

MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2009-2010

Números complexos

1.- Siguin $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 - 3i$, $z_3 = \frac{1}{2} - i$, $z_4 = -5i$. Calculeu:

$$3z_1 + z_2, |z_1 \cdot z_2|, |z_1| \cdot |z_2|, |z_1 + z_2|, |z_1| + |z_2|, z_1 \cdot z_2 - z_3 \cdot z_4, |\bar{z}_1 - \bar{z}_2|^2, \frac{z_1 + 1}{1 - z_2}, \frac{z_2}{z_4 - \bar{z}_3}, (z_1 + z_3)^2 \cdot \bar{z}_1$$

2.- Donat el nombre complex $z = \frac{2-xi}{2+xi}$, trobeu un nombre real x per a què la part real de z sigui zero. Hi ha algun x tal que z només tingui part real? Quins són aquests z que s'obtenen?

3.- Convertiu de radians a graus i a l'inrevés els angles següents:

$$45^\circ, \pi \text{ rad}, 7\frac{\pi}{3} \text{ rad}, 240^\circ, 2 \text{ rad}, 136^\circ, 247^\circ, 23 \text{ rad}$$

4.- (a) Trobeu geomètricament, fent servir triangles, els valors de $\sin(\pi/4)$, $\cos(3\pi/4)$, $\tan(5\pi/4)$.

(b) Sabent que a 30m de distància la punta d'un arbre es veu en un angle de 60 graus, quina és l'alçada de l'arbre?

5.- Expresseu els nombres següents en forma polar:

$$3 + 4i, \quad 2 - i, \quad -3 + i, \quad -2 - 3i.$$

6.- Expresseu els següents nombres complexos en la forma $a + bi$:

$$e^{i\pi}, \quad e^{1/2+i\pi/4}, \quad e^{e^{2+i\pi/2}}.$$

7.- Calculeu:

$$i \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ \cdot \left(\cos\left(\frac{-\pi}{28}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{28}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{17\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{7}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{-85\pi}{28}\right) + i \sin\left(\frac{-85\pi}{28}\right)\right).$$

8.- Trobeu tots els complexos tals que el seu conjugat és el seu invers.

9.- Calculeu els nombres següents: $(1+i)^{29}$, $(-1+i)^{17}$, $(-\sqrt{3}+i)^{13}$. A més expresseu en la forma $x + iy$, on x i y són reals, els nombres:

$$(2 + 2i)^{12}, \quad (1 - i)^{36}, \quad (-\sqrt{3} - i)^{13}, \quad i^{1999}.$$

10.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$\begin{array}{lll} z^2 = i & z^4 = i & z^3 = 1 + \sqrt{3}i \\ z^6 = -1 + i & z^5 = -i & \end{array}$$

11.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$e^{3z-1} = i, \quad e^z = 1, \quad e^{2z} = 4$$

12.- Comproveu que $1+i$ i $1-i$ són arrels del polinomi $P_1(z) = 4 - 6z + 4z^2 - z^3$. Comproveu que mentre $1+i$ és arrel del polinomi $P_2(z) = (2+2i) - 3z - iz + z^2$, $1-i$ no ho és. (Recordeu que un número a és arrel d'un polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$.)

13.- (a) Trobeu totes les arrels dels següents polinomis:

$$p_1(z) = z^3 + (i-1)z^2 + (1-i)z - 1, \quad p_2(z) = z^2 + z + 1$$

$$p_3(z) = z^4 + z^2 + 1, \quad p_4(z) = z^4 + 2z^2 + 10$$

Indicació: En el primer cas, una de les arrels és natural.

(b) Trobeu totes les arrels del polinomi $4z^3 - (15+20i)z^2 - (4-75i)z + 20i$ sabent que té una arrel imaginària pura.

14.- (a) Considereu el polinomi $p(z) = z^4 + 2z^2 + 2$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu-les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu $p(z)$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

15.- (a) Considereu el polinomi $p(z) = 2z^5 + 2$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu-les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu $p(z)$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

16.- (a) Considereu el polinomi $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 2x + 4$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu-les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu $p(x)$ a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$.

17.- Factoritzeu els polinomis $p_1(z) = 2z^3 + 2z^2 + 3z + 3$ i $p_2(z) = -z^3 + 4z^2 - 6z + 4$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

Indicació: Tots dos polinomis tenen una arrel entera.

18.- Trobeu un polinomi a $\mathbb{C}[z]$ de grau 3 que tingui l'arrel -3 amb multiplicitat 2 i l'arrel i amb multiplicitat 1.

