Journal of Algebra **249,** 512–527 (2002)
doi:10.1006/jabr.2001.9077, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Extensions verselles et automorphismes des groupes nilpotents libres

Wolfgang Pitsch

Université Paris 7-Denis Diderot, UFR de Mathématiques, Case 7012, 2, place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France
E-mail: pitsch@math.jussieu.fr

Communicated by Michel Broué

Received April 6, 2001

Nous montrons que si L est un groupe libre de rang $2n$ supérieur ou égal à 2, alors la surjection canonique $\operatorname{Aut} L \longrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{Z})$ n'est pas scindable.

Key Words: automorphismes du groupe libre; groupes nilpotents; groupe de Heisenberg.

1. INTRODUCTION

Soit L un groupe libre de rang fini pair $2n \geq 2$. Les termes de sa série centrale descendante, définis par $\Gamma_0 = L$ et $\Gamma_{k+1} = [L, \Gamma_k]$ pour $k \geq 1$, sont des sous-groupes invariants par tout automorphisme; si nous désignons par N_k les quotients nilpotents successifs L/Γ_k, la projection canonique $L \longrightarrow N_k$ induit alors des morphismes $\operatorname{Aut} L \longrightarrow \operatorname{Aut} N_k$. Nielsen [N-2] et Magnus [Ma] ont montré que ces applications sont surjectives pour $k = 1$ et 2, et dans [Ba], Bachmuth a montré que ces cas sont les seuls pour lesquels il y ait surjectivité. Cet article a pour objet la démonstration du résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit L un groupe libre de rang pair $2n \geq 2$, la surjection $\operatorname{Aut} L \longrightarrow \operatorname{Aut} N_1$ n'est jamais scindée.*

Dans la première partie nous montrons que le groupe N_{k+1} est l'extension verselle (cf. Section 2) de N_k et nous en déduisons la surjectivité du morphisme $\operatorname{Aut} N_{k+1} \longrightarrow \operatorname{Aut} N_k$. Dans la deuxième partie nous montrons que la surjection $\operatorname{Aut} N_2 \longrightarrow \operatorname{Aut} N_1$ n'est pas scindable si le rang de L est

0021-8693/02 $35.00

strictement plus grand que 2, ce qui, dans ce cas, implique l'énoncé du Théorème 1. Ensuite nous nous intéressons au cas d'un groupe libre de rang 2. Le groupe N_2 est alors isomorphe au groupe de Heisenberg, dont les éléments sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } * \in \mathbf{Z};$$

la surjection $\operatorname{Aut} N_2 \longrightarrow \operatorname{Aut} N_1$ est alors scindable, ce qui nous permet d'expliciter une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ sur le groupe de Heisenberg. Par contre, nous montrons que la surjection $\operatorname{Aut} N_3 \longrightarrow \operatorname{Aut} N_1$ n'est pas scindable, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

Nous désignerons par $\mathrm{H}_* G$ l'homologie d'un groupe G à coefficients dans le G-module trivial $\mathbf{Z}$. Les extensions de groupes ou de modules seront désignés par des lettres entre parenthèses $(-)$; leur classe de cohomologie sera désignée par la même lettre mais entre crochets $[-]$.

Remarque 1. La source de cet article est un travail portant sur les difféomorphismes des surfaces, ce qui explique que l'on s'intéresse aux groupes libres de rang pair. On peut, en fait, montrer un peu plus que ce que nous exposons ici, à savoir que, sans restriction de parité, si L est libre de rang ≥ 2, ni les surjections $\operatorname{Aut} N_{k+1} \longrightarrow \operatorname{Aut} N_k$ pour $k \geq 2$, ni la surjection $\operatorname{Aut} L \longrightarrow \operatorname{Aut} N_1$ ne sont scindables. Comme les démonstrations de ces résultats sont pour l'essentiel des prolongements techniques un peu longs de celles que nous exposons, pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [Pit].

2. COMPARAISON DE AUT N_{K+1} ET DE AUT N_K

Dans la suite exacte $0 \longrightarrow \Gamma_k/\Gamma_{k+1} \longrightarrow N_{k+1} \longrightarrow N_k \longrightarrow 1$, le groupe abélien Γ_k/Γ_{k+1} est le centre de N_{k+1}. Il en résulte que tout automorphisme de N_{k+1} induit un automorphisme de N_k. Désignons par $\rho_k \colon \operatorname{Aut} N_{k+1} \longrightarrow \operatorname{Aut} N_k$ le morphisme induit. L'objet de cette partie est la démonstration du

THÉORÈME 2. *Pour tout $k \geq 1$, le morphisme ρ_k*: $\operatorname{Aut} N_{k+1} \longrightarrow \operatorname{Aut} N_k$ *est surjectif.*

EXTENSIONS VERSELLES. Soit G un groupe dont l'abélianisé $\mathrm{H}_1 G$ est un $\mathbf{Z}$-module libre. Désignons par

$$v \in \mathrm{H}^2(G, \mathrm{H}_2 G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\mathrm{H}_2 G, \mathrm{H}_2 G)$$

la préimage de l'identité et par (v) $0 \longrightarrow \mathrm{H}_2 G \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ une extension centrale qui lui correspond. Une extension isomorphe à (v) sera appelée une extension verselle (de G).

