z-p_0)^m\, f(z)$ és holomorfa en un entorn de p_0 amb $\widetilde{g}(p_0) \neq 0$. Llavors, procedint com abans obtenim

$$\operatorname{Res}(f'/f, p_0) = -m.$$

Per tant

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{w\in Z} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, w\right) \operatorname{Ind}(\gamma, w) + \sum_{p\in E} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) \operatorname{Ind}(\gamma, p)\\ &= \sum_{w\in Z} \operatorname{Ind}(\gamma, w)\, m(f, w) - \sum_{p\in E} \operatorname{Ind}(\gamma, p)\, m(f, p).\end{aligned}$$

□

Exemple 6.29. Aplicant el principi de l'argument calculem el nombre de zeros (comptant multiplicitats) del polinomi $Q(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$ al primer quadrant.

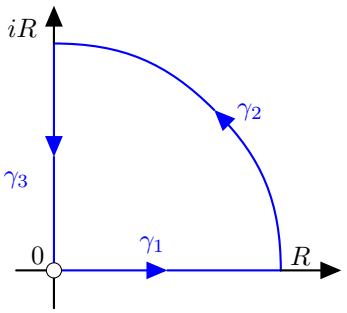


Figura 6.6.: Camins per l'exemple 6.29.

Volem aplicar el principi de l'argument a la corba $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ formada per:

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R]\\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, & t &\in [0, \pi/2]\\ -\gamma_3(y) &= iy, & y &\in [0, R].\end{aligned}$$

on $R > 0$ és prou gran per englobar les arrels de Q al primer quadrant $\mathcal{Q}_1$, que són un nombre finit. Pel principi de l'argument,

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \sum_{w \in Z} \mathrm{Ind}\,(\gamma, w)\, m(Q, w) = \mathrm{Ind}\big(Q \circ \gamma, 0\big).$$

En el que raonarem a continuació, provarem també que el polinomi Q no té cap zero a γ^*.

Mirem doncs quantes voltes fa la corba $Q \circ \gamma$ al voltant de 0, vegeu la figura 6.7. Estudiem cada tros de γ.

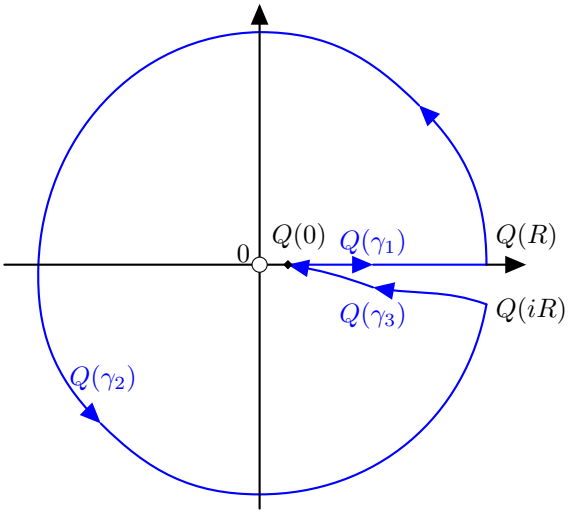


Figura 6.7.: Imatge per Q dels camins de l'exemple 6.29.

La corba $Q(\gamma_1(x)) = Q(x)$ és continguda a $\mathbb{R}_+$, ja que

$$Q(x) = x^4 + 2x(x^2 - 1) + 10 > 10 - 2 = 8 > 0.$$

Tenim doncs que Q no s'anul·la a γ_1^* i $Q(\gamma_1)$ és un segment al semieix real positiu, que va de $Q(0)$ a $Q(R)$.

Seguidament

$$Q(\gamma_2(t)) = Q(Re^{it}) = (Re^{it})^4 \left(1 + \frac{2}{Re^{it}} - \frac{2}{(Re^{it})^3} + \frac{10}{(Re^{it})^4}\right).$$

Per tant, quan R és molt gran, $Q(\gamma_2(t))$ no s'anul·la i és una petita pertorbació de $R^4 e^{i4t}$. Com que $t \in [0, \pi/2]$ tenim que $4t \in [0, 2\pi]$.

Pel tercer tros tenim que

$$Q(\gamma_3(y)) = Q(iy) = (y^4 + 10) - 2i(y^3 + y),$$

i en particular $Q(iR)$ és un punt amb part imaginària negativa. Observem que per a $y > 0$,

$$\mathrm{Re}Q(iy) > 0, \qquad \mathrm{Im}Q(iy) < 0.$$

Per tant $Q(\gamma_3(y))$ va del punt $Q(iR)$ cap a $Q(0)$ restant sempre dins del quart quadrant.

Amb tot això tenim que el nombre de voltes que fa $Q\circ\gamma$ al voltant de 0 és 1; pel principi de l'argument

$$\#Z(Q)\cap\mathcal{Q}_1 = \mathrm{Ind}\big(Q\circ\gamma,0\big) = 1. \qquad \Diamond$$

Exercicis

6.6.1. *Quines de les següents funcions són meromorfes a $\mathbb{C}$?*

a) z^5 *b)* $z^{5/2}$ *c)* $e^{1/z}$ *d)* $1/\sin(z)$. ◁

6.6.2. *Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z)=z^6-z^4-2z-6$.*
I si alternativament el polinomi fos $Q(z)=z^6-z^4-2z+6$? ◁

6.6.3. *Sigui f una funció entera tal que*

$$f(z)\in\mathbb{R} \iff z\in\mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. ◁

6.7. Teorema de Rouché

Teorema 6.30. *[Teorema de Rouché[4]] Sigui $\Omega\subset\mathbb{C}$ un obert i $f,g\in M(\Omega)$. Sigui γ camí tancat simple homòleg a 0 en Ω. Suposem que f i g no tenen pols en γ^*. Si*

$$|f(z)-g(z)|<|g(z)|, \qquad z\in\gamma^*$$

aleshores

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

on Z_f, Z_g denoten el nombre de zeros (comptant multiplicitats) de f i g en l'interior de γ, i P_f, P_g el nombre de pols (comptant l'ordre) de f i g en l'interior de γ.

Observació 6.31. Cal que la desigualtat sigui estricta. També, al ser γ simple, tenim que $\mathrm{Ind}\,(\gamma,z)$ val 0 o 1 per $z\notin\gamma^*$. •

Demostració del teorema 6.30. Notem que f i g tampoc no poden tenir zeros en γ^* per la hipòtesi imposada (en cas contrari, tindriem $|g(z)|<|g(z)|$!!).

Tenim $F=f/g\in M(\Omega)$. Si suposem, per simplificar, que els pols d'una funció no coincideixen amb els zeros de l'altra, aleshores

$$\{\text{zeros de } F\}=\{\text{zeros de } f\}\cup\{\text{pols de } g\}; \qquad \{\text{pols de } F\}=\{\text{zeros de } g\}\cup\{\text{pols de } f\}.$$

[4] Eugène Rouché, Someire, 1832–1910, https://ca.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Rouch%C3%A9

Per la hipòtesi, tenim que $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$ per $z \in \gamma^*$, de manera que la corba imatge $\Gamma = F(\gamma) \subset D_1(1)$, així que Γ no dona cap volta al voltant del 0, i per tant $\operatorname{Ind}(\Gamma, 0) = 0$. Pel principi de l'argument

$$0 = \operatorname{Ind}(\Gamma, 0) = Z_F - P_F = Z_f + P_g - (Z_g + P_f),$$

d'on obtenim el resultat. Quan hi ha coincidències, aleshores comptant els ordres de zeros i pols arribem a la mateixa conclusió. □

La majoria de les vegades apliquem el teorema de Rouché en un cercle $\{|z-a| = R\}$ i a funcions f, g holomorfes en un entorn de $\overline{D_R(a)}$. En aquest cas, si $|f(z)-g(z)| < |g(z)|$ per $|z-a| = R$, se segueix que f i g tenen el mateix nombre de zeros comptant multiplicitats en el disc obert $D_R(a)$. Això ens pot servir per determinar els zeros de f en el disc, si podem triar una funció g de la qual es pugui determinar fàcilment el nombre de zeros.

Exemple 6.32. Trobem el nombre de zeros del polinomi $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ en el disc unitat $\mathbb{D}$.

Prenem la funció $g(z) = 6z^3$ que té 3 zeros comptant multiplicitats en $\mathbb{D}$. Tenim que $|g(z)| = 6$ si $|z| = 1$. Llavors

$$|P(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leqslant |z|^7 + 2|z|^5 + |z| + 1 = 5 < 6 = |g(z)|, \qquad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros (comptant multiplicitats) en $\mathbb{D}$, així que P té 3 zeros en $\mathbb{D}$. ◊

Exemple 6.33. Trobem quants zeros té $P(z) = z^4 - 6z + 3$ en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$.

Primer, trobem els zeros de P dins del disc $\{|z| < 2\}$. Prenem $g(z) = z^4$ que té 4 zeros comptant multiplicitats en $\{|z| < 2\}$. Tenim que

$$|P(z) - g(z)| = |-6z + 3| \leqslant 6|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)| \qquad \text{si } |z| = 2.$$

Com abans, aquesta desigualtat també implica que P no té zeros en $|z| = 2$. Pel Teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros en $\{|z| < 2\}$, de manera que P té 4 zeros en $\{|z| < 2\}$.

Ara, busquem els zeros de P en el disc unitat $\{|z| < 1\}$. Prenem $h(z) = -6z$ que té un zero en el disc unitat. Tenim que

$$|P(z) - h(z)| = |z^4 + 3| \leqslant |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |h(z)| \qquad \text{si } |z| = 1.$$

Pel Teorema de Rouché, P té un zero en el disc unitat $\{|z| < 1\}$.

En conclusió, el polinomi P té 3 zeros en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$. ◊

Teorema 6.34 (Teorema de Hurwitz[5])**.** *Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \to f$ uniformement en compactes d'Ω, per una certa funció f. Si per a tota $n \geqslant 0$, f_n no s'anul·la en cap punt d'Ω, aleshores o bé $f \equiv 0$ o be f no s'anul·la en Ω.*

[5] Adolf Hurwitz, Hildesheim, 1859–1919, https://ca.wikipedia.org/wiki/Adolf_Hurwitz

Demostració. Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel Teorema de Weierstrass. Suposem que f no és idènticament 0, però $f(a) = 0$ per un cert $a \in \Omega$. Aleshores, com que els zeros de f han de ser aïllats (al ser f no idènticament nul·la), tenim que $f(z) \neq 0$ en un cert disc puntejat $\overline{D_r(a)}\backslash\{a\} \subset \Omega$. Sigui $0 < m = \min_{|z-a|=r} |f(z)|$ que existeix perquè f és contínua i el cercle és un compacte i sigui n prou gran per garantir que

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

per a tot z en $\{|z-a| = r\}$, fet que es dona per la convergència uniforme. Aleshores, sobre la corba $\{|z-a| = r\}$,

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leqslant |f(z)|,$$

i pel Teorema de Rouché, f_n i f tenen el mateix nombre de zeros dins $\{|z-a| = r\}$. Però això és una contradicció ja que f en té un, i f_n no en té cap per hipòtesi. □

Exercicis

6.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert.* Indicació*: Proveu que $|e^z - 1| \leqslant e - 1$ si $|z| = 1$.* ◁

6.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f?* ◁

6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$.

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$.

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$. ◁

6.7.4. *Quants zeros té $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ en la regió $\left\{z \in \mathbb{C};\ \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$?* ◁

6.7.5. *Considerem $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.*

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ són a l'anell $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ al primer quadrant. ◁

6.7.6. *(a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.*

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 0, 1, 2, \dots$). ◁

6.7.7. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Demostreu que l'equació

$$(z-1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació*: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, després mireu d'augmentar el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.*

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leqslant 1/2^n$*, llavors totes aquestes arrels són al disc* $D_{1/2}(1)$*.* ◁

6.7.8. *Demostreu que per a tot* $R > 0$ *existeix* $n(R) \geqslant 0$ *tal que si* $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leqslant R\}$*.* ◁

6.7.9. *Sigui* f_n *una successió de funcions holomorfes en un domini* Ω *tals que* $f_n \to f$ *uniformement en compactes d'*Ω*, per una certa funció* f*.*

1. *(Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si* $f_n(z) \neq a$ *per a tot* $z \in \Omega$ *i tot* $n \in \mathbb{N}$*, aleshores,* $f \equiv a$ *o bé* $f(z) \neq a$ *en* Ω*.*

2. *Proveu que si* f_n *és injectiva en* Ω *per a tot* $n \geqslant 0$*, aleshores* f *és constant o bé* f *és injectiva en* Ω*.* Indicació*: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.*

3. *Proveu que si* f *té un zero d'ordre* m *en* $a \in \Omega$*, aleshores existeix* $\rho_0 > 0$ *tal que per tot* $\rho < \rho_0$ *i per tot* $n > n_\rho$*,* f_n *té exactament* m *zeros en* $D_\rho(a)$ *comptant multiplicitats.* ◁

7. Representació Conforme

7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann

Les funcions holomorfes també es poden veure com a transformacions entre regions del pla complex. Les que ens ocupen en aquest capítol són les que són bijectives, a més d'holomorfes.

