

MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2008-2009

Equacions Diferencials

54.- Resoleu les següents equacions diferencials de variables separades:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y' = \frac{1-x}{1+y}, & \text{(b)} & y' = \frac{x^2 e^x}{y-a}, & \text{(c)} & y' = \frac{1+x^2}{1+y^2}, \\ \text{(d)} & y' = -y \tan(x), & \text{(e)} & y' = -\frac{(y+1)^2}{yx^2-y}, & \text{(f)} & y' = x\sqrt{1-y^2}. \end{array}$$

55.- Resoleu les següents equacions diferencials exactes:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & (y-x^3)dx + (x+y^3)dy = 0, & \text{(b)} & (\sin x \sin y - x e^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx, \\ \text{(c)} & (4x^3 y^3 - 2xy) + (3x^4 y^2 - x^2) \frac{dy}{dx} = 0, & \text{(d)} & 2x \sin y + y^3 e^x + (x^2 \cos y + 3y^2 e^x) \frac{dy}{dx} = 0. \end{array}$$

56.- Resoleu les següents equacions diferencials lineals:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y' + y = e^{3x}, & \text{(b)} & y' + 2xy = x^3, \\ \text{(c)} & y' = -2\frac{y}{x} - 2x, & \text{(d)} & y' = \tan(x)y - \cos(x). \end{array}$$

57.- Resoleu les següents equacions diferencials:

$$\text{(a)} \quad y \cos(x) + 2x e^y + (\sin(x) + x^2 e^y + 2)y' = 0, \quad \text{(b)} \quad y' - 2xy = 2x e^{x^2}, \quad \text{(c)} \quad y' = e^{2x+5y}.$$

58.- Trobeu la solució general de les equacions diferencials de segon ordre $x'' - 4x' + 5x = f(t)$, pels casos següents:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(t) = 0, & \text{(b)} & f(t) = e^t, & \text{(c)} & f(t) = t e^{2t}, \\ \text{(d)} & f(t) = 3e^t + 2t e^{2t}, & \text{(e)} & f(t) = e^t + e^{-t}, & \text{(f)} & f(t) = e^{2t}(\cos t + 3 \sin t), \end{array}$$

59.- Trobeu la solució general de les equacions diferencials de segon ordre següents:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x'' + 5x' + 4x = 3 - 2t, & \text{(b)} & x'' - 2x' = t^2 + 2t - 1, \\ \text{(c)} & x'' - x' - 2x = 2e^{3t}, & \text{(d)} & 3x'' + 2x' - x = 2 \sin t. \end{array}$$

60.- Trobeu la solució general de les equacions diferencials següents:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = 0, & \text{(b)} & x^{(3)} - x'' - 8x' + 12x = 0, \\ \text{(c)} & x^{(8)} - 8x^{(4)} + 16x = 0, & \text{(d)} & x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = e^t, \\ \text{(e)} & x^{(3)} - x' = e^t(t^2 - 1), & \text{(f)} & x^{(5)} - 4x^{(4)} + 4x^{(3)} = 240t^2 + 4e^{2t}. \end{array}$$

61.- Trobeu la solució de les següents equacions diferencials que satisfà les condicions inicials o de frontera fixades:

- (a) $x'' - 4x' + 5x = 0$, $x(\pi/2) = 1$, $x'(\pi/2) = 0$,
- (b) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$, $x(0) = x'(\pi/2) = 0$, $x'(0) = x(\pi/2) = 1$,
- (c) $x'' - 2x' - 3x = 6 - 8e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$,
- (d) $x'' + 6x' + 10x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$,
- (e) $x''' - x'' + x' - x = 12te^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,
- (f) $x'' + 2x' + x = 9te^{2t}$, $x(0) = \frac{1}{3}$, $x'(0) = \frac{4}{3}$.