19.- Trobeu tots els punts z tals que $-1+i$, $-2+3i$ i z formen un triangle equilàter.

20.- Un quadrat té els vèrtexs al semi-pla superior. Si dos vèrtexs consecutius són $2+i$ i $5+3i$, quins són els altres dos?

21.- Siguin $z_1 = 0$, z_2 , z_3 , $z_4 = 2+3i$, z_5 , z_6 els vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular. Trobeu z_2 , z_3 , z_5 i z_6 . Quin és el centre de l'hexàgon?

22.- Trobeu les arrels de l'equació $z^2 - (2+5i)z - 6+6i = 0$. Quin és el modul i l'argument de cada una? Considereu el triangle que formen aquestes arrels amb l'origen de coordenades. Quina és l'àrea del triangle? Quin és el perímetre? És rectangle?

23.- Usant la Fórmula d'Euler doneu una fórmula per $\sin(7\alpha)$ en funció de $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ i $\cos(3\alpha)$.

24.- Trobeu totes les solucions de:

$$\sin(x) = 0, \sin(x) = e^{\pi/2} - 1, \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 25.- Recordem que, amb valors apropiats d' A , φ , c_1 i c_2 , l'expressió $A \sin(\omega t + \varphi)$ és equivalent a $c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$. A més, fixada ω , ambdues expressions són equivalents al fasor $F = A \exp(i\varphi)$.
- (a) Donats els següents parells de c_1 i c_2 , calculeu A , φ i el fasor associat: (1) $c_1 = 5$, $c_2 = 7$. (2) $c_1 = -5$, $c_2 = 4$. (3) $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = -2.5$. (4) $c_1 = \sqrt{3}$, $c_2 = 0$. (5) $c_1 = 0$, $c_2 = 2\sqrt{2}$. (6) $c_1 = -1$, $c_2 = -1$.
- (b) Donats els següents parells de A , φ , calculeu c_1 i c_2 i el fasor associat: (1) $A = 7$, $\varphi = 3\pi/7$. (2) $A = 2$, $\varphi = 4.54$. (3) $A = 0.5$, $\varphi = -\pi/4$. (4) $A = 2/\sqrt{2}$, $\varphi = 5\pi/6$.
- (c) Donats els fasors F següents, calculeu c_1 , c_2 , A i φ : (1) $F = 2 + 3i$. (2) $F = 4 - 4i$. (3) $F = \sqrt{3}$. (4) $F = -2i$. (5) $F = -7 + 2i$. (6) $F = -(2 + i)$. (7) $F = 2_{3\pi/11}$. (8) $F = 5_{3.96}$. (9) $F = 0.46_{-\pi/7}$. (10) $F = 2\sqrt{2}_{5\pi/7}$.
- 26.- Un fasor $F \in \mathbb{C}$ es pot escriure de la forma $A \exp(i\varphi)$ on A és l'amplitud i φ és el defassament. Donat el fasor $F = -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, trobeu l'amplitud i el defassament de F^3 i de $\frac{1}{F}$.
- 27.- Digueu si les següents funcions són periòdiques o no (en cas afirmatiu, digueu el període fonamental):
- (a) $\sin(\sqrt{2}t) + \cos t$,
 (b) $5 \sin(3t) + 7 \cos(5t)$,
 (c) $\sin t + 4 \cos(2et)$,
 (d) $4 \sin(3t) - \sin(7t)$,
 (e) $4 \sin(3\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t)$,
 (f) $\sin(\sqrt{2\pi}t) + \cos t$,
 (g) $-\sin(4t) + 2 \cos(8t)$.
- 28.- Expresseu l'ona $3 \cos(\omega t) - \sqrt{3} \sin(\omega t)$ com una ona sinusoidal elemental trobant el fasor corresponent.
- 29.- Quina és la freqüència de $\sin(4t + \pi) + \cos(4t - 5\pi) + \sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)$? Escriviu-la com a ona elemental.
- 30.- Considereu l'ona $\sqrt{2} \cos(\omega_1 t) - 2 \sin(\omega_2 t) + 4 \sin(\omega_3 t)$ que és suma d'ones sinusoidals. Pels següents valors de ω_1 , ω_2 i ω_3 digueu si es tracta d'una ona sinusoidal elemental, i si és periòdica o no. En cas de ser periòdica, trobeu el període fonamental.
- (a) $\omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\omega_3 = \sqrt{7}$.
 (b) $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, $\omega_2 = \omega_3 = \frac{3}{\sqrt{7}}$.