Definició 7.1. Siguin $U, V \subset \mathbb{C}$ dos oberts connexos. Diem que $f : U \to V$ és una *representació conforme* (o *transformació conforme*) entre U i V si f és holomorfa i bijectiva. Aleshores diem que U i V són *conformement equivalents*. •

El nom de representació conforme fa referència a la preservació dels angles.

Lema 7.2. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ és una funció holomorfa i $z_0 \in U$, aleshores*

$$f \text{ és localment injectiva en } z_0 \iff f'(z_0) \neq 0 \iff f \text{ preserva els angles en } z_0.$$

Demostració. La primera equivalència és resultat del teorema de la funció inversa i de l'analiticitat de les funcions holomorfes, es pot usar Rouché per exemple. La segona es deriva de l'observació 3.16 i de l'existència d'un ordre, vegeu el teorema 4.41, deixem els detalls pel lector. □

Tot seguit veiem que les representacions conformes són biholomorfes.

Proposició 7.3. *Si $f : U \to V$ és holomorfa i bijectiva, aleshores f és* biholomorfa*, és a dir que $f^{-1} : V \to U$ també és holomorfa.*

Demostració. La funció f és oberta pel teorema de l'aplicació oberta, de manera que f^{-1} és contínua. Aleshores la biholomorfia es dedueix de la proposició 3.8. □

Observació 7.4. Les representacions conformes també s'anomenen a vegades funcions biholomorfes per la proposició 7.3. En la literatura també se les anomena funcions *conformes* o funcions *univalents*. •

Advertència 7.5. Hem vist que totes les representacions conformes $f : U \to V$ satisfan que

- $f'(z) \neq 0$, per a tot $z \in U$, i
- preserven angles en tots els punts de U.

Però el recíproc no és cert: la funció exponencial $f(z) = e^z$ satisfà que $f'(z) \neq 0$ per tot $z \in \mathbb{C}$ i, de fet, preserva els angles, però $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ no és una representació conforme ja que no és injectiva. •

El següent resultat és un dels més remarcables de l'anàlisi complexa:

Teorema 7.6 (Teorema de l'aplicació de Riemann)**.** *Tot domini U simplement connex del pla diferent de $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc unitat $\mathbb{D}$, és a dir, existeix una representació conforme f entre U i $\mathbb{D}$, vegeu la figura 7.1.*

A més, si imposem la imatge d'un punt i l'argument de la derivada, per exemple $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) \in \mathbb{R}^+$, aleshores f és única.

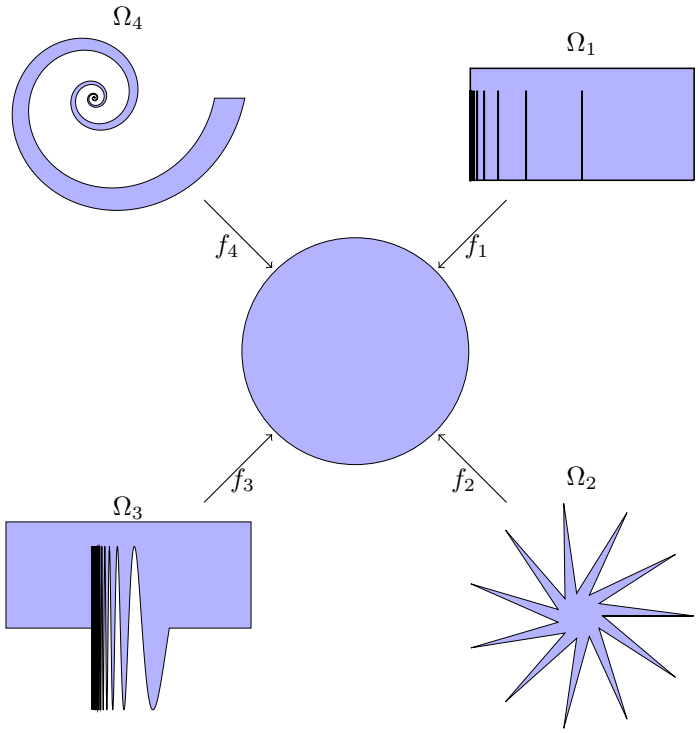


Figura 7.1.: El teorema de Riemann assegura que tots els dominis simplement connexos són conformement equivalents.

Observació 7.7. El comportament de $\varphi := f^{-1} : \mathbb{D} \to U$ quan ens acostem a la frontera de $\mathbb{D}$ pot ser molt complicat si ∂U no és una corba. Aquest estudi és fascinant i dona lloc al camp de la *teoria geomètrica de funcions* (*GFT* per les sigles en anglès de 'geometric function theory'). •

Observació 7.8. Notem que la condició $U \neq \mathbb{C}$ del teorema de l'aplicació de Riemann és necessària. Efectivament, la no existència de representació conforme en el cas $U = \mathbb{C}$ és conseqüència immediata del teorema de Liouville. •

La demostració de l'existència és un pèl delicada, el lector interessat la pot trobar per exemple en [BC13, Capítol 9] o a l'apèndix A. Tot seguit demostrem la unicitat.

Demostració de la unicitat al teorema de l'aplicació de Riemann. Suposem que existeixen dues representacions conformes $f, g : U \to \mathbb{D}$ satisfent les condicions de l'enunciat. Considerem $h = g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Notem que l'origen n'és un punt fix:

$$h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0.$$

A més, h és holomorfa i envia el disc unitat a ell mateix. Per tant, pel lema de Schwarz (vegeu el lema 4.52), tenim que

$$|h(z)| \leqslant |z| \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{D}.$$

Però h^{-1} satisfà les mateixes hipòtesis i, per tant,

$$|h^{-1}(w)| \leqslant |w| \quad \text{per a tot } w \in \mathbb{D}.$$

Així, escrivint $w = h(z)$ trobem que

$$|h(z)| \leqslant |z| = |h^{-1}(w)| \leqslant |w| = |h(z)|,$$

i les desigualtats han de ser igualtats. Hem demostrat doncs que

$$|h(z)| = |z| \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{D}.$$

Altra vegada pel lema de Schwarz, existeix $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ tal que

$$h(z) = \lambda z.$$

Com que

$$\lambda = h'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} \in \mathbb{R}_+,$$

deduim que $\lambda = 1$ i, per tant, h és la identitat, és a dir que $f = g$ tal i com volíem veure. □

Com és natural, la majoria de les representacions conformes no poden calcular-se explícitament. Però algunes sí, i poden combinar-se per a construir-ne moltes d'altres. Algunes són particularment importants en aquesta i en moltes altres àrees de les matemàtiques i la física (geometria, electromagnetisme, àlgebra,...) i les estudiarem aquí.

7.2. Projecció estereogràfica i circumferències generalitzades

Com veurem a la propera secció, el treball de certes transformacions conformes anomenades homografies se simplifica en considerar el pla complex compactificat $\mathbb{C}_\infty$. Aquest s'anomena sovint *esfera de Riemann*, ja que la projecció estereogràfica (vegeu la figura 7.2) ens proporciona un homeomorfisme entre el pla complex compactificat i l'esfera $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : \|(p - (0, 0, \frac{1}{2})\| = \frac{1}{2}$. La projecció estereogràfica $p : S^2 \to \mathbb{R}^2$ envia $(x, y, z) \in S^2 \backslash (0, 0, 1) \mapsto (\lambda x, \lambda y) \sim \lambda(x + iy)$, de manera que $(\lambda x, \lambda y, 0)$, (x, y, z) i $(0, 0, 1)$ estiguin alineats, i envia el pol nord $(0, 0, 1)$ a l'infinit.

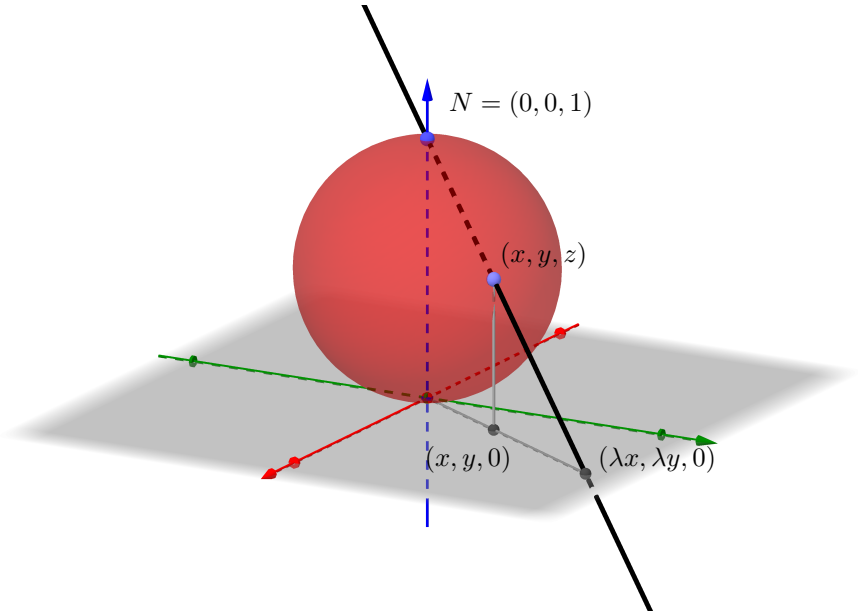


Figura 7.2.: La projecció estereogràfica.

Observació 7.9. Es pot veure que la projecció estereogràfica envia circumferències de S^2 que passen pel pol nord a rectes (per l'infinit) i circumferències de S^2 que no passen pel pol nord a circumferències del pla complex.

La demostració es pot fer com segueix: si la circumferència inicial passa pel pol nord, aleshores el conjunt de rectes que uneixen el pol nord amb els punts de la circumferència formen un pla que passa pel pol nord, diguem-li Π. Aleshores, la imatge de la circumferència per la projecció esterogràfica és la intersecció de Π amb el pla XY, que efectivament és una recta (vegeu la figura 7.3).

Si la circumferència inicial C_1 no passa pel pol nord, es tracta de la intersecció de S^2 amb un pla Π que no passa pel pol nord, i la seva projecció és la intersecció del con que formen les rectes pel pol nord als punts de la circumferència amb el pla XY. Aquesta intersecció és una còmica. Si anomenem p_1 el punt de C_1 amb màxima coordenada vertical i p_2 el punt de mínima coordenada vertical, ℓ_j la recta que passa per N i p_j, aleshores la còmica projectada es tracta d'una circumferència si i només si l'angle α que forma Π amb ℓ_2 és igual a l'angle β que forma el pla XY amb ℓ_1, ja que seran el·lipses de la mateixa excentricitat per simetria. Notem que β és el complementari de l'angle entre l'eix Z i ℓ_1. A la vegada, aquest és complementari de l'angle γ que formen l'eix Z amb la recta que passa per l'origen i p_1, ja que els triangles inscrits en una semicircumferència són rectangles. Finalment, treballant al pla $\widetilde{\Pi}$ que formen ℓ_1 i ℓ_2, l'angle α veu el mateix arc de circumferència de $S^2 \cap \widetilde{\Pi}$ que γ i, per arc capaç, són iguals (vegeu la figura 7.4). •

Definició 7.10. Anomenem *circumferències generalitzades* de $\mathbb{C}_\infty$ a les circumferències o rectes de $\mathbb{C}$. En el cas de les rectes, diem que ∞ pertany a la circumferència generalitzada. •

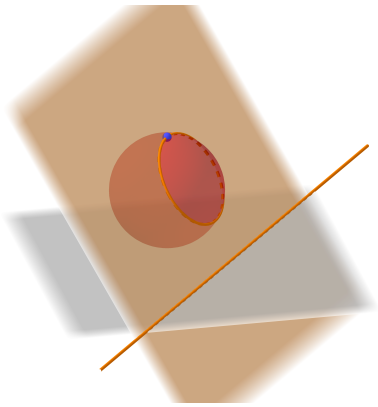


Figura 7.3.: La projecció estereogràfica envia circumferències pel pol nord a rectes.