LEMME 1. *Soit* $\phi\colon G \longrightarrow G$ *un automorphisme. Les deux éléments* $\phi^*(v)$ *et* $(\mathrm{H}_2\phi)_*(v) \in \mathrm{H}^2(G, \mathrm{H}_2G)$ *sont égaux.*

Démonstration. Par construction, l'isomorphisme des coefficients universels $\mathrm{H}^2(G, \mathrm{H}_2G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_2G, \mathrm{H}_2G)$ envoie ces deux éléments respectivement sur $\phi \circ Id_{\mathrm{H}_2G} = \phi$ et sur $Id_{\mathrm{H}_2G} \circ \phi = \phi$. ∎

Le lemme ci-dessus implique l'existence pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}\, G$ d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_2G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}_2\phi"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_2G \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où l'automorphisme ψ n'est en général pas unique. En particulier tout automorphisme de G est induit par un automorphisme de E.

APPLICATION. Soit $k \geq 1$ et $G = N_k$. Dans ce cas $\mathrm{H}_1G = N_1$ est bien un $\mathbf{Z}$-module libre. D'autre part la présentation de N_k: $1 \longrightarrow \Gamma_k \longrightarrow L \longrightarrow N_k \longrightarrow 1$ fournit l'isomorphisme de Hopf h: $\mathrm{H}_2N_k \xrightarrow{\sim} [L, L] \cap \Gamma_k/[L, \Gamma_k] = \Gamma_k/\Gamma_{k+1}$. L'extension centrale $0 \to \Gamma_k/\Gamma_{k+1} \longrightarrow N_{k+1} \to N_k \longrightarrow 1\,(v_k)$ induit un morphisme e: $\mathrm{H}_2N_k \longrightarrow \Gamma_k/\Gamma_{k+1}$ qu'on vérifie être tautologiquement h. Cette dernière extension s'identifie donc via h à l'extension verselle de N_k; le théorème en résulte alors grâce à l'interprétation du Lemme 1.

PROPOSITION 1. *Le noyau de* ρ_k *est isomorphe à* $\mathrm{Hom}(N_1, \mathrm{H}_2N_k)$, *nous avons donc une extension*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathrm{H}_2N_k) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N_{k+1} \xrightarrow{\rho_k} \mathrm{Aut}\, N_k \longrightarrow 1 (A_k).$$

Démonstration. Le noyau $\ker\rho_k$ est l'ensemble des automorphismes de N_{k+1} qui induisent l'identité sur N_k et donc aussi sur H_2N_k. Ils sont donc de la forme $n_{k+1} \mapsto f(\bar{n}_{k+1}) \cdot n_{k+1}$ où f appartient à $\mathrm{Hom}(N_k, \mathrm{H}_2N_k)$ et $\bar{n}_{k+1}$ est la classe de n_{k+1} dans N_k. Puisque H_2N_k est abélien, un tel f se factorise de manière unique par $\mathrm{H}_1N_k = N_1$. ∎

3. ÉTUDE DE AUT $N_2 \longrightarrow$ AUT N_1

Comme le groupe L est de rang pair $2n$, son abélianisé N_1 est isomorphe à $\mathbf{Z}^{2n}$ et nous pouvons fixer une forme symplectique ω sur N_1. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_1/\Gamma_2 = \Lambda^2 N_1 \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] & \overline{N}_2 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

La première ligne est une extension verselle (v_1) de N_1, et la seconde son push-out par ω que nous désignerons par $(\omega_* v_1)$. Comme la classe du push-out dans $\mathrm{H}^2(N_1, \mathbf{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\Lambda^2 N_1, \mathbf{Z})$ est ω, qui est une forme non-dégénérée, le centre de $\overline{N}_2$ est $\mathbf{Z}$. Le centre d'un groupe étant caractéristique, nous avons finalement un morphisme induit $\mathrm{Aut}\, \overline{N}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N_1$. Désignons les préimages du groupe symplectique $\mathrm{Sp}\, \omega \subset \mathrm{Aut}\, N_1$ dans $\mathrm{Aut}\, \overline{N}_2$ par $\mathrm{Aut}^+ \overline{N}_2$ et dans $\mathrm{Aut}\, N_2$ par $\mathrm{Aut}^+ N_2$, nous avons deux suites exactes,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \Lambda^2 N_1) \longrightarrow \mathrm{Aut}^+ N_2 \longrightarrow \mathrm{Sp}\, \omega \longrightarrow 1 \quad (e),$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}^+ \overline{N}_2 \longrightarrow \mathrm{Sp}\, \omega \longrightarrow 1 \quad (\bar{e}).$$

L'extension (e) est obtenue par restriction de l'extension (A_1), et on vérifie que l'extension $(\bar{e})$ est bien sûr isomorphe au push-out de l'extension (e) par l'application $\mathrm{Hom}(N_1, \Lambda^2 N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})$ induite par ω.

