

# UNE CONSTRUCTION INTRINSÈQUE DU CŒUR DE L'INVARIANT DE CASSON

par Wolfgang PITSCH

---

## 1. Introduction.

Soit  $\Sigma_g$  une surface de genre  $g \geq 1$ , compacte, orientée et sans bord sur laquelle nous fixons un disque  $D^2 \subset \Sigma_g$ . Désignons par  $\mathcal{M}_{g,1}$  son mapping class group, *i.e.* le groupe  $\pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_g; \text{rel } D^2))$ , où  $\text{Diff}^+(\Sigma_g; \text{rel } D^2)$  est le groupe des difféomorphismes de  $\Sigma_g$  préservant l'orientation et qui sont l'identité sur  $D^2$ . La théorie des scindements de Heegaard (cf. [Rol90]) montre que toute variété de dimension 3 peut être obtenue en recollant à l'aide d'un difféomorphisme  $\phi$  de leur bord  $\Sigma_g$  deux boules avec des anses de genre  $g$  pour un certain  $g \geq 1$ ; le difféomorphisme  $\phi$  est isotope à un difféomorphisme  $\phi'$  laissant fixe le disque  $D^2 \subset \Sigma_{g,1}$  et le type de difféomorphie des variétés obtenues ne dépend que de la classe de  $\phi'$  dans  $\mathcal{M}_{g,1}$ . De plus les sphères d'homologie entière de dimension 3 peuvent toutes être obtenues en recollant au moyen des éléments du groupe de Torelli  $\mathcal{T}_{g,1} \subset \mathcal{M}_{g,1}$ ; c'est-à-dire des éléments de  $\mathcal{M}_{g,1}$  dont l'action sur  $H_1 \Sigma_{g,1}$  est triviale. Un invariant entier de sphères d'homologie de dimension 3 peut alors être vu comme une fonction  $F : \mathcal{T}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Z}$ ; généralisant des travaux de Johnson [Joh80a], [Joh85a], Morita a construit deux morphismes à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ ,  $q$  et  $d$  qu'il appelle le coeur de l'invariant de Casson, dont la source est un sous-groupe de  $\mathcal{T}_{g,1}$ , le groupe de Johnson  $\mathcal{K}_{g,1}$  [Mor89b]. Il montre alors que

1) les éléments des groupes  $\mathcal{K}_{g,1}$  pour  $g \geq 1$  permettent de construire toutes les sphères d'homologie entière;

2) le morphisme  $d + q : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Q}$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et coïncide avec l'invariant de Casson.

Morita conjecture alors qu'un sous-groupe de  $\mathcal{K}_{g,1}$ , sur lequel  $q$  s'annule par construction, suffit pour construire toutes les sphères d'homologie entière;  $d$  serait alors l'invariant de Casson.

Cet article est essentiellement un «remake» de [Mor89a], [Mor89b]. Cependant nous espérons que notre présentation purement cohomologique de la construction de  $d$ , qui évite presque tout calcul ainsi que le choix arbitraire de cocycles, convaincra de l'aspect parfaitement intrinsèque de cet homomorphisme.

Soit  $\Sigma_{g,1}$  le complémentaire de l'intérieur du disque  $D^2$  dans  $\Sigma_g$ , que nous pointons par  $x_0 \in \partial\Sigma_{g,1}$ . Le groupe fondamental  $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, x_0)$  est libre de rang  $2g$ , fixons-en une base  $\alpha_i, \beta_i$  comme sur la figure 1.

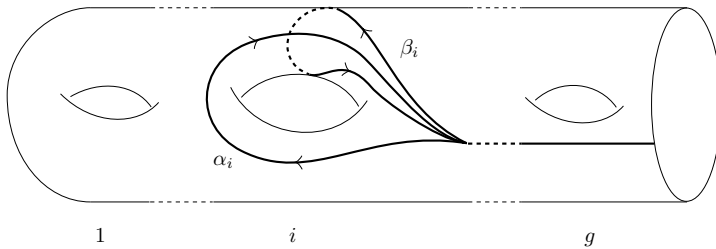


Figure 1. Générateurs.

Désignons par  $\omega$  la forme d'intersection algébrique sur l'homologie  $H_1(\Sigma_{g,1}) = H$ , c'est une forme symplectique invariante sous l'action de  $\mathcal{M}_{g,1}$ , soit  $\text{Sp}\omega$  son groupe symplectique. Par construction, les images  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) des courbes  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ) dans  $H$  forment une base symplectique de  $H_1\Sigma_{g,1}$ .