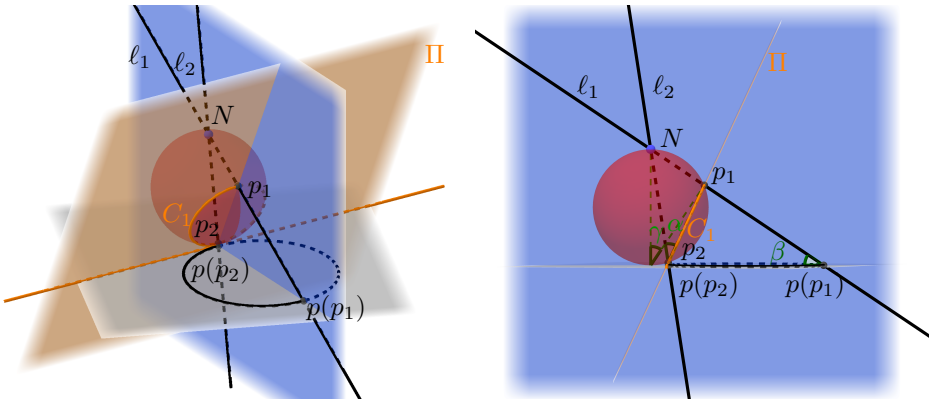


Figura 7.4.: La projecció estereogràfica envia circumferències que no passen pel pol nord a circumferències, vegeu l'observació 7.9.

En la literatura també s'anomenen *cercles generalitzats* ja que corresponen als cercles de l'esfera S^2, però pot crear confusió amb el cercle com a sinònim de disc, així que aquí evitarem aquesta denominació.

Lema 7.11. *L'equació d'una circumferència generalitzada ℓ és*

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0,$$

amb $A, C \in \mathbb{R}$ i $B \in \mathbb{C}$ de manera que $|B|^2 > AC$. En particular ℓ és una circumferència si i només si $A \neq 0$, i té centre $-B/A$ i radi $R = \sqrt{\frac{|B|^2 - AC}{A^2}}$.

Demostració. Vegeu l'exercici 7.2.2. □

Exercicis

7.2.1. *Sigui p la projecció estereogràfica. Demostreu que $\lambda = \frac{1}{1-z}$, i que la inversa de p és*

$$p^{-1}(x+iy) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\left(x, y, x^2+y^2\right). \qquad \triangleleft$$

7.2.2. *Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi r és*

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

i la d'una recta perpendicular a α passant per $z_0 \in \mathbb{C}$ és

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m, \quad z \in \mathbb{C},$$

on m és una constant real que només depèn d'α i z_0. $\triangleleft$

7.3. Transformacions de Möbius

Una *transformació de Möbius*[1] o *homografia* és una funció de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{amb } (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \text{ i tal que } ad-bc \neq 0.$$

Denotem el conjunt de totes les homografies per $\mathcal{M}$. Entenem que $T(-d/c) = \infty$ i $T(\infty) = a/c$, en el sentit que si $c = 0$ tenim que $T(\infty) = \infty$. Aleshores T és un homeomorfisme en $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ amb la topologia generada pels oberts de $\mathbb{C}$ i els entorns oberts d'infinit $\{|z| > r\}$. De fet, les homografies són representacions conformes de $\mathbb{C}_\infty$ en ell mateix (aquí treballem amb funcions meromorfes bijectives a $\mathbb{C}_\infty$, entenent que una funció és meromorfa a l'infinit si $f \circ \varphi$ ho és a l'origen al precompondre amb la carta $\varphi(z) = 1/z$). Es pot veure addicionalment que són les úniques amb aquesta propietat, vegeu l'exercici 7.5.1.

Observació 7.12. Tota homografia T és globalment bijectiva en $\mathbb{C}_\infty$, i la seva inversa és $T^{-1} \in \mathcal{M}$ definida per

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

El lector pot comprovar aquest fet fàcilment. Per tant, $\mathcal{M}$ amb l'operació composició té estructura de grup. Notem també que

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \text{per a tot } z \neq \infty, -\frac{d}{c}. \qquad \bullet$$

Les *homografies bàsiques* són les

[1] August Ferdinand Möbius, Schulpforte, 1790–1868, https://ca.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_M%C3%B6bius

- *Translacions*: $T(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$.
- *Girs*: $T(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- *Homotècies*: $T(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- *Inversions*: $T(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

La combinació d'un gir i una homotècia s'anomena a vegades *dilatació complexa*, $T(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Tota homografia es pot obtenir com a composició d'homografies bàsiques, vegeu l'exercici 7.3.2.

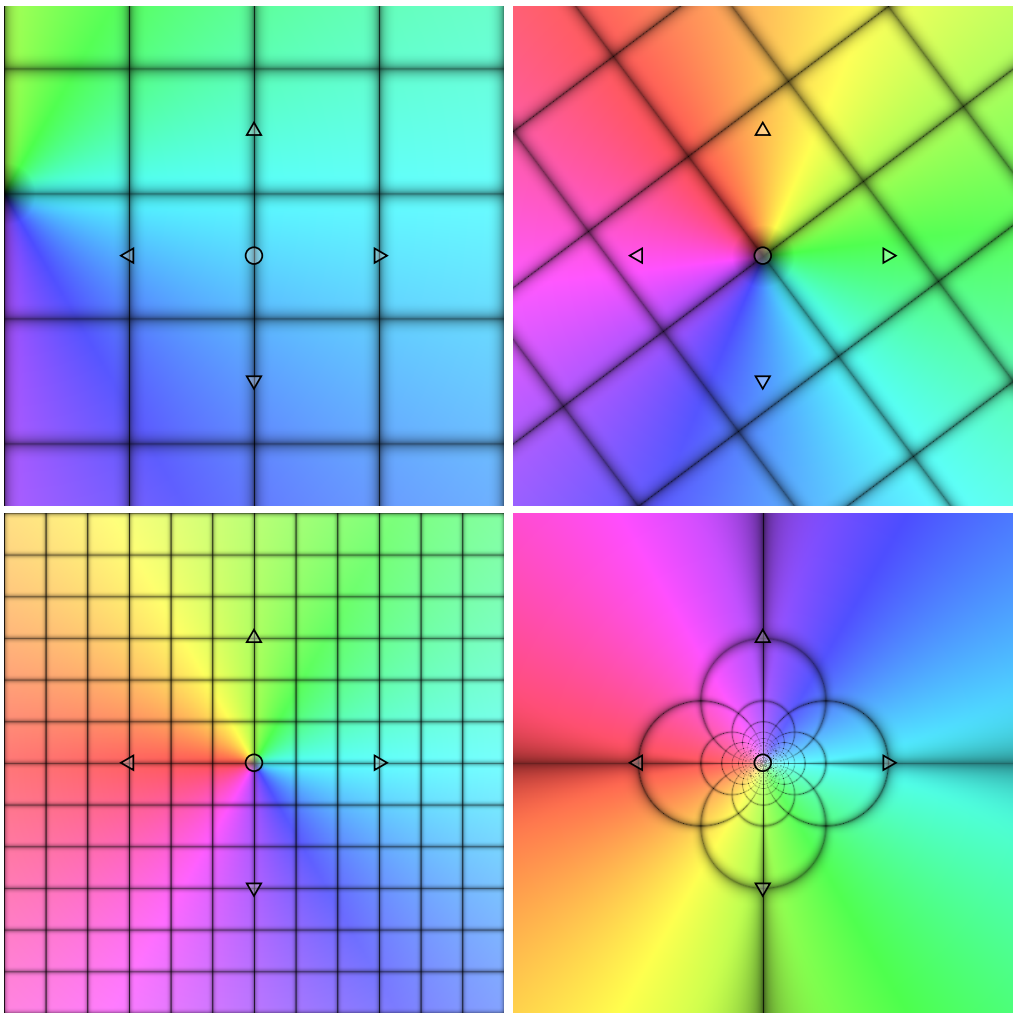


Figura 7.5.: Homografies bàsiques: translació amb $b = 2 - i/2$, gir d'angle $\theta = \arctan(4/3)$, homotècia de raó $\lambda = 3$ i inversió.

Proposició 7.13. *Tota homografia envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.*

Demostració. Vegeu l'exercici 7.3.4. □

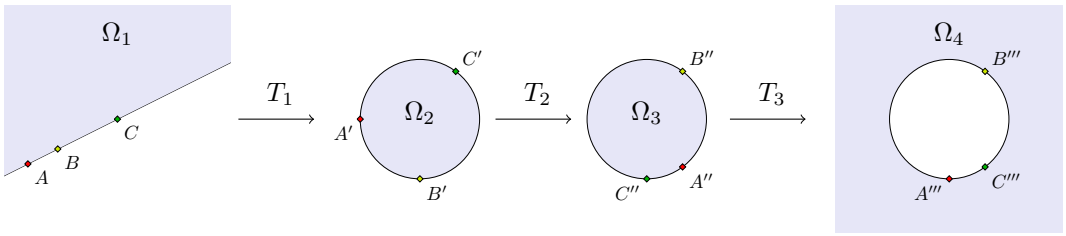


Figura 7.6.: Les homografies envien circumferències generalitzades a circumferències generalitzades, i preserven l'orientació.

En conseqüència, les components connexes dels complementaris de les circumferències generalitzades són conformement equivalents mitjançant les homografies corresponents segons l'orientació, vegeu la figura 7.6.

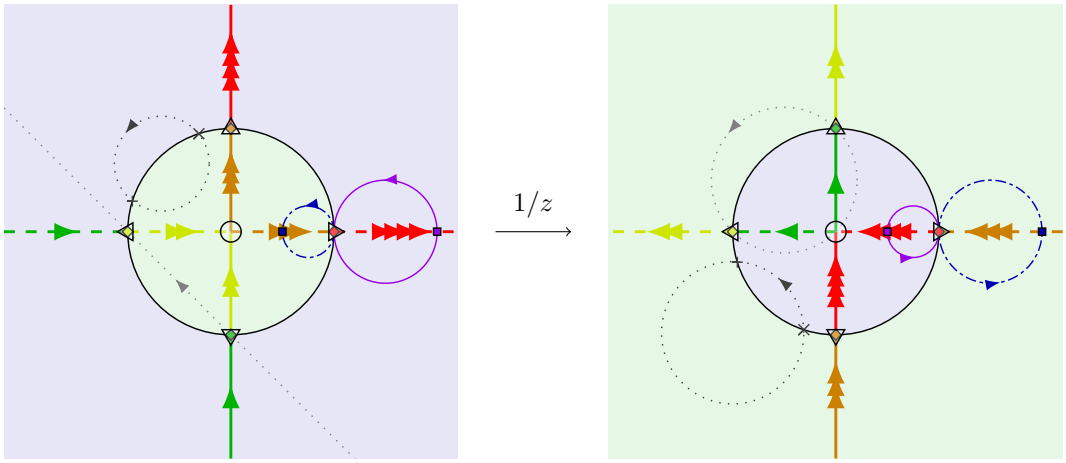


Figura 7.7.: La inversió preserva els eixos i la circumferència unitat, però els únics punts fixos són ± 1.

Exemple 7.14. La inversió $T(z) = 1/z$ envia la circumferència unitat a ella mateixa (amb una simetria axial respecte la recte real), el disc unitat a $\overline{\mathbb{D}}^c$ i les rectes $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ i $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ són invariants, intercanviant 0 i ∞, vegeu la figura 7.7. A més és una involució, és a dir que $T^2(z) = z$. Les circumferències ℓ que passen per l'origen van a rectes que tallen $\partial\mathbb{D}$ en els punts conjugats dels punts de tall $\ell \cap \partial\mathbb{D}$, i viceversa. Les rectes per l'origen van a la seva recta conjugada. Finalment, les circumferències que no passen per l'origen van a circumferències que no passen per l'origen. Si aquesta és interior al cercle unitat, aleshores la seva imatge estarà al complementari. Si talla la circumferència

unitat, aleshores la seva imatge també, pels punts de tall conjugats. La tangència interior a $\partial\mathbb{D}$ esdevè tangència exterior de la imatge en el punt de tangència conjugat. Notem que el centre de la circumferència imatge no és, en general, la imatge del centre de la circumferència. ◊

Lema 7.15. *Donats tres punts diferents $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, existeix una única homografia T tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ i $T(z_3) = \infty$. Per tant, si C és l'única circumferència generalitzada que passa pels tres punts, aleshores $T(C) = \mathbb{R}$.*

Demostració. Si cap d'ells no és infinit, prenem

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Si un d'ells és infinit, s'utilitza la mateixa definició eliminant els factors que el contenen. Per exemple, si $z_1 = \infty$, prenem

$$T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Per la unicitat, notem que si S és una altra homografia, aleshores $S \circ T^{-1}$ fixa 0, 1 i ∞. En particular, si $S \circ T^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, trobem que

$$T(0) = 0 \implies b = 0$$

$$T(\infty) = \infty \implies c = 0$$

$$T(1) = 1,\ b = 0,\ c = 0 \implies a = d.$$

Per tant, $S \circ T^{-1}$ és la identitat i $S \equiv T$. □

Corol·lari 7.16. *Donades dues ternes de punts diferents $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}_\infty^3$, existeix una única homografia $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(z_j) = w_j$. En particular, si T té tres punts fixos, només pot ser la identitat.*

Exemple 7.17 (Exemple fonamental)**.** Volem representar conformement $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H} := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Per fer-ho, busquem una homografia que enviï $(-1, i, 1) \mapsto (0, i, \infty)$, de manera que per preservar l'orientació, sabem que enviarà $\mathbb{D}$ a $\mathbb{H}$, vegeu la figura 7.8. Raonant com al lemma 7.15, la condició $(-1, 1) \mapsto (0, \infty)$ obliga a que tinguem

$$T(z) = c\frac{z + 1}{z - 1}.$$

Per fixar i, cal

$$i = T(i) = c\frac{i + 1}{i - 1} = ci \iff c = -1.$$

Per tant,

$$T(z) = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

i la seva inversa és $T^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}$.