En particulier, si la surjection $\mathrm{Aut}\, N_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N_1$ se scinde, par restriction, l'extension (e) aussi, et par push-out il en est de même de l'extension $(\bar{e})$. Le théorème suivant et son corollaire montrent que la condition de scindabilité de $(\bar{e})$ est suffisament restrictive pour nous permettre de conclure dans tous les cas, sauf un.

THÉORÈME 3. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $(\bar{e})$ *est scindable*.

(ii) *Il existe une forme quadratique* q: $N_1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *associée à la réduction modulo* 2 *de* ω *invariante par* $\mathrm{Sp}\, \omega$.

COROLLAIRE 1. *Soit* L *un groupe libre de rang* $2n \geq 2$.

(i) *Pour* $n > 1$, *la surjection* $\mathrm{Aut}\, L \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N_1$ *n'est pas scindable*.

(ii) *Pour* $n = 1$, *la surjection* $\mathrm{Aut}^+ N_2 \longrightarrow \mathrm{Sp}\, \omega$ *est scindable*.

Démonstration. Si q désigne une forme quadratique associée à la réduction modulo 2 de ω, la valeur de $q(w)$ pour $w \in N_1$ ne dépend que de la classe de w dans $N_1/2N_1$ qui est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Le groupe $\mathrm{Sp}\, \omega$ agit transitivement sur les vecteurs non nuls de cet espace et, par conséquent, une forme quadratique q est invariante si et seulement si elle est constante sur les vecteurs non nuls.

Si $n > 1$, nous pouvons trouver trois éléments linéairement indépendents a_1, a_2, b dans $N_1/2N_1$ tels que $\omega(a_i, b) = \delta_{i1}$ et $\omega(a_1, a_2) = 0$. En développant $q(a_1 + a_2 + b)$, nous obtenons $q(a_1 + a_2 + b) = q(a_1) + q(a_2) + q(b) + 1$ donc q ne peut pas être invariante, et par le théorème $(\bar{e})$ n'est pas scindable, ce qui démontre le premier point.

Si $n = 1$, alors $\Lambda^2 N_1 \simeq \mathbf{Z}$, ω: $\Lambda^2 N_1 \longrightarrow \mathbf{Z}$ est l'identité et donc $(e) = (\bar{e})$. L'application qui vaut 1 sur les trois vecteurs non nuls de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et 0 sur le vecteur nul, est bien une forme quadratique invariante et, d'après le théorème, $\mathrm{Aut}^+ N_2 \longrightarrow \mathrm{Sp}^+ \omega$ est scindable. ∎

3.1. *Démonstration du Théorème* 3

L'idée de cette démonstration est d'identifier la classe de l'extension $(\bar{e})$ comme étant l'image par l'application bord d'une (unique) classe $\iota_\omega \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, N_1/2N_1))$, qui par construction est nulle si et seulement si la condition (ii) du théorème est vérifiée.

3.1.1. *Étape* 1: *Injectivité de l'application bord*

Par définition, le noyau de l'application bord

$$\delta\colon \mathrm{H}^1(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))$$

est le groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))$, montrons donc que

Lemme 2. *Le groupe* $\mathrm{H}^1(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))$ *est nul.*

Démonstration. Considérons un morphisme croisé f: $\mathrm{Sp}\,\omega \to \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})$ et identifions $\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})$ et N_1 comme $\mathrm{Sp}\,\omega$-modules via la forme ω. Le groupe $\mathrm{Sp}\,\omega$ est engendré par les transvections t_h, où $h \in N_1$, et la commutation de t_h avec $-Id$ donne pour tout $h \in N_1$:

$$2f(t_h) = \omega(f(-Id), h)h.$$

Ceci implique que $f(-Id)$ est divisible par 2, soit $\eta = 1/2f(-Id)$. L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$\begin{aligned} f(t_h) &= \omega(\eta, h)h, \\ &= -(t_h(\eta) - \eta). \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est principal. ∎

3.1.2. *Étape* 2: *Définition de* ι_ω

Soit G un groupe et $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Aff}(A)$ une représentation affine (à droite) de G, où A désigne un espace affine d'espace vectoriel associé E. Pour chaque $a \in A$, définissons $f_a: G \longrightarrow E$ par $f_a(g) = a \cdot \rho(g) - a$. Des propriétés générales des morphismes croisés (cf., par exemple, [Br, ch. IV]) on déduit:

PROPOSITION 2. *L'application* f_a *est un morphisme croisé*, *sa classe* $f_\rho \in \mathrm{H}^1(G, E)$ *est indépendante du point a choisi*. *De plus*,

$$f_\rho = 0 \Longleftrightarrow \textit{l'action de G sur A admet un point fixe.}$$

Désignons par $\mathcal{Q}(N_1)$ l'ensemble des formes quadratiques $q: N_1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ associées à la réduction modulo 2 de ω. $\mathcal{Q}(N_1)$ est un espace affine sous-tendu par $\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Le groupe $\mathrm{Sp}\,\omega$ agit de manière affine sur $\mathcal{Q}(N_1)$; désignons par $\iota_\omega \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, N_1/2N_1))$ l'élément défini par la Proposition 2.

