MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2008-2009

Àlgebra Lineal

31.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculeu $A \cdot B$, $B \cdot A$ i $2A - 3B$.

32.- (a) Trobeu una matriu C tal que $2C + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Calculeu les matrius A i B que verifiquen

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}, \; 5A - 3B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -30 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

33.- Doneu la forma reduïda per files, usant el mètode de Gauss, de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & -6 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & 8 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Quin és el rang de cadascuna d'elles?

34.- Trobeu la matriu associada dels sistemes:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & +z & = & 1 \\ x & -y & -2z & = & 2 \\ x & +2y & -z & = & 4 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & -3y & +2z & = & 6 \\ 2x & +y & -5z & = & -4 \\ 2x & -13y & +13z & = & 28 \end{array} \right.$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & +y & = & 1 \\ x & +y & = & 0 \\ 3y & -z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +3z & +t & = & 3 \\ 4y & +x & +5z & +2t & = & 2 \\ 2x & +8z & +9y & +3t & = & 12 \\ 3x & +7y & +7z & +2t & = & 20 \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} 4x & +4y & -2z & +2t & = & 2 \\ 16x & -4y & +8z & -4t & = & 4 \end{array} \right.$$

Trianguleu la matriu obtinguda i estudieu la compatibilitat del sistema. En el cas que existeixi solució, trobeu-la.

35.- Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té grau de llibertat 2,

$$\left. \begin{array}{rcl} 4x - y + z + 2t + 2u & = & 1 \\ y + z - 2u & = & 1 \\ 2x + z + t & = & 1 \\ x - y + t + 2u & = & 0 \\ 5x + y + 3z + 2t - 2u & = & 3 \end{array} \right\}$$

Sense calcular les solucions explícitament contesteu les següents preguntes:

(a) Quin és el número màxim d'equacions independents?

(b) És la segona equació combinació de les altres? i la quarta?

(c) Hi ha alguna solució amb $x = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$? i amb $y = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$?

36.- Estudieu la compatibilitat segons el valor de λ i μ i solucioneu (si es pot) els sistemes:

$$\text{(a)}\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -2y & -\lambda z & -\lambda t & = & 1-\lambda \\ 2x & +(2\lambda-4)y & +(3-2\lambda)z & -\lambda t & = & 1 \\ -2x & +(4-\lambda)y & +(2\lambda-4)z & +3\lambda t & = & -\lambda \end{array}\right.$$

$$\text{(b)}\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +3y & +\lambda z & -\lambda t & = & 1-\lambda \\ 2x & +6y & -2z & -2(3+\lambda)t & = & -2\lambda \\ (1+\lambda)x & +(3+3\lambda)y & +(\lambda+\lambda^2)z & & = & 1+\lambda-\lambda^2 \end{array}\right.$$

$$\text{(c)}\left\{\begin{array}{rrrrcl} 5x & -3y & +2z & +4t & = & 3 \\ 4x & -2y & +3z & +7t & = & 1 \\ 8x & -6y & -z & -5t & = & 9 \\ 7x & -3y & +7z & +17t & = & \lambda \end{array}\right. \qquad \text{(d)}\left\{\begin{array}{rcl} 2x+\lambda y+z & = & 0 \\ 2x-2y+z & = & 0 \\ \mu x+2y-4z & = & 0 \\ 4x+2y+7z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(e)}\left\{\begin{array}{rrrrrcl} -2x & -2y & +2z & +4t & -4u & = & 2 \\ 2x & +2y & +2z & +4t & +2u & = & 2 \\ 2x & -2y & +2z & -2t & +2u & = & 2 \\ 2x & +2y & +4z & +4\lambda t & +\frac{1}{2}\lambda u & = & -4 \end{array}\right.$$

37.- (a) Estudieu la posició relativa de les rectes següents:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-5z+1 & = & 0 \\ x-2y+z-3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-3z-2 & = & 0 \\ x+y+z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

(b) Estudieu la posició relativa de la recta i el pla següents:

$$\left\{\begin{array}{l} (x,y,z)=(1,0,-1)+t(2,3,4) \\ 2x-4y+2z+1=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (x,y,z)=(1,0,-1)+t(2,3,4) \\ 2x+3y+4z=0 \end{array}\right.$$

38.- Calculeu la inversa (quan sigui possible) de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

39.- Resoleu les següents equacions matricials, és a dir, trobeu una matriu X que satisfaci les següents equacions amb matrius:

(a) $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

40.- Calculeu els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

41.- És el vector b combinació lineal dels a_i? En cas afirmatiu, expresseu b com a combinació lineal de a_1, a_2 i a_3.

(a) $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$; $b = (7,-2,1)$.

(b) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$; $b = (5,9,0)$.

42.- Troba la dimensió i una base dels subespais vectorials següents:

(a) $\langle (1,0,-1), (-2,0,3), (3,1,0), (0,0,1) \rangle$.

(b) $\langle (1,2,3), (-1,0,2), (1,3,0), (0,0,2) \rangle$.

(c) $\langle (0,0,0,1), (1,-1,0,1), (-1,1,0,3), (0,0,1,7) \rangle$.

(d) $\langle (1,0,-1,1), (1,1,0,9), (2,1,-1,10) \rangle$.

(e) $\langle (0,1,-1,1), (1,2,5,-1), (1,3,4,0) \rangle$.

43.- Donades les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -5 & 7 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ -8 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) calculeu–ne el polinomi característic i els valors propis.

(b) Calculeu–ne els vectors propis i decidiu si diagonalitzen.

(c) En cas que la matriu A diagonalitzi, doneu una matriu M de manera que $M^{-1}AM$ és diagonal. Doneu també la matriu diagonal resultant.

44.- (a) Donades $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, trobeu A^{1001}, B^{1000} i C^{999}.

(b) Busqueu els valors propis de $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -3 \end{pmatrix}$, i calculeu A^{1000} sense trobar els vectors propis.

45.- Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determineu si els plans $y+z=0$, $x-y=0$ i $x+y+z=0$ són invariants per l'aplicació lineal $x \mapsto A \cdot x$.