62.- Calculeu la solució general dels següents sistemes d'equacions diferencials:

- (a) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 3x + y \end{cases}$
- (d) $\begin{cases} x' = y + 6t \\ y' = 4x - 2 \end{cases}$
- (e) $\begin{cases} x' = -x - y + 2e^{-t} \\ y' = 4x - y \end{cases}$
- (f) $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = y - 2x \\ z' = -2z \end{cases}$
- (g) $\begin{cases} x' = x - z + t \\ y' = 2y - 2t^2 \\ z' = x + z + 2 \end{cases}$

Trobeu una equació diferencial a coeficients constants equivalent als sistemes d'equacions diferencials anteriors.

Nota: Els següents exercicis són exemples d'aplicació de la teoria de les equacions diferencials que complementen el que s'ha fet durant el curs.

63.- La caiguda de tensió a través de l'inductor és $L \frac{di}{dt}$, la caiguda de tensió a través de la resistència és $Ri = R \frac{di}{dt}$ i la caiguda de tensió a través del condensador és $\frac{1}{C}q$. En un circuit RLC forçat per una font externa, $E(t)$, la caiguda de tensió, $V(t)$, a través del condensador compleix l'equació diferencial

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V(t) = E(t).$$

- (a) Trobeu la càrrega del condensador en un circuit RLC per temps $t = 0.01s$ quan $R = 2\Omega$, $L = 0.05h$, $C = 0.01f$, $E(t) = 0V$, $q(0) = 5C$ i $i(0) = 0A$. Quin és el primer moment pel que la càrrega del condensador és zero?
- (b) Trobeu la càrrega del condensador, $q(t)$, i la intensitat de corrent, $i(t)$, en un circuit RLC on $R = 10\Omega$, $L = \frac{5}{3}h$, $C = \frac{1}{30}f$, $E(t) = 300V$, $q(0) = 0C$ i $i(0) = 0A$.

64.- L'equació d'un oscil·lador harmònic forçat té la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t)$$

on la funció $f(t)$ s'anomena funció de forçament.

- (a) Comproveu que en el cas que $p = 0$, $q = 9$ i $f(t) = e^{-t}$ no hi ha cap solució periòdica.
- (b) Quines són les solucions periòdiques si $p = 0$, $q = 2$ i $f(t) = \sin(t)$?
- (c) Quin és el comportament de l'amplitud en el cas $p = 0$, $q = 1$ i $f(t) = \sin(t)$?

- 65.- Segons la llei de refredament de Newton, la velocitat a la que es refreda una substància és proporcional a la diferència de temperatura entre la substància i l'ambient. Si la temperatura ambient és de 30°C i la substància es refreda de 100°C a 70°C en 15 minuts, en quin moment es trobarà a 40°C ?
- 66.- En un campus aïllat de 1000 estudiants, un estudiant que ha marxat durant el cap de setmana torna infectat per un virus. Si es suposa que la velocitat amb la que el virus es propaga és proporcional al producte entre el nombre d'estudiants contagiats i el de no contagiats, trobeu el nombre d'estudiants contagiats després de sis dies, si a més s'observa que després de quatre dies n'hi ha 50.
- 67.- Es bombeja cervesa amb un contingut d'alcohol del 6% per litre dins d'un dipòsit que inicialment conté 400L. de cervesa amb un 3% d'alcohol. La cervesa es bombeja a l'interior amb una velocitat de 3L. per minut, mentre que el líquid barrejat es bombeja a l'exterior amb una velocitat de 4L. per minut. Trobeu el número de litres d'alcohol que hi ha dins del dipòsit en un instant qualsevol. Quin és el percentatge d'alcohol que hi ha en el dipòsit després de 60 minuts? Quant trigarà a buidar-se el dipòsit?
- 68.- Per raons òbvies, la sala de dissecció d'un forense es manté freda a una temperatura constant de 5°C . Mentre es trobava realitzant l'autòpsia d'una víctima d'un assassinat, el mateix forense és assassinat, i el cos de la víctima robat. A les 10 del matí l'ajudant del forense troba el seu cadàver a una temperatura de 23°C . A les 12 del matí la seva temperatura és de 18.5°C . Si suposem que el forense tenia en vida la temperatura normal de 37°C , a quina hora va ser assassinat?