3.1.3. *Étape* 3: *Identification de* $(\bar{e})$ *est de* $\delta(\iota_\omega)$

THÉORÈME 4. *La classe de l'extension* $(\bar{e}) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))$ *est l'image de* ι_ω *par l'application bord induite par la suite exacte de* $\mathrm{Sp}\,\omega$-*modules*:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\times 2} \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Sp}\,\omega}(\mathbf{Z}, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{Sp}\,\omega, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))$ la classe de $(\bar{e})$ est celle de l'extension de $\mathrm{Sp}\,\omega$-modules suivante (cf. [McL, ch. IV] pour une description de l'isomorphisme ou [Pit, annexe A] pour une preuve),

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \longrightarrow \{N_1, \mathbf{Z}\} \xrightarrow{\partial} C_{\omega_* v_1} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \quad (\overline{E})$$

où $\{N_1, \mathbf{Z}\}$ désigne l'ensemble de fonctions $N_1 \longrightarrow \mathbf{Z}$ et $C_{\omega_* v_1}$ l'ensemble des 2-cocycles qui représentent les classes des multiples de $(\omega_* v_1)$; le morphisme ∂ est donné par $\partial F(u, v) = F(u) + F(v) - F(u + v)$ et le morphisme $C_{\omega_* v_1} \longrightarrow \mathbf{Z}$ par l'application qui à un cocycle associe l'opposé de sa classe. Cette extension se décompose en deux suites exactes courtes de $\mathrm{Sp}\,\omega$-modules,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \longrightarrow \{N_1, \mathbf{Z}\} \longrightarrow \tfrac{\{N_1, \mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})} \longrightarrow 0 \quad (e_1),$$

$$0 \longrightarrow \tfrac{\{N_1, \mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})} \xrightarrow{\partial} C_{\omega_* v_1} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \quad (e_2).$$

En d'autres termes, la suite exacte $(\overline{E})$ est l'image de la suite exacte courte (e_2) par le morphisme δ_h associé à l'extension (e_1): $\delta_h: \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Sp}\,\omega}([\{N_1, \mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})], \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Sp}\,\omega}(\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$.

Identifions la classe $[e_2] \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Sp}\,\omega, \{N_1, \mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))$ correspondant à l'extension (e_2).

Les formes quadratiques associées à la réduction modulo 2 de ω definissent une unique classe $[q] \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Sp}\,\omega, \{N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))$, et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \arrow[r, "\times 2"] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \arrow[r] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \arrow[r] \arrow[u, equal] & C_{\omega_* v_1} \arrow[r] \arrow[u, "\mu"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que $[e_2] = \delta_d[q]$ où δ_d désigne le bord associé à:

$$0 \longrightarrow \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \xrightarrow{\times 2} \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \longrightarrow \frac{\{N_1,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})} \longrightarrow 0.$$

Le morphisme $\mu\colon C_{\omega_* v_1} \longrightarrow \{N_1, \mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})$ est défini comme suit: soit $c \in C_{\omega_* v_1}$, comme ω est un cocycle qui représente $2\omega_* v_1$, il existe un unique $n \in \mathbf{Z}$ et une unique classe $I_c \in \{N_1, \mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})$ tels que $2c = n\omega + \partial I_c$, on pose alors $\mu(c) = I_c$.

En effet, comme $H^2(N_1; \mathbf{Z})$ est sans torsion, le morphisme $C_{\omega_* v_1} \longrightarrow \mathbf{Z}$ est également donné par $c \mapsto n$ si $2c = n\omega + \partial I_c$; en particulier, a classe de la réduction modulo 2 de I_c pour c représentant $\omega_* v_1$ est la classe dans $\{N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ d'une forme quadratique associée à la réduction modulo 2 de ω.

Par conséquent:

$$[\overline{E}] = \delta_h \circ \delta_d([q]).$$

Considérons le diagramme suivant, où les lignes et les colonnes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\times 2"] & \{N_1, \mathbf{Z}\} \arrow[r] \arrow[d, "\times 2"] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \arrow[r] \arrow[d, "\times 2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \{N_1, \mathbf{Z}\} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z})} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \{N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\{N_1,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})} \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si on désigne par δ_h, δ_b, δ_d, δ_g les bords associés aux lignes haut et bas, et aux colonnes droite et gauche, respectivement, alors (cf. [C-E]),

$$\delta_h \circ \delta_d = -\delta_g \circ \delta_b,$$

donc $[\overline{E}] = \delta_h \circ \delta_d([q]) = -\delta_g \circ \delta_b([q])$.

Reste à montrer que $-\delta_b([q]) = \iota_\omega$ (le signe n'a pas d'importance ici car les modules en jeu sont des $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels).