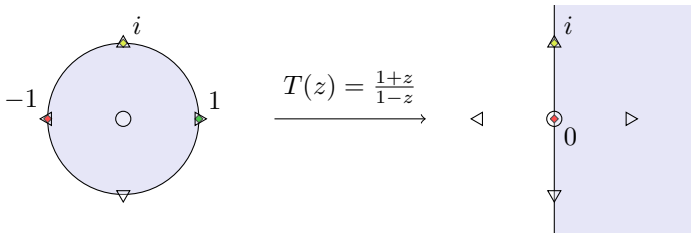


Figura 7.8.: L'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ envia el disc unitat al semiplà de la dreta.

En particular, $\partial\mathbb{D}$ va a l'eix imaginari pur, i el disc unitat va al semiplà de part real positiva, vegeu la figura 7.10. També envia el complementari de $\overline{\mathbb{D}}$ al semiplà de part real negativa. La imatge dels semicercles $\mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ i $\mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ són el primer i el quart quadrants respectivament. De fet, correspon a una rotació de 90° de S^2 respecte l'eix que passa per $p^{-1}(i)$ i $p^{-1}(-i)$. ◊

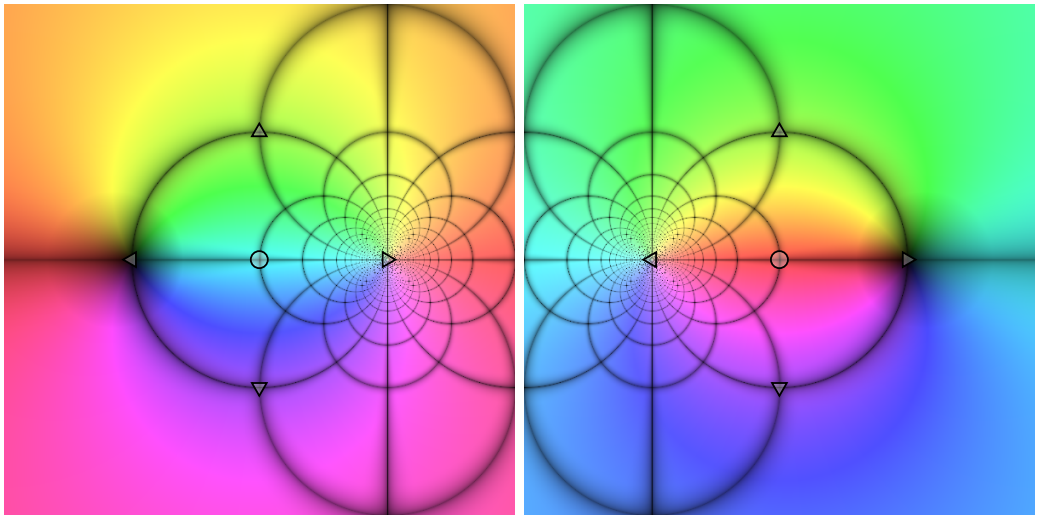


Figura 7.9.: L'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ i la seva inversa, vegeu l'exemple 7.17. Notem que T té pol simple en $z = 1$ i zero simple en $z = -1$, i que les corbes de nivell són circumferéncies generalitades que passen pel pol.

Observació 7.18. T no és l'única homografia que envia $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}$, de fet n'hi ha infinites. Però sí que és l'única que ho fa enviant els punts $(-1, i, 1)$ a $(0, i, \infty)$. •

Exercicis

7.3.1. *Donada una homografia* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *definim* $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *que està definit* mòdul constant *multiplicativa. Per exemple, les matrius* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *cor-*

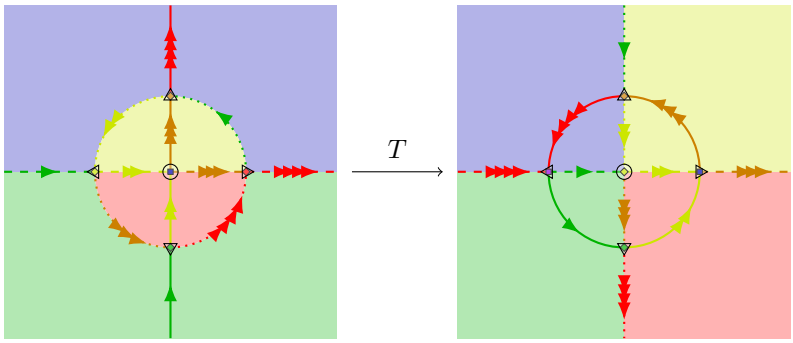


Figura 7.10.: Acció de l'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$

responen respectivament a la translació $z \mapsto z + b$, *a la dilatació* $z \mapsto az$ *i a la inversió* $z \mapsto 1/z$.

a) Donades $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$, *demostreu que* $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$ (mòdul constant *multiplicativa).*

b) Trobeu T^{-1} *i relacioneu-la amb* A_{T_1}. ◁

7.3.2. *Demostreu que tota* $T \in \mathcal{M}$ *es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions.* ◁

7.3.3. *Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació*

$$T(z) = \frac{2z + i}{(1 - i)z + 3i}.$$ ◁

7.3.4. *Demostreu que tota* $T \in \mathcal{M}$ *envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.* ◁

7.3.5. *Sigui* $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. *Quina és la imatge per* f *de*

a) la recta real, *b)* $\partial D_2(0)$, *c)* $\partial \mathbb{D}$, *d) l'eix imaginari.*

I per $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$*?* ◁

7.3.6. *Troba l'homografia que envia* $(i, 0, -1)$ *a* $(-i, 0, \infty)$. ◁

7.3.7. *Demostra el corol·lari 7.16.* ◁

7.3.8. *Troba una homografia que enviï* $\mathbb{D}$ *a* $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. ◁

7.3.9. *Sigui $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ i definim*

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}, T(z) = \frac{z}{az+1}.$$

Trobeu

$$T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1, \quad T^m, m \in \mathbb{Z}.$$ ◁

7.3.10. *Trobeu totes les $T \in \mathcal{M}$ que tinguin per punts fixos 0 i $-i$.* ◁

7.3.11. *Trobeu $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(1-i) = 1+i, T(2) = i, T(1+i) = -i$.* ◁

7.3.12. *Siguin C_1 i C_2 dues circumferències generalitzades i $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \backslash C_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \backslash C_2$. Demostreu que existeix $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C_1) = C_2$ i $T(z_1) = z_2$. Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu una d'elles en el cas particular*

$$C_1 = \{z : |z-1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i.$$

◁

7.4. Raó doble i simetria

Definició 7.19 (Raó doble)**.** La *raó doble* dels punts $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, que denotem per (z_0, z_1, z_2, z_3), es defineix com

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) := T(z_0),$$

on $T \in \mathcal{M}$ és tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ i $T(z_3) = \infty$. •

Com hem vist al lema 7.15, si tots ells són finits, tenim que

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Definició 7.20 (Simetria)**.** Diem que dos punts z i z^* són simètrics respecte una circumferència generalitzada C si existeix una homografia T que envia C en $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $T(z^*) = \overline{T(z)}$. •

Observem que la simetria respecte una recta correspon al concepte clàssic de conjugació. Així mateix, és fàcil veure que z i z^* són conjugats respecte el cercle unitat si i només si $z^* = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, vegeu la figura 7.11.

El següent lema ens indica que el concepte de simetria no depèn de l'homografia escollida.

Lema 7.21. *Es pot veure que, si z_1, z_2, z_3 són punts diferents d'una circumferència generalitzada C, aleshores z i z^* són simètrics respecte C si i només si*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

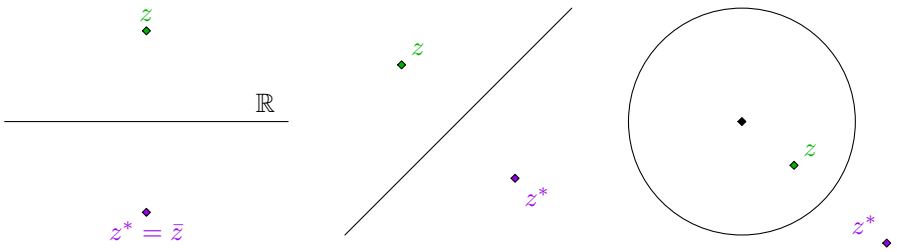


Figura 7.11.: Simetria respecte la recta real (conjugació), respecte una recta qualsevol (simetria axial) i respecte una circumferència.

Demostració. Siguin $z_1, z_2, z_3 \in C$, i anomenem $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, l'homografia que determina la raó doble. Notem que $S(C) = R_\infty$. Si $S(z^*) = \overline{S(z)}$, aleshores efectivament són simètrics per definició.

Per veure la implicació contrària, suposem que tenim $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C) = R_\infty$ i $T(z^*) = \overline{T(z)}$. Discutim dos casos:

- Si $T(z^*) \in \mathbb{R}$, aleshores $T(z^*) = \overline{T(z^*)} = T(z)$ i per l'injectivitat tenim que $z = z^* \in C$, de manera que
$$(z, z_1, z_2, z_3) = (z^*, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R},$$
i concloem $S(z^*) = \overline{S(z)}$ tal i com volíem veure.

- Si, en canvi, $T(z^*) \notin \mathbb{R}$, aleshores tenim un conjunt numerable de circumferències generalitzades que passen per $T(z^*)$ i $T(z)$, que, en passar per complexos conjugats, són simètriques respecte $\mathbb{R}$ i, per tant, tallen $\mathbb{R}$ en angles rectes. Les seves preimatges per $T \circ S^{-1}$ han de tallar també en angles rectes la recta real i, per tant, són una família infinita de circumferències generalitzades simètriques respecte $\mathbb{R}$. Com que són simètriques respecte $\mathbb{R}$, i la família inclou totes les circumferències generalitzades per $S(z)$ i $S(z^*)$, que són punts diferents, necessàriament aquests dos punts són conjugats (n'hi ha prou amb considerar la recta que els uneix i qualsevol altra circumferència).

□

Exercicis

7.4.1. *Sigui $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(D_R(a)) = D_R(a)$. Demostreu que els punts fixos de T estan a $\partial D_R(a)$ o bé són simètrics respecte $\partial D_R(a)$.* ◁

7.5. Automorfismes

D'especial rellevància són les representacions conformes d'un conjunt en si mateix ja que, amb l'operació composició, tenen una estructura de grup. A continuació veurem que en

els casos senzills, com $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}_\infty$, aquestes poden trobar-se explícitament.

Teorema 7.22. *Tota representació conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ és una homografia de la forma*

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{7.1}$$

per algun $a \in \mathbb{D}$ i $\theta \in \mathbb{R}$.

Definició 7.23. Amb l'operació composició, aquestes homografies formen un subgrup de $\mathcal{M}$ anomenat *automorfismes de* $\mathbb{D}$, abreujat com $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, vegeu la figura 7.12. •

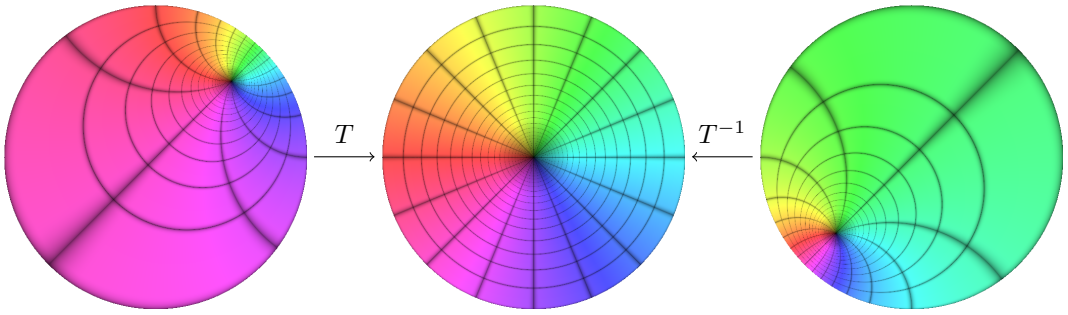


Figura 7.12.: Al centre, automorfisme identitat del disc unitat representat en polars (inclou radis d'angle $k\pi/8$), a l'esquerra, automorfisme del disc $T(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ amb $a = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ i a la dreta el seu automorfisme invers T^{-1}.