Dans la première partie de cet article nous construisons un morphisme, canonique en cohomologie,  $\mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{b} H \times \text{Sp}\omega$  de noyau noté  $\widehat{\mathcal{K}}_{g,1}$  et qui relève la projection canonique  $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Sp}\omega$ .

Dans la deuxième partie, nous décrivons deux classes canoniques  $c$  et  $m$  dans  $H^2(H \times \text{Sp}\omega; \mathbb{Z})$ . Le groupe  $H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$  est cyclique [Pit99a], engendré par  $b^*(m)$ , il existe donc un unique  $\lambda \in \mathbb{Z}$  tel que  $b^*(c) = \lambda \cdot b^*(m)$ . La suite exacte des cinq termes associée à  $b$ ,

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^1(\text{Im } b; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(H^1(\widehat{\mathcal{K}}_{g,1}; \mathbb{Z})) \\
 \rightarrow H^2(\text{Im } b; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

montre alors que l'annulation de la classe  $b^*(c - \lambda \cdot m)$  équivaut à la donnée d'un morphisme  $d : \widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Z}$ , car  $\mathcal{M}_{g,1}$  est parfait pour  $g \geq 3$  [Pit99a].

Dans la troisième partie, nous évaluons le morphisme  $d$  sur les générateurs de  $\mathcal{K}_{g,1} \subset \widehat{\mathcal{K}}_{g,1}$  et nous montrons qu'il coïncide avec la fonction  $d$  de Morita.

*Remerciements.* — Je tiens à remercier Jean Barge pour son soutien pendant de ce travail, ainsi que le rapporteur pour ses remarques.

## 2. Approximations du mapping class group $\mathcal{M}_{g,1}$ .

Rappelons que  $H$  s'identifie à l'abélianisé  $\pi/[\pi, \pi]$  et soit  $N_2$  le second quotient nilpotent  $\pi/[\pi, [\pi, \pi]]$  du groupe libre  $\pi$ . La surjection canonique  $N_2 \rightarrow H$  a pour noyau  $[\pi, \pi]/[\pi, [\pi, \pi]] \simeq \Lambda^2 H$ , qui est le centre de  $N_2$ . On vérifie alors que la classe de l'extension centrale

$$0 \rightarrow \Lambda^2 H \rightarrow N_2 \rightarrow H \rightarrow 0 \quad (v_1)$$

dans  $H^2(H, \Lambda^2 H) \simeq \text{Hom}(\Lambda^2 H, \Lambda^2 H)$  est l'identité  $i_{\Lambda^2 H}$ . Comme la classe  $i_{\Lambda^2 H}$  est invariante sous l'action naturelle du groupe  $\text{Aut } H$  et comme  $\Lambda^2 H$  est le centre de  $N_2$ , des arguments classiques de cohomologie des groupes montrent que  $(v_1)$  induit une extension

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H, \Lambda^2 H) \rightarrow \text{Aut } N_2 \rightarrow \text{Aut } H \rightarrow 1.$$

D'après un théorème de Nielsen [Nil27],  $\mathcal{M}_{g,1}$  est un sous-groupe de  $\text{Aut } L$  dont l'image par la projection canonique  $\text{Aut } L \rightarrow \text{Aut } H$  est le groupe  $\text{Sp } \omega$ ; nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{g,1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g,1} & \longrightarrow & \text{Sp } \omega \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(H, \Lambda^2 H) & \longrightarrow & \text{Aut}^+ N_2 & \longrightarrow & \text{Sp } \omega \longrightarrow 1. \end{array}$$

Ici  $\text{Aut}^+ N_2$  désigne la préimage de  $\text{Sp } \omega$  dans  $\text{Aut } N_2$  et

$$\mathcal{T}_{g,1} = \ker(\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Sp } \omega)$$

est le groupe de Torelli.