Par définition, une extension représentant $-\delta_b([q])$ est obtenue en effectuant le pull-back de

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow \{N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\} \longrightarrow \frac{\{N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})} \longrightarrow 0 \quad (b)$$

le long du morphisme $\mathbf{Z} \longrightarrow \{N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}/\mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})$ qui à 1 associe $-[q]$ ($=[q]$). L'extension ainsi obtenue représente un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Sp}\,\omega}(\mathbf{Z}, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))$, qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^1(\mathrm{Sp}\,\omega; \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))$. Comme l'extension (b) est scindée sur $\mathbf{Z}$, un 1-cocycle (i.e., un morphisme croisé) représentant la classe de cohomologie est donné par $g \mapsto \sigma([g]) \cdot g - \sigma([q])$, où σ est une $\mathbf{Z}$-section arbitraire de (b). Par construction, $\sigma([q])$ est alors une forme quadratique associée à la réduction modulo 2 de ω et, d'après la construction précédant la Proposition 2.1, $-\delta_b([q]) = \iota_\omega$. ∎

3.1.4. *Récapitulation*

Par le Théorème 4, $(\bar{e})$ est scindable si et seulement si $\delta(\iota_\omega) = 0$, i.e., si et seulement si $\iota_\omega = 0$. La Proposition 2 dit alors que cette dernière condition est équivalente à l'existence d'une forme quadratique associée à la réduction modulo 2 de ω invariante par $\mathrm{Sp}\,\omega$.

4. LE CAS DU GROUPE LIBRE DE RANG 2

Soit x, y une base d'un groupe libre de rang $2L$, dont l'image dans N_1 est une base symplectique a, b pour la forme ω. Le choix de cette base induit des isomorphismes $N_1 \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ et $\mathrm{Sp}\,\omega \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Le groupe d'homologie $\mathrm{H}_2 N_1 \simeq \Lambda^2 N_1$ est alors isomorphe à $\mathbf{Z}$, engendré par $a \wedge b$ et le morphisme induit par la forme symplectique $\Lambda^2 N_1 \longrightarrow \mathbf{Z}$ est l'identité. De ce fait, l'extension $(\tilde{e})$ construite dans la section précédente est encore l'extension (e)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(N_1, \Lambda^2 N_1) \longrightarrow \mathrm{Aut}^+ N_2 \longrightarrow \mathrm{Sp}\,\omega = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow 1$$

et le Corollaire 1 nous affirme qu'elle est scindable. On peut alors se demander si la scindabilité de (e) implique celle du morphisme ρ_1: $\mathrm{Aut}\,N_2 \to \mathrm{Aut}\,N_1$. Considérons l'extension classique:

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\det} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 1.$$

Comme $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2\mathbf{Z}, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})) = 0$ (Lemme 2) et $\mathrm{H}^0(\mathrm{SL}_2\mathbf{Z}, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})) = \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})^{\mathrm{SL}_2\mathbf{Z}} = 0$, la suite spectrale de Hochschild–Serre montre que

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{GL}_2\mathbf{Z}, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z})) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2\mathbf{Z}, \mathrm{Hom}(N_1, \mathbf{Z}))^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}},$$

où l'isomorphisme est induit par l'inclusion $\mathrm{SL}_2\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}_2\mathbf{Z}$. En particulier, la scindabilité de (e) implique bien celle de ρ_1. Ci-dessous nous décrivons explicitement une action de $\mathrm{SL}_2\mathbf{Z}$ sur $\mathscr{H}$, ainsi que son extension à $\mathrm{GL}_2\mathbf{Z}$.

4.1. *Action de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *sur le groupe de Heisenberg*

Rappelons que le groupe de Heisenberg $\mathscr{H}$ est le groupe multiplicatif des matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La projection sur la sur-diagonale s'identifie à la surjection de $\mathscr{H}$ sur son abélianisé et induit une suite exacte: $0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow 0$ dont un cocycle est donné par $\alpha((n, m), (n', m')) = nm'$.

Rappelons que si G est un groupe abélien et A un G-module trivial, le morphisme $\mathrm{H}^2(G; A) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 G, A)$ est donné par $[c] \mapsto (x \wedge y \mapsto c(x, y) - c(y, x))$, où c désigne un cocycle arbitraire représentant la classe $[c]$ [Br, ch. IV]. Comme l'antisymétrisée de α dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 N_1, \mathbf{Z})$ est égale à ω, l'extension ci-dessus est une extension verselle de N_1; en particulier, $\mathscr{H}$ est isomorphe à N_2. Connaissant explicitement le cocycle α, il est possible de donner une formule exacte pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2\mathbf{Z}$: elle est nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u & t \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & au + bv & t + \phi(u, v) \\ 0 & 1 & cu + dv \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver les conditions sur ϕ, il reste alors à imposer que ceci soit un morphisme de groupes et une action.

Par exemple, la formule (ACT) ci-dessous convient:

$$(ACT) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u & t \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & au+bv & t+1/2[(1-a-c)u+(1-b-d)v+acu^2+bdv^2-(1-bc-ad)uv] \\ 0 & 1 & cu+dv \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est isomorphe à l'amalgame $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, où $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sont respectivement engendrés par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad -Id,$$

en particulier,

$$S\cdot\begin{pmatrix}1&u&t\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-v&t+v-uv\\0&1&u\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T\cdot\begin{pmatrix}1&u&t\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-v&t+\frac{v(1-v)}{2}-uv\\0&1&u+v\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}S^2\cdot\begin{pmatrix}1&u&t\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}&=T^3\cdot\begin{pmatrix}1&u&t\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=-Id\cdot\begin{pmatrix}1&u&t\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-u&t+u+v\\0&1&-v\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La formule générale ci-dessus définit en fait un anti-morphisme de $\mathcal{H}$, si $M\in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ est de déterminant négatif: si $h, h'\in\mathcal{H}$, alors $M(hh') = M(h')M(h)$. On obtient alors une action globale de $\mathrm{GL}_2\mathbf{Z}$ sur $\mathcal{H}$ en corrigeant par l'action du déterminant,

$$\text{pour } M\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \text{ et } h\in\mathcal{H},\qquad M\cdot h = M[h]^{\det M},$$

où $M[h]$ est donné par la formule (ACT).