Demostració del teorema 7.22. L'exhaustivitat i injectivitat estan fetes a l'exercici 1.1.10. Per tant, tota homografia T de la forma (7.2) és una representació conforme del disc en ell mateix. Per veure que és l'única possible, suposem que f és una representació conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, sigui $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ i prenem $\theta := \mathrm{Arg}\,(f'(a))$. Definim $T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Notem que, com que

$$T_a'(z) = \frac{1-\bar{a}z+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2},$$

deduïm que

$$T_a(a) = 0 \qquad \text{i} \qquad T_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2} > 0.$$

Per altra banda, $e^{-i\theta}f$ també és una representació conforme del disc en ell mateix i

$$(e^{-i\theta}f)'(a) = e^{-i\theta}e^{i\theta}|f'(a)| > 0.$$

Per la unicitat del teorema de l'aplicació de Riemann, les dues representacions coincideixen, és a dir que

$$e^{-i\theta}f \equiv T_a,$$

i per tant f té la forma (7.2). □

Teorema 7.24. *Tota representació conforme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ és una homografia de la forma*

$$T(z) = az + b \tag{7.2}$$

per alguns $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Amb l'operació composició, aquestes homografies formen un subgrup de $\mathcal{M}$ anomenat automorfismes de $\mathbb{C}$*, abreujat com* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Demostració. El lector pot comprovar fàcilment que $az + b$ és una representació conforme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Anem a veure que, donada una representació conforme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, podem trobar a i b de manera que $f(z) = az + b$. En primer lloc, considerem $g(z) = f(1/z)$, que té una singularitat a l'origen.

Vegem que la singularitat no és essencial. Notem primer que $f(\mathbb{D}) \cap g(\mathbb{D}) = \varnothing$ per la bijectivitat de f. Com que $f(\mathbb{D})$ és un obert pel teorema de l'aplicació oberta, la imatge de $\mathbb{D}$ per g no és densa en el pla complex. Pel teorema de Casorati-Weierstrass la singularitat no és essencial.

Així doncs la part singular de la série de Laurent de g a $\mathbb{C}^*$ té un nombre finit de termes. Per la unicitat de les sèries de Laurent, aquesta ha de coincidir amb la sèrie de potències de f aplicada a $1/z$ i, per tant, només té la part singular i una constant. Deduïm que f és un polinomi. Finalment, la injectivitat implica que f és un polinomi de grau 1 pel teorema fonamental de l'àlgebra. □

Exercicis

7.5.1. *Demostra que tota representació conforme de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$ és una homografia.* ◁

7.5.2. *Troba tots els automorfismes T de $\mathbb{D}$ tals que $T(1/2) = 1/3$.* ◁

7.5.3. *Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien $1/2$ a 0. N'existeix alguna que enviï 0 a $-i/2$? I 0 a $-i/4$? Utilitzeu T per trobar una representació conforme S que enviï $\partial\mathbb{D}$ a $\partial D_2(i)$ tal que $S(1/2) = i$ i $S(0) = 0$.* ◁

7.5.4. *Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt $b \in \mathbb{D}$ per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir*

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}),\, T(a) = \widetilde{a}\},$$

és una circumferència. ◁

7.6. Altres transformacions conformes

A diferència de les homografies, que són biholomorfes a tot el pla ampliat, altres funcions són conformes quan es restringeixen a certes regions del pla. A continuació en veiem algunes de les més comuns.

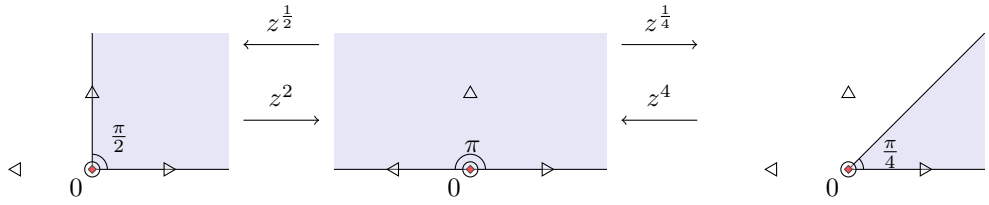


Figura 7.13.: Acció de les potències en sectors.

Potències

Comencem per veure com es comporten les potències. Fixem la branca de l'argument $\mathcal{A} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi)$, que dona lloc a

$$\mathcal{L}(z) = \ln|z| + i\mathcal{A}(z) = \begin{cases} \operatorname{Log}(-z) + i\pi & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty) \\ \ln(z) & \text{si } z \in (0,\infty), \end{cases}$$

que és una branca contínua del logaritme en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ i envia els reals positius als reals. Aleshores, donat un nombre real positiu $s > 0$, indiquem per

$$z^s = e^{s\mathcal{L}(z)},$$

és a dir que ara z^s ja no és multivaluada, sinó que en fixem una elecció, i per $x \in (0,\infty)$ tenim que $x^s \in (0,\infty)$ és la funció de variable real usual.

Per tal que sigui bijectiva, cal considerar-la en sectors oberts d'angle $\alpha \leqslant \min\{2\pi/s, 2\pi\}$, que la funció envia de manera conforme a un sector obert d'angle $\beta = s\alpha \leqslant 2\pi$. Per exemple, $f(z) = z^{1/2}$ és una representació conforme de $\{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\}$ en $\{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}\}$, on $\alpha = \pi$ i $\beta = \pi/2$, vegeu la figura 7.13.

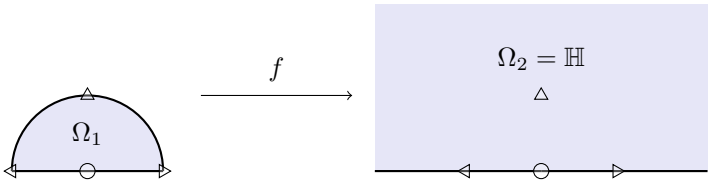


Figura 7.14.: Volem trobar una representació $f : \Omega_1 \to \mathbb{H}$.

Exemple 7.25. Volem trobar la representació conforme del semicercle Ω_1 en el semiplà superior $\mathbb{H}$, vegeu la figura 7.14. Per fer-ho, sabem de l'exemple 7.17 que l'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ envia el semicercle al primer quadrant, i el primer quadrant és conformement equivalent al semiplà superior per l'acció de z^2. Per tant, podem prendre

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2,$$

vegeu la figura 7.15. ◊

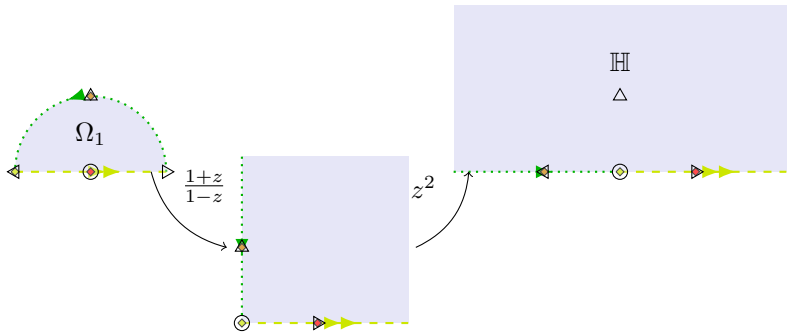


Figura 7.15.: Representació $f : \Omega_1 \to \mathbb{H}$ obtinguda per composició.

L'exponencial

L'exponencial també és localment injectiva, ja que la seva derivada mai s'anul·la. Globalment, és injectiva en bandes horitzontals obertes d'amplada menor o igual a 2π, vegeu la figura 7.16. Per tant, envia bandes horitzontals obertes d'amplada menor o igual a 2π a sectors d'angle igual a aquesta amplada. Si l'amplada és π seran semiplans. Si l'amplada és 2π, es tractarà del pla complex menys una semirecta.

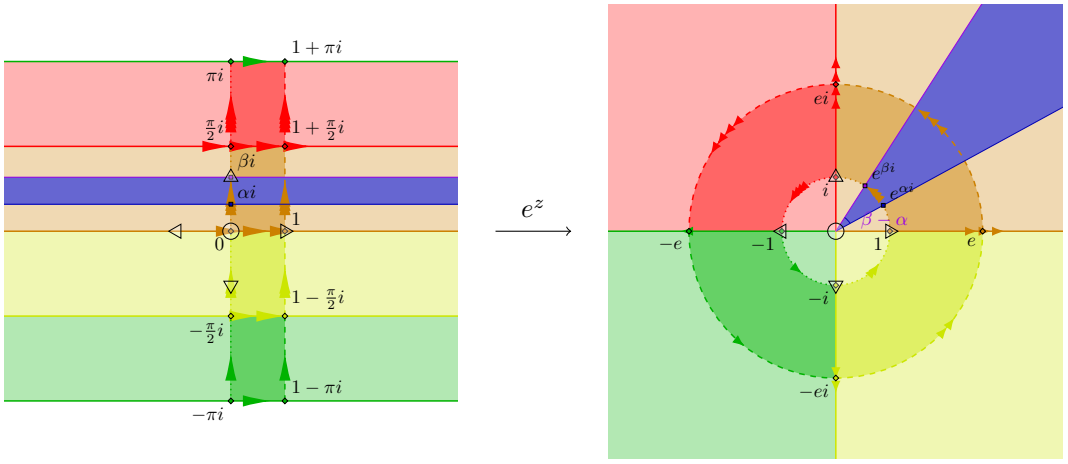


Figura 7.16.: Acció de la funció exponencial en bandes horitzontals i en rectangles paral·lels als eixos. Bandes horitzontals d'amplada γ van a sectors d'obertura γ.

Exemple 7.26. Tot seguit veiem com trobar l'aplicació de Riemann d'una banda horitzontal, vegeu la figures 7.17 i 7.18. La banda $\{x+iy : 0 < y < \pi\}$ s'envia per l'exponencial $f_1(z) = e^z$ al semiplà de part imaginària positiva. Multiplicant per $-i$, $f_2(z) = -iz$ s'envia a el semiplà de part real positiva. Finalment, $f_3(z) = \frac{z-1}{z+1}$, vegeu l'exemple 7.17, l'envia al disc unitat. Així doncs, $f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \frac{e^z-i}{e^z+i}$ és una aplicació de Riemann de la banda horitzontal donada. ◊

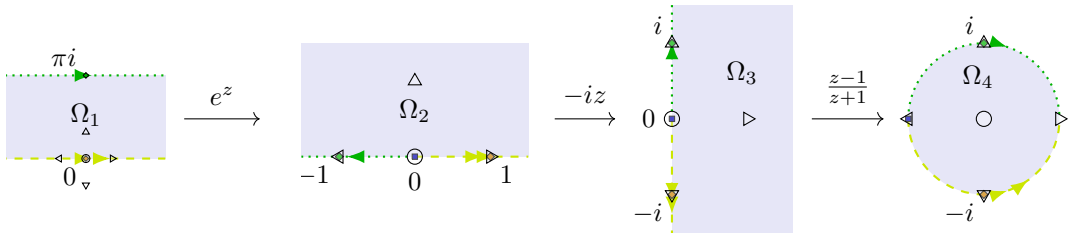


Figura 7.17.: Aplicació de Riemann de la banda horitzontal.

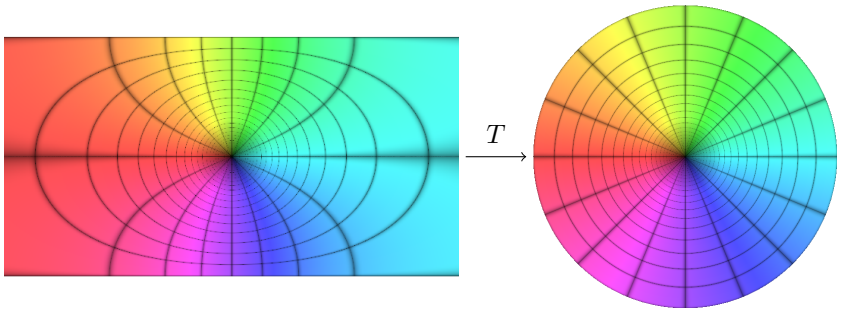


Figura 7.18.: Aplicació de Riemann $T(z) = \frac{e^z-i}{e^z+i}$ de la banda Ω_1, amb la coloració de la disc unitat a la dreta.

