

MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2009-2010

Àlgebra Lineal

31.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculeu $A \cdot B$, $B \cdot A$ i $2A - 3B$.

32.- (a) Trobeu una matriu C tal que $2C + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Calculeu les matrius A i B que verifiquen

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}, \quad 5A - 3B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -30 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

33.- Doneu la forma reduïda per files, usant el mètode de Gauss, de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & -6 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & 8 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Quin és el rang de cadascuna d'elles?

34.- Trobeu la matriu associada dels sistemes:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 28 \end{cases}$$
$$(c) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 3 \\ 4y + x + 5z + 2t = 2 \\ 2x + 8z + 9y + 3t = 12 \\ 3x + 7y + 7z + 2t = 20 \end{cases}$$
$$(e) \begin{cases} 4x + 4y - 2z + 2t = 2 \\ 16x - 4y + 8z - 4t = 4 \end{cases}$$

Trianguleu la matriu obtinguda i estudeu la compatibilitat del sistema. En el cas que existeixi solució, trobeu-la.

35.- Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té grau de llibertat 2,

$$\left. \begin{array}{rcl} 4x - y + z + 2t + 2u & = & 1 \\ y + z - 2u & = & 1 \\ 2x + z + t & = & 1 \\ x - y + t + 2u & = & 0 \\ 5x + y + 3z + 2t - 2u & = & 3 \end{array} \right\}$$

Sense calcular les solucions explícitament contesteu les següents preguntes:

(a) Quin és el número màxim d'equacions independents?

(b) És la segona equació combinació de les altres? i la quarta?

(c) Hi ha alguna solució amb $x = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$? i amb $y = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$?

36.- Estudieu la compatibilitat segons el valor de λ i μ i solucioneu (si es pot) els sistemes:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x & -2y & -\lambda z & -\lambda t & = & 1 - \lambda \\ 2x & +(2\lambda - 4)y & +(3 - 2\lambda)z & -\lambda t & = & 1 \\ -2x & +(4 - \lambda)y & +(2\lambda - 4)z & +3\lambda t & = & -\lambda \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad & \begin{cases} x & +3y & +\lambda z & -\lambda t & = & 1 - \lambda \\ 2x & +6y & -2z & -2(3 + \lambda)t & = & -2\lambda \\ (1 + \lambda)x & +(3 + 3\lambda)y & +(\lambda + \lambda^2)z & & = & 1 + \lambda - \lambda^2 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} 5x & -3y & +2z & +4t & = & 3 \\ 4x & -2y & +3z & +7t & = & 1 \\ 8x & -6y & -z & -5t & = & 9 \\ 7x & -3y & +7z & +17t & = & \lambda \end{cases} \quad \text{(d)} \quad \begin{cases} 2x + \lambda y + z & = & 0 \\ 2x - 2y + z & = & 0 \\ \mu x + 2y - 4z & = & 0 \\ 4x + 2y + 7z & = & 0 \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad & \begin{cases} -2x & -2y & +2z & +4t & -4u & = & 2 \\ 2x & +2y & +2z & +4t & +2u & = & 2 \\ 2x & -2y & +2z & -2t & +2u & = & 2 \\ 2x & +2y & +4z & +4\lambda t & +\frac{1}{2}\lambda u & = & -4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

37.- (a) Estudieu la posició relativa de les rectes següents:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 & = & 0 \\ x - 2y + z - 3 & = & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y - 3z - 2 & = & 0 \\ x + y + z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

(b) Estudieu la posició relativa de la recta i el pla següents:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 3, 4) \\ 2x - 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 3, 4) \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

38.- Calculeu la inversa (quan sigui possible) de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

39.- Resoleu les següents equacions matricials, és a dir, trobeu una matriu X que satisfaci les següents equacions amb matrius:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \\
 \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

40.- Calculeu els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

41.- És el vector b combinació lineal dels a_i ? En cas afirmatiu, expresseu b com a combinació lineal de a_1 , a_2 i a_3 .

- (a) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$; $b = (7, -2, 1)$.
 (b) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$; $b = (5, 9, 0)$.

42.- Troba la dimensió i una base dels subespais vectorials següents:

- (a) $\langle (1, 0, -1), (-2, 0, 3), (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.
 (b) $\langle (1, 2, 3), (-1, 0, 2), (1, 3, 0), (0, 0, 2) \rangle$.
 (c) $\langle (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 7) \rangle$.
 (d) $\langle (1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 9), (2, 1, -1, 10) \rangle$.
 (e) $\langle (0, 1, -1, 1), (1, 2, 5, -1), (1, 3, 4, 0) \rangle$.

43.- Donades les matrius següents:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{(c)} \begin{pmatrix} -5 & 7 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ -8 & 8 & -4 \end{pmatrix} \\ \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} & \text{(f)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- (a) calculeu-ne el polinomi característic i els valors propis.
 (b) Calculeu-ne els vectors propis i decidiu si diagonalitzen.
 (c) En cas que la matriu A diagonalitzi, doneu una matriu M de manera que $M^{-1}AM$ és diagonal. Doneu també la matriu diagonal resultant.
- 44.- (a) Donades $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, trobeu A^{1001} , B^{1000} i C^{999} .
 (b) Busqueu els valors propis de $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -3 \end{pmatrix}$, i calculeu A^{1000} sense trobar els vectors propis.

45.- Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determineu si els plans $y + z = 0$, $x - y = 0$ i $x + y + z = 0$ són invariants per l'aplicació lineal $x \mapsto A \cdot x$.