On peut se demander si cette section provient d'une section de $\mathrm{Aut}\,L\longrightarrow \mathrm{Aut}\,N_1$, nous montrons ci-dessous qu'il n'en est rien.

Soit $G\subset \mathrm{Aut}(L)$ le sous-groupe des automorphismes qui fixent le commutateur $[x, y]$.

Proposition 3. *La surjection* $\mathrm{Aut}\,L\xrightarrow{\rho}\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ *induit une extension centrale* $0\longrightarrow\mathbf{Z}\longrightarrow G\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\longrightarrow 0$ (Θ) *dont la classe est un générateur de* $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z});\mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

Démonstration. D'après Nielsen [N-1], la préimage de $\mathrm{SL}_2\mathbf{Z}$ par ρ est le sous-groupe $\mathrm{Aut}^+L\subset\mathrm{Aut}\,L$ des automorphismes qui envoient $[x, y]$ sur l'un de ses conjugués, et nous avons une extension: $1\longrightarrow L\longrightarrow \mathrm{Aut}^+L\xrightarrow{\rho_1}\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\longrightarrow 1$. Les seules conjugaisons qui fixent $[x, y]$ sont les conjugaisons par les $[x, y]^n$, $n\in\mathbf{Z}$, d'où la suite exacte centrale:

$$0\longrightarrow\mathbf{Z}\longrightarrow G\longrightarrow\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}).$$

Quitte à modifier un antécédent d'un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ dans Aut^+L par une conjugaison, nous pouvons supposer qu'il est dans le groupe G, ce qui montre la surjectivité de $G\longrightarrow\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Le calcul des groupes de cohomologie des groupes cycliques montre que la suite exacte longue en cohomologie associée à l'amalgame $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ induit une suite exacte courte:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}); \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}; \mathbf{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}; \mathbf{Z}) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour montrer que l'extension Θ engendre $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z})$, il suffit de montrer que, restreinte aux groupes $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, elle engendre les groupes $\mathrm{H}^2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ et $\mathrm{H}^2(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ et donc de montrer que tous les relevés des générateurs S et T de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ dans G ont pour puissance respectivement quatrième et sixième la conjugaison par $[x, y]$. Des relevés sont donnés par exemple pour S par

$$\sigma\colon \quad \begin{cases} x \mapsto xyx^{-1}, \\ y \mapsto x^{-1}, \end{cases}$$

et pour T par

$$\tau\colon \quad \begin{cases} x \mapsto xyx^{-1}, \\ y \mapsto yx^{-1}, \end{cases}$$

on vérifie alors que $\sigma^4 = \tau^6$ est bien la conjugaison par $[x, y]$. ∎

Remarque 2. Les morphismes σ et τ vérifient

$$\sigma^2 = \tau^3\colon \quad \begin{cases} x \mapsto [x, y]x^{-1}, \\ y \mapsto xy^{-1}x^{-1}, \end{cases}$$

on obtient pour G la présentation $G = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^3 \rangle$. Cette présentation permet de montrer sans appel à la cohomologie que $\mathrm{Aut}^+(N_2) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est scindable. En effet, comme l'élément $[x, y]$ est central dans N_2, l'image du groupe $G \subset \mathrm{Aut}^+ L$ par le morphisme $p\colon \mathrm{Aut}^+ L \longrightarrow \mathrm{Aut}^+ N_2$ a pour présentation $\langle p(\sigma), p(\tau) \mid p(\sigma)^2 = p(\tau)^3, p(\sigma)^4 = p(\tau)^6 = 1 \rangle$, ce qui est une présentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ associée aux générateurs S et T. L'action des matrices S et T induite par cette section est donnée par