Exemple 7.27. Sigui Ω un domini fitat tancat per dos arcs de circumferència que intersequen en dos punts diferents a i b, vegeu la figura 7.19. Per trobar l'aplicació de Riemann, podem considerar $f_1(z) = \frac{z-a}{z-b}\frac{c-b}{c-a}$, on c és qualsevol punt de l'arc que va de a a b deixant la regió Ω a l'esquerra, és a dir resseguint el domini en sentit antihorari. Aleshores la imatge del primer arc és la semirecta dels reals positius, i la imatge d'Ω és un sector d'obertura α on $\alpha < 2\pi$ és l'angle que formen els arcs de circumferència en a.

Aleshores $f_2(z) = z^{\pi/\alpha}$ l'envia al sector $\{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\}$. Prenent $f_3(z) = -iz$ obtenim el semiplà de part real positiva, que s'envia al disc unitat mitjançant $f_4(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

Per tant, $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ és una aplicació de Riemann d'Ω. ◊

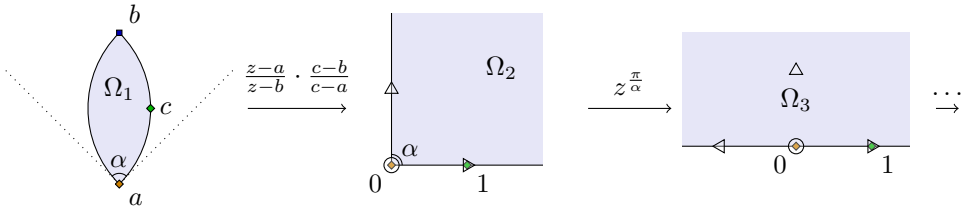


Figura 7.19.: Aplicació de Riemann d'una lent (serveix també per segments circulars i lúnules).

Exercicis

7.6.1. *Quina és la imatge del primer quadrant per z^3?* ◁

7.6.2. *Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a a un semiplà?* ◁

7.6.3. *Trobeu una aplicació de Riemann del sector $\{0 < \operatorname{Arg} z < \pi/8\}$.* ◁

7.6.4. *Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia?* ◁

7.6.5. *Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en $D_1(1)$ que enviï $1 \mapsto 1$, $0 \mapsto 0$ i $\infty \mapsto 1+i$.* ◁

7.6.6. *Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ en $\mathbb{D}$ són de la forma $e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ per alguna $a \in \mathbb{H}_+$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$.* ◁

7.6.7. *Trobeu una transformació de Möbius que enviï el primer quadrant a $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$. Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de $\mathbb{H}_+$ a $\{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.* ◁

7.6.8. *Trobeu una representació conforme de $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ en $\mathbb{D}$.* ◁

7.6.9. *Trobeu una representació conforme d'Ω_1 en Ω_2.*

a) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$.

b) $\Omega_1 = \mathbb{D}$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$.

c) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Re} z > 1/2\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$.

d) $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

e) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$.

f) $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$, *que deixi invariant el segment* $(-i, i)$.

g) $\Omega_1 = \mathbb{D}\backslash[0,1)$, $\Omega_2 = \mathbb{C}\backslash[0,\infty)$.

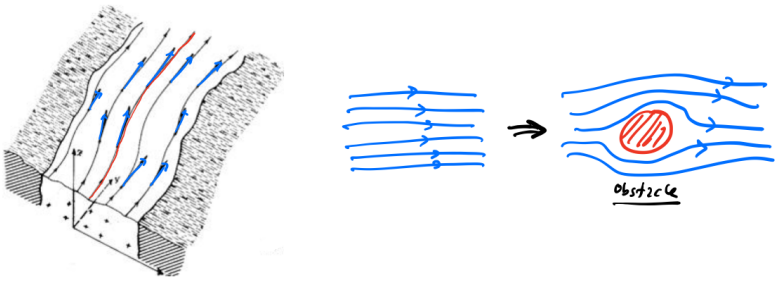
h) $\Omega_1 = \{|\operatorname{Im} z| < \pi/2\}\backslash((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$. ◁

8. Fluids

La solució de molts problemes importants en *dinàmica de fluids*, també anomenada *hidrodinàmica* o *aerodinàmica* s'obté sovint fent servir mètodes de variable complexa.

8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.

1. *El flux del fluid és bidimensional.* En el nostre model suposem que les característiques del flux són idèntiques per tot pla paral·lel. Això ens permet fixar l'atenció només en un pla, considerem el pla z. Les figures construïdes en aquest pla s'interpreten com seccions transversals de cilindres. En la figura, el disc representa la secció d'un cilindre de l'espai.



2. *El flux és estacionari o uniforme.* Considerem que la velocitat del fluid en un punt no varia amb el temps, només depèn de la posició (x, y). Veieu per exemple un mapa de vents de la Terra a `https://earth.nullschool.net/`, cal esperar un bona estona per veure com canvia la distribució. En petita escala temporal podem pensar que és un flux estacionari.

3. *Les components de la velocitat deriven d'un potencial.* Denotem per $\mathbf{V}(x, y) = (V_1, V_2)$ les components de la velocitat del fluid en el punt (x, y). Suposarem que existeix una funció $\varphi(x, y)$, que anomenem *velocitat potencial*, de manera que

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi = \mathbf{V}.$$

   En aquest cas el flux es diu que és *irrotacional* o *potencial*. Es pot demostrar[1] que aquesta condició és equivalent a

$$\text{rot}\mathbf{V} = \frac{-\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0.$$

[1] Ho podeu fer com exercici

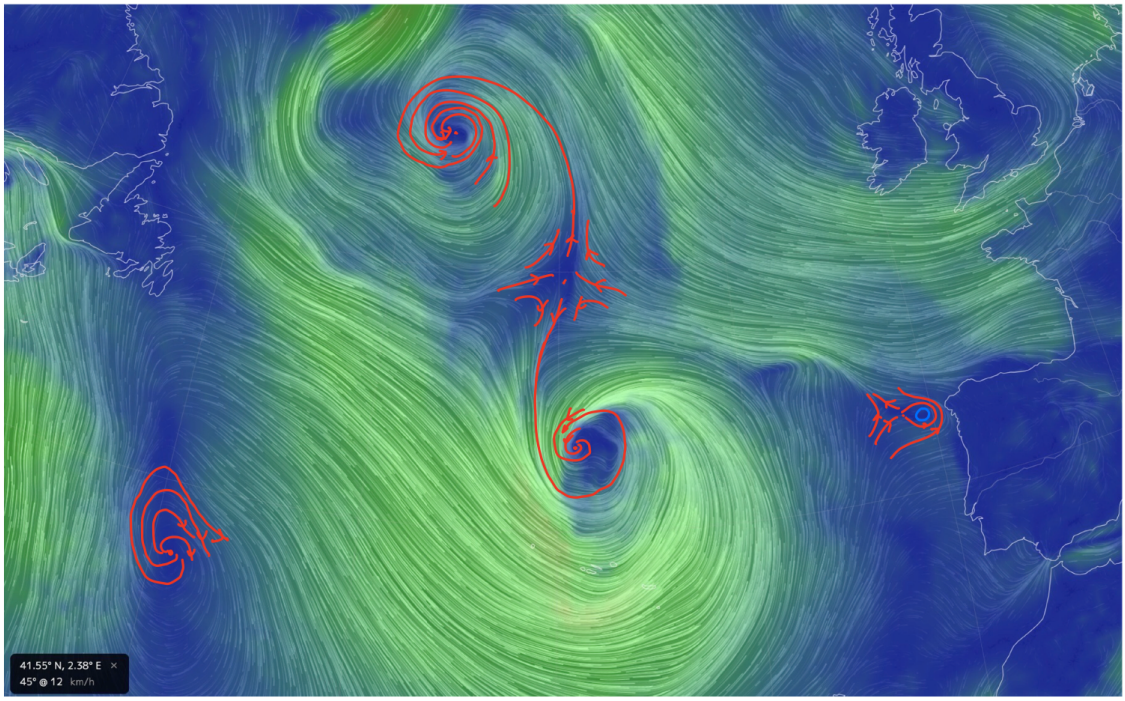


Figura 8.1.: Mapa de vents.

4. *El fluid és incompressible.* La densitat, o massa per unitat de volum, és constant. Si V_n és la component normal de la velocitat al llarg d'un circuit tancat C (vegeu la figura 8.2) aquesta condició equival a

$$Q := \int_C V_n ds = \int_C (-V_2 dx + V_1 dy) = 0.$$

Això expressa que la quantitat de fluid dins C és constant (entra el mateix que surt). Aquesta condició és equivalent a

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0.$$

A la quantitat Q se l'anomena *flux* del vector $\mathbf{V}$ a través del contorn C. En fluids més generals la quantitat Q pot ser no nul·la.

En general, per fluxos que no necessàriament provenen d'un potencial, a la quantitat

$$\Gamma := \int_C (V_1 dx + V_2 dy) = \int_C V_t ds$$

on C és una corba tancada, V_t la component tangencial de $\mathbf{V}$ en C (vegeu la figura 8.2) i ds l'element de longitud, se l'anomena *circul·lació* del flux al voltant de C.

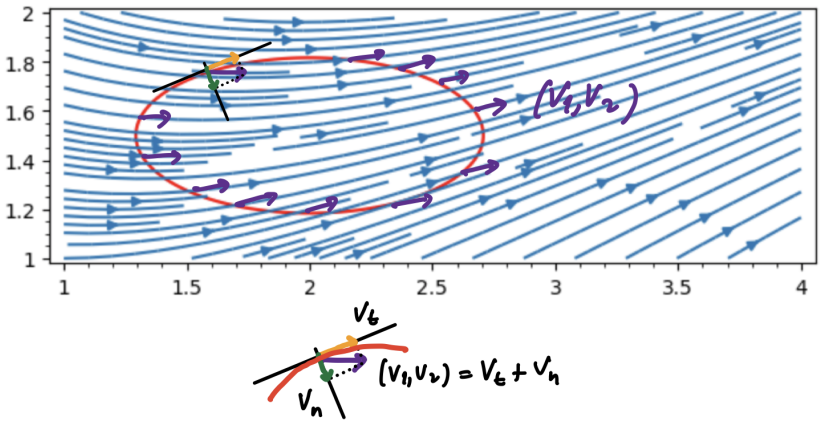


Figura 8.2.: Component tangent V_t i normal V_n del flux respecte a un circuit.

Sigui $\psi(x,y)$ una funció harmònica conjugada de la velocitat potencial $\varphi(x,y)$ definida al $\Omega \subset \mathbb{C}$ (és a dir que $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$), a la funció analítica en Ω donada per

$$\Phi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

se l'anomena *potencial complex.*

Notació 8.1. Fixem la següent notació pel capítol:

- $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ s'anomena *potencial complex*
- φ és la *funció potencial* (o velocitat potencial) i ψ la *funció de corrent.*
- Les corbes $\varphi = c$ són les *línies equipotencials* i $\psi = c$ les *línies de corrent o de flux* (són ortogonals).
- El camp del flux, o *velocitat de corrent*, $\mathbf{V}$ satisfà

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}(z) = Ve^{i\alpha} = V_1 + iV_2 = \overline{\Phi'(z)}, \\ V = |\mathbf{V}| = |\Phi'|, \quad \alpha = -\arg(\overline{\Phi'}), \\ \mathbf{V} = \text{grad}\varphi. \end{aligned}\right\}$$

- Els punts on $\Phi'(z) = 0$ s'anomenen punts *estacionaris* o *d'estancament* (en aquests punts la velocitat és zero). •

Observació 8.2 (Comandes amb `Sage`.)**.** Per dibuixar les línies de corrent i les línies equipotencials caldrà la comanda `contour_plot` i per dibuixar els camps (amb fletxes de direcció) `plot_vector_field` o `streamline_plot`. •

Exercicis

8.1.1. *Proveu que* $\Gamma = 0$ *en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe* C^2 *com a mínim).* ◁

8.1.2. *Proveu que per fluxos definits en un domini* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial* $\varphi(x, y)$ *és una funció harmònica.* ◁

8.1.3. *Proveu que* $\overline{\Phi'(z)} = \boldsymbol{V}(z) = V_1 + iV_2$. ◁

8.2. Fluxos bàsics.

Exemple 8.3 (Flux uniforme)**.** Ve donat pel potencial $\Phi(z) = V_0 e^{-\delta i} z$, amb $V_0, \delta \in \mathbb{R}$.

Trobem la seva expressió. Recordem que $\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \overline{V_0 e^{-\delta i}} = V_0 e^{\delta i}$, $V = V_0$, per tant,

$$\varphi = \operatorname{Re}(\Phi(z)) = \operatorname{Re}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(\cos\delta \cdot x + \sin\delta \cdot y).$$

$$\psi = \operatorname{Im}(\Phi(z)) = \operatorname{Im}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(-\sin\delta \cdot x + \cos\delta \cdot y).$$

Les línies de flux $\psi = c$ són rectes amb pendent $\tan\delta$ i δ és l'angle que formen les línies de flux amb l'eix real. ◊

Exemple 8.4 (Font al punt $z = a$)**.** Aquí $\Phi(z) = k\log(z - a)$, $k \in \mathbb{R}$. Quan $k > 0$ s'anomena *font*, si $k < 0$ una *pica* (sumidero, sink).