$$S \cdot \begin{pmatrix} 1 & u & t \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v & t + u - uv \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T \cdot \begin{pmatrix} 1 & u & t \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v & t + u + \frac{v(1-v)}{2} - uv \\ 0 & 1 & u + v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 5. *La surjection* $\mathrm{Aut}^+ L \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *n'est pas scindable donc, en particulier, la surjection canonique* $\mathrm{Aut}\, L \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N_1$ *n'est pas scindable.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et considérons une section μ: $\operatorname{Aut} N_1 \longrightarrow \operatorname{Aut} L$. Fixons une section μ_2^+: $\operatorname{Aut}^+ N_2 \longrightarrow \operatorname{Aut}^+ N_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. La section μ induit des sections μ_3: $\operatorname{Aut} N_1 \longrightarrow \operatorname{Aut} N_3$ et $\tilde{\mu}_2$: $\operatorname{Aut} N_1 \longrightarrow \operatorname{Aut} N_2$, mais par le Lemme 2, toutes les sections de $\operatorname{Aut}^+ N_2 \longrightarrow \operatorname{Aut}^+ N_1$ sont conjuguées entre elles et donc quitte à modifier μ par une conjugaison, nous pouvons supposer que μ_2^+ et $\tilde{\mu}_2^+$ coïncident. Par ailleurs, l'isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-modules $N_1 \longrightarrow \Gamma_2/\Gamma_3$ donné par $m \mapsto [[x, y], m]$ induit un isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-modules entre $\ker \rho_2 = \operatorname{Hom}(N_1, \Gamma_2/\Gamma_3)$ et $\operatorname{Hom}(N_1, N_1)$ muni de l'action naturelle; nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[dl, "\mu_3^+"'] \arrow[d, "\mu_2^+"] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{M}_2\mathbf{Z} \arrow[r] & \operatorname{Aut}^+ N_3 \arrow[r] & \operatorname{Aut}^+ N_2 \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{M}_2\mathbf{Z}$ désigne le groupe additif des matrices 2×2 à coefficients entiers et où $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{M}_2\mathbf{Z}$ est définie par $1 \mapsto Id$. Cette application est bien $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-équivariante. L'existence de μ_3^+ implique que le push-out de (Θ) le long de $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{M}_2\mathbf{Z}$ est une extension scindable. La trace tr: $\mathscr{M}_2\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ est également $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-équivariante et la composée $\mathbf{Z} \xrightarrow{j} \mathscr{M}_2\mathbf{Z} \xrightarrow{tr} \mathbf{Z}$ est la multiplication par 2; nous avons alors $0 = tr_* j_*(\Theta) = 2\Theta \neq 0$ car Θ engendre $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}); \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. ∎

En résumé, nous avons construit au début de ce section des extensions

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(N_1, \mathrm{H}_2 N_k) \longrightarrow \operatorname{Aut} N_{k+1} \longrightarrow \operatorname{Aut} N_k \longrightarrow 1 \quad (A_k)$$

pour $k \geq 1$ et nous avons montré que, dans le cas des quotients nilpotents des groupes libres de rang 2, ces extensions sont scindables si et seulement si $k = 1$. Dans ce cas nous avons explicité des sections en restriction au groupe $\mathrm{SL}(\mathbf{Z})$ et nous avons montré qu'elles ne se relèvent pas en des sections de $\operatorname{Aut}^+ L \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$; on peut par ailleurs se demander si la scindabilité ne provient pas simplement du fait que le groupe $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}^2, \mathbf{Z})) = \mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$, où $\mathbf{Z}^2$ est muni de l'action naturelle, est trivial. Nous montrons ci-dessous qu'il n'en est rien et nous explicitons la seule extension non triviale.

4.2. *Un calcul de la classe non nulle de* $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$

PROPOSITION 4. *Le groupe* $\mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$, *où* $\mathbf{Z}^2$ *est muni de l'action naturelle, est isomorphe à* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Démonstration. Si G est un groupe cyclique et M un G-module tel que $M^G = \{0\}$, alors des calculs standard de cohomologie des groupes montrent que $\mathrm{H}^1(G; M)$ est isomorphe au module des coinvariants M_G, et que $\forall\, p \geq 0$ $\mathrm{H}^2 p(G; M) = 0$ [Br, ch. III]. En bas degré, la suite exacte longue associée à la cohomologie de l'amalgame $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}^2$ se réduit donc à

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}); \mathbf{Z}^2) &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2) \oplus \mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Explicitant ces groupes nous obtenons: $\mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par la classe de $(1,0)$ ou de $(0,1)$, $\mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2) = 0$ et $\mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ engendré par les classes de $(1,0)$ et de $(0,1)$. La suite exacte s'écrit donc

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}); \mathbf{Z}^2) \\ &= 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où i est selon le choix du générateur de $\mathrm{H}^1(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^2)$ la première ou la deuxième inclusion canonique. ∎

Il existe donc une unique extension non-scindable de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ par $\mathbf{Z}^2$, la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-modules: $0 \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \longrightarrow 0$ montre alors que $\mathrm{H}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$. D'après la Proposition 2, pour trouver une classe non nulle, il nous suffit de trouver une action affine et sans points fixes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur l'espace affine $\mathbf{A}_2$ sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui relève l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Pour ce faire, nous allons construire au moyen de l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur un arbre un morphisme surjectif $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbf{A}_2) \simeq \mathfrak{S}_4$ qui rend le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r] & \mathrm{Aff}(\mathbf{A}_2) \simeq \mathfrak{S}_4 \arrow[r] & \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3 \arrow[r] & 1. \\ & & \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \arrow[u] \arrow[ur, "\bmod 2"'] & & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 5. *La réduction modulo* 4 *de* $\mathbf{Z}$ *induit un morphisme surjectif* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$.