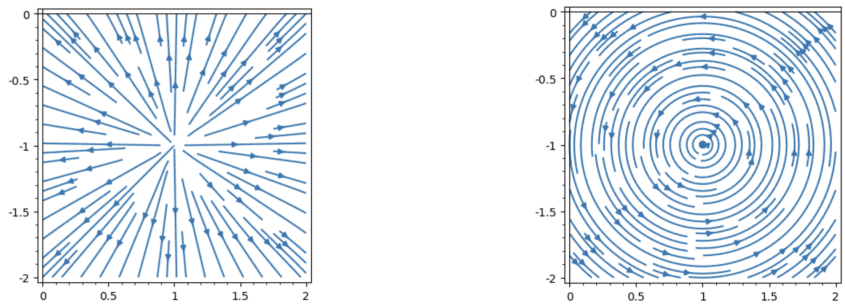


Figura 8.3.: A esquerra font amb $k = 2$, a dreta remolí amb $k = 2$. $a = 1 - i$.

Trobem l'expressió de $\mathbf{V}$, V, φ i ψ. Tenim que $\overline{\Phi'(z)} = \dfrac{k}{\bar{z} - \bar{a}} = k\dfrac{z - a}{|z - a|^2} = \dfrac{k}{|z - a|^2}(x - a_1 + i(y - a_2))$. Llavors

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{k}{|z - a|^2}(x - a_1, y - a_2), \quad V(x, y) = \frac{k}{|z - a|}.$$

Les direccions de flux que dona $\mathbf{V}$ segueixen la direcció de $z - a$, si $k > 0$ surten, una font, i si $k < 0$ entren, una pica. Com que $\Phi = k\log(z - a) = k(\ln|z - a| + i\arg(z - a))$

tenim que $\psi(x,y) = k\arg(z-a)$ i les corbes $\psi = c$ són línies que surten de a com es veu a l'esquerra de la figura 8.3. Observem que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz = \int_C \frac{kdz}{z-a} = 2k\pi i.$$

Aleshores $\Gamma = 0$ i $Q = 2k\pi$. No té circul·lació i la potència és $2k\pi$. ◊

Exemple 8.5 (Flux amb circul·lació)**.** Estudiem el cas $\Phi(z) = -ik\log(z-a)$ $k \in \mathbb{R}$. Veurem que la velocitat del flux és inversament proporcional a la distància al punt a. Diem que en el punt a hi ha un *remolí* de força k.

Procedim com en el cas anterior. Tenim que $\overline{\Phi'(z)} = \dfrac{ki}{\bar{z}-\bar{a}} = ki\dfrac{z-a}{|z-a|^2} = \dfrac{ki}{|z-a|^2}(x - a_1 + i(y-a_2)) = \dfrac{k}{|z-a|^2}(-(y-a_2) + i(x-a_1))$. Llavors

$$\mathbf{V}(x,y) = \frac{k}{|z-a|^2}(-(y-a_2), x-a_1), \quad V(x,y) = \frac{k}{|z-a|}.$$

Les direccions de flux que dona $\mathbf{V}$ segueixen direccions de circumferències amb centre a, si $k > 0$ en direcció antihorària i si $k < 0$ en direcció horària, en els dos casos és un remolí.

Com que $\Phi = -ki\log(z-a) = -ki(\log|z-a| + i\arg(z-a)) = k(\arg(z-a) - i\log(|z-a|))$ tenim que $\psi(x,y) = -k\log|z-a|$ i les corbes $\psi = c$ són circumferències centrades a a tal com es veu a la dreta de la figura 8.3. Observem que si C envolta a, aleshores

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz = \int_C \frac{-ikdz}{z-a} = 2k\pi.$$

Aleshores $\Gamma = 2k\pi$ i $Q = 0$. La circul·lació és $2k\pi$ i la potència és 0. ◊

Exercicis

8.2.1. Superposició. *Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt $-a$ amb una pica al punt a:*

$$\Phi(z) = k\log(z+a) - k\log(z-a) = k\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right).$$

Trobeu l'expressió de $\boldsymbol{V}$, V, φ i ψ. Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$). ◁

8.2.2. *En l'exercici anterior, fem $a \to 0$ i $k \to \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sigui finit. Veure que al límit obtenim el potencial complex $\Phi(z) = \mu/z$ que s'anomena* doblet *o* dipol*. Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat $2\pi\mu$ s'anomena* moment *del doblet. Trobeu l'expressió de $\boldsymbol{V}$, V, φ i ψ. Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$).* ◁

8.2.3. Font-remolí. *Estudiar el flux amb funció potencial $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z-a)$. Discutiu segons els valors de Γ (circul·lació o intensitat) i Q (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de Γ i Q.* ◁

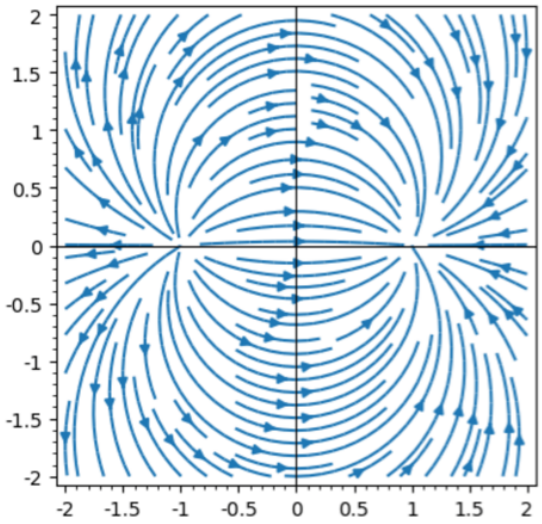


Figura 8.4.: Superposició amb $a = 1$.

8.3. Obstacles

Un problema important en la teoria de fluids és determinar el model de corrent que es mou inicialment a velocitat uniforme V_0 i que ha d'evitar un obstacle. La idea general és considerar un potencial complex de la forma $\Phi(z) = V_0 z + G(z)$ on $G(z)$ compleix que $\lim_{z\to\infty} G'(z) = 0$. Això vol dir que lluny de l'obstacle el corrent ve donat per $V_0 z$. De vegades cal també que aquest nou potencial Φ tingui la frontera de l'obstacle com a trajectòria.

Exemple 8.6. Estudiem el corrent del fluid amb potencial complex donat per

$$\Phi(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

amb $V_0, a \in \mathbb{R}$.

Ja veiem que és una superposició d'un flux lineal (quan z és gran) i un doblet (quan z

prop de zero).

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= V_0\left(x\left(1+\frac{a^2}{|z|^2}\right)+iy\left(1-\frac{a^2}{|z|^2}\right)\right)\\
\varphi &= V_0 x\left(1+\frac{a^2}{|z|^2}\right)\\
\psi &= V_0 y\left(1-\frac{a^2}{|z|^2}\right)\\
\mathbf{V} &= \overline{\Phi'(z)} = V_0\left(1-\frac{a^2z^2}{|z|^4}\right)\\
V &= |V_0|\left|1-\frac{a^2z^2}{|z|^4}\right|.
\end{aligned}$$

Comprovem ara que $|z| = a$ és una línia de corrent: observem que els punts de $C = \{z = x + iy : |z|^2 = a^2\}$ satisfan $\psi(x, y) = ct$. En efecte, si $z \in C$ llavors

$$\psi(z) = V_0 y(1 - a^2/a^2) = 0$$

i C és la corba de nivell zero, és una línia de flux. Al la figura 8.5 es pot veure el flux per $V_0 = a^2 = 3$.

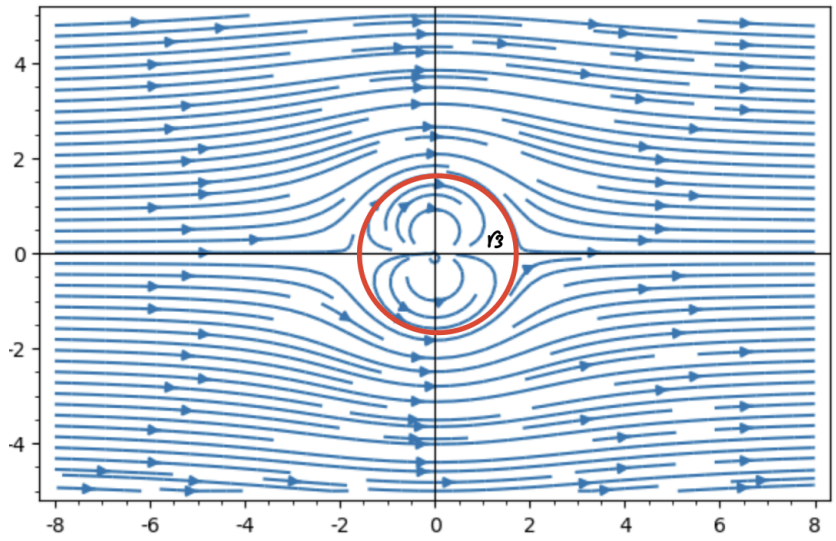


Figura 8.5.: Flux per $\Phi(z) = 3(z + 3/z)$.

◊

Teorema 8.7. *Si $f(z)$ és un potencial complex amb singularitats fora de $|z| > R$ llavors*

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

és un potencial complex tal que $|z| = R$ és una línia de flux (corrent) i que té les mateixes singularitats que $f(z)$ a la regió $|z| > R$.

Recordem que si $f(z)$ és analítica en una regió Ω tal que $\bar{\Omega} = \Omega$ llavors $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ és analítica i $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

Demostració. Si $|z| = R$ llavors $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(R^2 z/|z|^2)} = f(z) + \overline{f(z)} \in \mathbb{R}$. Llavors $\psi(z) = 0$ per tot z de la circumferència $|z| = R$, llavors aquesta circumferència és línia de flux. Sigui p punt singular de f, per hipòtesi $|p| > R$, llavors $|R^2/\bar{z}| < R$ i p no és punt singular de $\overline{f\,(R^2/\bar{z})}$. Les singularitats de Φ fora de la circumferència són les que provenen de f i no de la part afegida. □

Exercicis

8.3.1. *Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \log(z+2)$ que és una font sortint des del punt $z = -2$ (vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial*

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

a) Descomposeu Φ en fluxos coneguts.

b) Calculeu $\Phi'(z)$ i confirmeu el que es demostra a l'apartat anterior.

c) Vegeu que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \dfrac{1}{z+2}$ i que llavors lluny de $z = -2$ el flux associat a Φ és com una font sortint de $z = -2$.

d) Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` *i* `streamline_plot`*).* ◁

8.4. Expressió general (recapitulació).

Proposició 8.8. *Si $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ aleshores*

$$\Gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C d\varphi$$
$$Q = \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C d\psi$$

i que llavors

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz.$$

Si $\Phi'(z)$ està definida a l'interior de C i té un nombre finit de punts singulars $\{p_k\}$, aleshores

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(\Phi'(z), p_k).$$

Demostració. Tenim que $\Phi'(z) = \varphi_x + i\psi_x = V_1 - iV_2 = \psi_y - i\varphi_y$. Aleshores

$$Q = \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C \psi_x dx + \psi_y dy = \oint_C d\psi$$

i

$$\Gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \oint_C d\varphi.$$

Ara bé

$$\begin{aligned}\Phi'(z)dz = (\varphi_x + i\psi_x)(dx + idy) = \varphi_x dx - \psi_x dy + i(\psi_x dx + \varphi_x dy) = \\ = \varphi_x dx + \varphi_y dy + i(\psi_x dx + \psi_y dy) = d\varphi + id\psi.\end{aligned}$$

i podem concloure que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz.$$

La darrera afirmació de l'exercici és conseqüència del teorema dels residus. □

Proposició 8.9. *Si a és un pol d'ordre finit de $\Phi'(z)$, per $\Phi(z)$ hi ha un entorn al voltant de a de manera que*

$$\Phi(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \cdots .$$

Demostració. Per tenir $\Phi'(z)$ un pol d'ordre finit integrant obtenim el resultat. □

Llavors, segons el que hem vist al llarg del capítol, diem que

- $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z-a)$ determina en a una *font-remolí* de potència Q i intensitat Γ, la denotem per $(a; Q, \Gamma)$. Quan $Q = 0$ és un remolí, i quan $\Gamma = 0$ és una font ($Q > 0$) o una pica ($Q < 0$).
- $\Phi(z) = \dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}$ determina en a un *doblet* de moment p, el denotem per $(a; p)$ ($\overline{p}$ determina la direcció la direcció del doblet que passa per a).
- $\Phi(z) = \dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ determina un *multiplet* d'ordre $2k$ en el punt a.[2]

[2]La notació i comportament a l'∞ és similar, si $\Phi(z) = c_n z^n + \cdots + \dfrac{p}{2\pi}z + \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z) + c_0 + \dfrac{c_1}{z}\cdots$ direm que el terme en $\log(z)$ determina una *font-remolí* de potència $-Q$ i intensitat $-\Gamma$, el terme en z un *doblet* de moment p i els de z^k *multiplets* d'ordre $2k$.