Démonstration. Plus généralement, les matrices élémentaires

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix},$$

où $w \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et sont bien dans l'image de la réduction modulo n. ∎

Via les projections $SL_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \longrightarrow PSL_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ et $PSL_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \longrightarrow PSL_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, le groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ agit donc sur l'arbre ci-dessous, où les six sommets terminaux sont les six éléments de l'espace projectif sur $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et les trois sommets centraux sont les trois points de l'espace projectif sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & (3,1),(1,3) \arrow[dr] & & (3,3),(1,1) \arrow[dl] & \\
 & & (1,1) \arrow[d] & & \\
 & & (0,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
(3,0),(1,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[d] & & (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (2,1),(2,3) \\
 & (1,2),(3,2) & & (0,1),(0,3) &
\end{tikzcd}$$

Comme cet arbre a six sommets terminaux, son groupe d'automorphismes $\operatorname{Aut} X$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$. Par restriction aux trois arêtes centrales, nous obtenons une surjection $\operatorname{Aut} X \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ dont le noyau est engendré par les trois transpositions qui permutent chacune un couple de sommets terminaux issus du même sommet. Nous avons donc une extension:

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \longrightarrow \operatorname{Aut} X \longrightarrow \mathfrak{S}_3 \longrightarrow 1.$$

LEMME 3. *Soit* Σ: $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *l'application somme des coordonnées et* $\operatorname{Im}(SL_2(\mathbf{Z}))$ *l'image de* $SL_2(\mathbf{Z})$ *dans* $\operatorname{Aut} X$. *Alors* $\operatorname{Im}(SL_2(\mathbf{Z})) \cap (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 = \ker((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ *est constitué des trois couples de produits de deux transpositions distinctes*.

Démonstration. Le groupe $\mathfrak{S}_3$ agit sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ par permutation des coordonnées et Σ est alors un morphisme de $\mathfrak{S}_3$-modules. Le $\mathfrak{S}_3$-module $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ est somme directe de deux modules simples $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\ker \Sigma$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que $\operatorname{Im}(SL_2(\mathbf{Z})) \cap (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \subset \ker \Sigma$. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \ker(SL_2(\mathbf{Z}) \to \mathfrak{S}_3)$, elle laisse fixe les sommets terminaux $(3, 0)$ et $(1, 2)$ et permute les autres sommets terminaux. ∎

En conclusion, nous avons un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r] & \mathrm{Im}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})) \arrow[r] & \mathfrak{S}_3 \arrow[r] & 1. \\ & & \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \arrow[u] \arrow[ur, "\mathrm{mod}\,2"'] & & \end{tikzcd}$$

Or, comme le montre le lemme suivant, il existe, à isomorphisme près, une unique extension de $\mathfrak{S}_3$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ muni de l'action naturelle et donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})) \simeq \mathfrak{S}_4$.

LEMME 4. *Le groupe* $\mathrm{H}^2(\mathfrak{S}_3; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, *où* $\mathfrak{S}_3$ *agit en permutant les trois éléments non nuls de* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, *est trivial*.

Démonstration. Comme $\mathfrak{S}_3$ est fini, la cohomologie de $\mathfrak{S}_3$ à coefficients dans un module M s'injecte dans $\bigoplus_{H \in \mathscr{H}} \mathrm{H}^*(H; M)$, où $\mathscr{H}$ désigne un ensemble de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$. Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que, pour $H \in \mathscr{H}$, $\mathrm{H}^*(H; M) = 0$.

Si H est un 3-Sylow, alors $H \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et comme 2 est inversible dans H et annihile le module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on a bien $\mathrm{H}^*(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$.

Si H est un 2-Sylow, alors $H \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par une transposition. Le $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est alors isomorphe à $\mathbf{F}_2[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}]$, l'anneau du groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur le corps à deux éléments. Comme $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}]$ est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-module libre, les groupes $\mathrm{H}^n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}; \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}])$ sont nuls et la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-modules,

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}] \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}] \longrightarrow \mathbf{F}_2[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}] \longrightarrow 0,$$

montre alors, en particulier, que $\mathrm{H}^2(H; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$. ∎

REMERCIEMENT

Je remercie Jean Barge et Jean Lannes pour leur aide au cours de ce travail ainsi que le referee pour ses remarques.

RÉFÉRENCES

[Ba] S. Bachmuth, Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **122** (1966), 1–17.

[Br] K. S. Brown, “Cohomology of Groups,” Graduate Texts in Mathematics, Vol. 87, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[C-E] H. Cartan and S. Eilenberg, “Homological Algebra,” Princeton Mathematical Series, Vol. 19, Princeton University Press, 1956.

[Ma] W. Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, *Mat. Ann.* **111** (1935), 259–280.

[McL] J. Mac Lane, "Homology, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften," Vol. 114, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[N-1] J. Nielsen, Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppen mit zwei Erzeugenden, *Math. Ann.* **78** (1918), 77–94.

[N-2] J. Nielsen, Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen, *Danske Vid. Sehk. Mat.-Fys. Medd.* **12** (1924), 1–29.

[Pit] W. Pitsch, Une construction cohomologique de l'invariant de Casson, Thèse de 3[e] cycle, Paris–VII, 2000.