Exercicis

8.4.1. *Pels z on $\boldsymbol{V}(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ diem que hi ha un* punt estacionari *del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).*

a) Per $\Phi(z) = z^n$ el 0 és un punt estacionari d'ordre $n-1$. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per $n = 2, 3, 4$.

b) Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?

c) Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = ct., \psi = ct.$) formen un angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?

8.4.2. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a*

a) $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ *on* $a, b \in \mathbb{C}$ *i* $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$..

b) $\Phi(z) = az + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on* $a, \Gamma > 0$.

c) $\Phi(z) = az + \dfrac{Q}{2\pi}\log(z)$ *on* $a, Q > 0$.

d) $\Phi(z) = \dfrac{p}{2\pi z} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on* $p, \Gamma > 0$. ◁

8.4.3. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi R V_0$, $\Gamma > 4\pi R V_0$ i $\Gamma = 4\pi R V_0$. Dibuixeu exemples de cadascun dels casos. ◁

8.4.4. *Donar un potencial complex que té fonts-remolins $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \ldots, n\}$ i velocitat $\boldsymbol{V}_\infty = Ve^{i\alpha}$ a l'infinit.* ◁

A. El Teorema de l'aplicació de Riemann

Recordem l'enunciat del Teorema que ens ocupa.

Teorema A.1 (Teorema de l'aplicació de Riemann)**.** *Sigui $U \subsetneq \mathbb{C}$ un obert simplement connex. Llavors existeix una representació conforme $f : U \to \mathbb{D}$. A més, si escollim $z_0 \in U$ i demanem que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$ (és a dir que $f'(z_0) \in \mathbb{R}_+$), aleshores f és única .*

La demostració de la unicitat és senzilla, vegeu la Secció 7.1. En aquest apèndix demostrarem l'existència de la representació conforme. Tot i que el teorema va ser enunciat per Riemann, la demostració complerta s'atribueix a Koebe[1]. És una demostració elegant que fa servir diverses de les eines que hem desenvolupat en aquests apunts. Addicionalment, però, necessitem també el concepte de família normal i el teorema de Montel[2], que enunciem a continuació.

Famílies normals i el Teorema de Montel

Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un obert del pla complex, i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en U. Diem que $\mathcal{F}$ és una *família normal* si tota successió de funcions de $\mathcal{F}$ te una parcial que convergeix uniformement en compactes de U. Observem que pel teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.36), el límit ha de ser una funció holomorfa, tot i que no necessàriament ha de ser membre de la família $\mathcal{F}$.

Comprovar si una família de funcions és normal acostuma a fer-se fent servir el teorema de Montel. La versió feble d'aquest resultat diu el següent.

Teorema A.2 (Teorema de Montel, versió feble)**.** *Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un obert i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en U. Suposem que $\mathcal{F}$ és uniformement fitada, és a dir, que existeix $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leqslant M, \quad \text{per a tota } f \in \mathcal{F} \text{ i tot } z \in U.$$

Aleshores, la família $\mathcal{F}$ és normal.

El lector interessat pot trobar una demostració a [SS10, Sect. 3].

Demostració del Teorema de l'aplicació de Riemann

La demostració consta de tres passos diferents que farem per separat.

Pas 1. *Vegem primer que existeix un subconjunt $V \subset \mathbb{D}$ que conté l'origen i una representació conforme $F : U \to V$ amb $F(z_0) = 0$.*

[1] Paul Koebe, Luckenwalde, 1882–1945, https://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Koebe
[2] Paul Montel, Niça, 1876–1975, https://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Montel

Demostració. Per fer-ho, escollim un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha \notin U$ (existeix perquè U no és tot el pla). Aleshores $z - \alpha \neq 0$ a U i per tant, donat que U és simplement connex, existeix una determinació del logaritme de $z - a$ en U (vegeu el teorema 5.29). És a dir, existeix una funció holomorfa $\mathcal{L}(z)$ tal que $e^{\mathcal{L}(z)} = z - a$. De l'equació veiem que $\mathcal{L}$ és necessàriament injectiva, però a més, veiem que

$$\mathcal{L}(z) \neq \mathcal{L}(z_0) + 2\pi i, \quad \text{per a tot } z \in U,$$

ja que, altrament, exponenciant aquesta expressió obtindriem $z = z_0$, que implicaria que $\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(z_0)$, una contradicció. De fet, $\mathcal{L}(U)$ omet tot un disc centrat en $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ ja que si no fos així, existiria una successió (z_n) en U tal que $\mathcal{L}(z_n) \to \mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$. De nou, exponenciant aquesta expressió, i donat que l'exponencial és contínua, tindriem que $z_n \to z_0$ i per tant $\mathcal{L}(z_n) \to \mathcal{L}(z_0)$, una contradicció.

Així doncs hem vist que existeix un disc D centrat a $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ tal que $\mathcal{L}(U)$ no interseca D. Considerem ara l'homografia

$$T(z) = \frac{z - \mathcal{L}(z_0)}{z - (\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i)},$$

que envia el punt $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ a l'infinit i $\mathcal{L}(z_0)$ a l'origen, i el disc D que l'envolta al complementari d'un disc.

Com que $\mathcal{L}$ és injectiva, $T \circ \mathcal{L}$ també ho és, i per tant $T \circ \mathcal{L} : U \to T(\mathcal{L}(U))$ és una representació conforme. A més, per construcció, $T(\mathcal{L}(U))$ és un conjunt fitat. Només ens cal doncs compondre $T \circ \mathcal{L}$ amb una homotècia adequada, per obtenir una representació conforme de U en un subconjunt de $\mathbb{D}$ que conté l'origen i tal que $F(z_0) = 0$. □

Del pas anterior deduïm que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que U és un subconjunt obert de $\mathbb{D}$. Considerem la família $\mathcal{F}$ de funcions holomorfes i injectives d'U en D fixant l'origen, és a dir

$$\mathcal{F} = \{f : U \to \mathbb{D} \mid f \text{ injectiva, holomorfa i } f(0) = 0\}.$$

Observem que la identitat pertany a $\mathcal{F}$, i per tant $\mathcal{F}$ no és buida. A més, aquesta família és uniformement fitada per construcció, ja que totes les funcions van a parar al disc unitat. El teorema de Montel (vegeu el teorema A.2) ens diu, doncs, que $\mathcal{F}$ és una família normal.

Pas 2. *Vegem que $\mathcal{F}$ conté una funció f que maximitza $|f'(0)| = s := \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)| \geqslant 1$.*

Demostració. Observem primer que $|f'(0)|$ està uniformement acotada, per a $f \in \mathcal{F}$. Això es pot veure aplicant la desigualtat de Cauchy (vegeu el lema 4.26) a f' en un petit disc centrat a l'origen. En conseqüència, podem definir

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| \geqslant 1,$$

on la desigualtat ve donada pel fet que la identitat pertany a $\mathcal{F}$. Escollim una successió $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que $|f_n'(0)| \to s$, quan $n \to \infty$. Donat que $\mathcal{F}$ és normal, aquesta successió té una parcial que convergeix uniformement en compactes de U a una funció f. Pel teorema

de Weierestras (vegeu el teorema 4.36), f és holomorfa en U i $|f'(0)| = s \geqslant 1$. Això ens diu que f no és constant i, com que les funcions f_n són injectives, el teorema de Hurwitz (vegeu el teorema 6.34 i l'exercici 6.7.9) ens diu que f també és injectiva. Per continuïtat, també veiem que $|f(z)| \leqslant 1$ per a tot $z \in U$ i, pel principi del mòdul màxim (vegeu el teorema 4.49), se segueix que $|f(z)| < 1$ (ja que U és obert). Clarament també tenim que $f(0) = 0$, la qual cosa implica que $f \in \mathcal{F}$ i que $|f'(0)| = s$, tal i com volíem demostrar. □

Pas 3. *Vegem que, de fet, f és una representació conforme de U en $\mathbb{D}$.*

Demostració. Ja sabem que f és holomorfa i injectiva, per tant només ens queda demostrar que és exhaustiva. La idea és veure que, si no fos així, podríem trobar una funció $F \in \mathcal{F}$ amb $|F'(0)| > |f'(0)| = s$, la qual cosa és una contradicció.

Suposem doncs que existeix $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) \neq a$ per a tot $z \in U$. Considerem l'automorfisme de $\mathbb{D}$ que intercanvia els punts a i 0 (vegeu l'exercici 1.1.10)

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Com que U és simplement connex, també ho és $(\varphi_a \circ f)(U)$ i, a més, no conté l'origen. Per tant, existeix una branca holomorfa de l'arrel quadrada (de la identitat) en U, vegeu l'exercici 5.4.3, i que és injectiva. Considerem ara la composició

$$F = \varphi_{g(a)} \circ g \circ \varphi_a \circ f,$$

i procedim a veure que $F \in \mathcal{F}$. Clarament F és holomorfa i $F(0) = 0$. Totes les funcions envien el disc unitat a ell mateix i, per tant, F també ho fa. De la mateixa manera, F és injectiva ja que totes les components ho són, i així concloem que $F \in \mathcal{F}$.

Considerem ara $h(u) = u^2$, la inversa de g, i escrivim

$$f = \varphi_a^{-1} \circ h \circ \varphi_{g(a)}^{-1} \circ F := \Phi \circ F.$$

Observem que Φ envia $\mathbb{D}$ a ell mateix (no injectivament), amb $\Phi(0) = 0$. Pel lema de Schwarz (vegeu el lema 4.52), es compleix que $|\Phi'(0)| < 1$. Però aleshores, usant la regla de la cadena,

$$s = |f'(0)| = |\Phi'(0)F'(0)| < |F'(0)|$$

que contradiu la maximalitat de $|f'(0)|$ en $\mathcal{F}$. Deduïm doncs que f és exhaustiva i per tant una representació conforme de U en $\mathbb{D}$ fixant l'origen. □

Multiplicant f per la constant $|f'(0)|/f'(0)$, de mòdul 1, obtenim $\tilde{f}$ amb les mateixes propietats i satisfent $\tilde{f}'(0) > 0$.

Per acabar, observem que en el pas 1, hem pogut escollir una traslació que ens portés el punt $z_0 \in U$ escollit a l'origen. És aquesta composició final, la que satisfarà les condicions del teorema. □

Observacions sobre la unicitat

La manera com s'expresen les condicions d'unicitat a l'enunciat del teorema, poden ser tal vegada obscures. Seria potser més aclaridor entendre-les de la següent manera:

Teorema. *Si $U \subsetneq \mathbb{C}$ és un obert simplement connex, aleshores existeix una representació conforme $f : U \to \mathbb{D}$. A més, f és única mòdul postcomposició per automorfismes de $\mathbb{D}$.*

En altres paraules, dues representacions conformes, f i g, de U en $\mathbb{D}$ han de complir que $f = T \circ g$, per un automorfisme T del disc unitat, és a dir

$$T(z) = e^{it} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z},$$

per algun $z_0 \in \mathbb{D}$ i algun $t \in \mathbb{R}$. Això ens diu que per escollir f tenim tres graus de llibertat reals que poden utilitzar-se, per exemple, per decidir la imatge d'algun punt (això són dos – parts real i imaginària), i l'argument d'alguna altra quantitat com la derivada en un punt (el tercer grau, que seria el que s'aconseguiria amb la rotació e^{it}). La condició habitual de $f'(0) > 0$ és equivalent a demanar $\arg f'(0) = 0$, i pot aconseguir-se sempre multiplicant per una constant de mòdul 1, és a dir component amb una rotació.

Index

Bibliografia

[Ahl79] Lars Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3rd edition, 1979.

[BC08] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Anàlisi complexa*, volume 49. Univ. Autònoma de Barcelona, 2008.

[BC13] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Complex Analysis: Translated from the Catalan by Ignacio Monreal*. EMS Press, May 2013.

[Bur12] R. Burckel. *An Introduction to Classical Complex Analysis: Vol. 1*, volume 64. Birkhäuser, 2012.

[Con78] John B Conway. *Functions of One Complex Variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 1978.

[D'A10] John P D'Angelo. *An introduction to complex analysis and geometry*, volume 12. American Mathematical Soc., 2010.

[MH99] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic complex analysis*, volume 72. Cambridge University Press, 3rd edition, 1999.

[R+79] Walter Rudin et al. Análisis real y complejo. 1979.

[SS10] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.