Dans [Pit99b], nous avons montré que l'extension du bas n'est pas scindable dès que  $g \geq 2$ , cependant nous pouvons l'«affaiblir» en une extension scindable de la manière suivante. Considérons le push-out de  $(v_1)$  le long de  $2\omega : \Lambda^2 H \rightarrow \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Lambda^2 H & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & H \rightarrow 0 & (v_1) \\ & & \downarrow 2\omega & & \downarrow & & \parallel & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \tilde{N}_2 & \longrightarrow & H \rightarrow 0 & (\tilde{v}_1). \end{array}$$

L'extension centrale du bas,  $(\tilde{v}_1)$ , a pour classe de cohomologie

$$2\omega \in \text{Hom}(\Lambda^2 H, \mathbb{Z}) \simeq H^2(H; \mathbb{Z}).$$

En particulier,  $\omega$  est un 2-cocycle pour cette extension et nous pouvons définir  $\tilde{N}_2$  comme  $\mathbb{Z} \times H$  muni de la loi induite par le cocycle  $\omega$ . Comme  $\omega : \Lambda^2 H \rightarrow \mathbb{Z}$  est une forme non dégénérée, le facteur  $\mathbb{Z}$  s'identifie au centre de  $\tilde{N}_2$ , c'est en particulier un sous-groupe invariant par tout automorphisme et l'extension  $(\tilde{v}_1)$  induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Aut } \tilde{N}_2 \longrightarrow \text{Aut } H,$$

où la dernière flèche n'est pas surjective, car la classe de cohomologie  $2\omega$  n'est pas  $\text{Aut } H$ -invariante. Comme par définition elle est  $\text{Sp } \omega$ -invariante, si nous désignons par  $\text{Aut}^+ \tilde{N}_2$  la préimage de  $\text{Sp } \omega$  dans  $\text{Aut } \tilde{N}_2$ , nous obtenons une extension

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Aut}^+ \tilde{N}_2 \longrightarrow \text{Sp } \omega \rightarrow 1.$$

*Remarque.* — On peut montrer que  $\text{Aut}^+ \tilde{N}_2$  est exactement le noyau de la restriction  $\text{Aut } \tilde{N}_2 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$ .

PROPOSITION 2.1. — *Nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *L'extension*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Aut}^+ \tilde{N}_2 \longrightarrow \text{Sp } \omega \rightarrow 1$$

*est scindable.*

(ii) *Deux quelconques de ses sections sont conjuguées par un élément de  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* — (i) Le groupe  $\tilde{N}_2$  étant défini par un cocycle  $\text{Sp } \omega$ -invariant, si  $\phi \in \text{Sp } \omega$  et  $(z, g) \in \mathbb{Z} \times_{\omega} H$ , la formule  $\phi \cdot (z, g) = (z, \phi(g))$  définit une action de  $\text{Sp } \omega$  sur  $\tilde{N}_2$  au-dessus de l'action naturelle sur  $H$ .

(ii) L'ensemble des sections modulo la conjugaison par un élément de  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$  est en bijection avec  $H^1(\text{Sp } \omega; \text{Hom}(H, \mathbb{Z}))$ , et nous pouvons conclure à l'aide du lemme suivant. □

LEMME 1. — *Le groupe  $H^1(\text{Sp } \omega, \text{Hom}(H, \mathbb{Z}))$  est nul.*

*Démonstration.* — Considérons un morphisme croisé

$$f : \text{Sp } \omega \longrightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Z}).$$

Soit  $g \in \text{Sp } \omega$  un élément arbitraire; comme  $-\text{Id}$  est central dans  $\text{Sp } \omega$ , la commutation de  $g$  avec  $-\text{Id}$  donne

$$2f(g) = f(-\text{Id}) - f(-\text{Id}) \circ g.$$

Comme  $\text{Sp } \omega$  ne contient pas uniquement des translations, ceci implique que le morphisme  $f(-\text{Id})$  est divisible par 2, soit  $\eta = \frac{1}{2} f(-\text{Id})$ . L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$f(g) = \eta - \eta \circ g.$$

Ce qui montre que  $f$  est principal. □

Le morphisme  $N_2 \rightarrow \tilde{N}_2$  n'est pas unique, et il n'existe pas *a priori* de moyen de comparer  $\text{Aut}^+ N_2$  et  $\text{Aut}^+ \tilde{N}_2$ . Commençons par poser :

DÉFINITION 1. — *Une clôture d'un diagramme à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \Gamma & \rightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & A' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & \Gamma' & \rightarrow & 1 \end{array}$$

*est un morphisme  $\mu : G \rightarrow G'$  qui le complète en un diagramme commutatif.*

Une clôture existe si et seulement si le push-out de la première ligne le long de  $A \rightarrow A'$  est isomorphe au pull-back de la deuxième le long de  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ .

PROPOSITION 2.2. — Toute clôture  $f : N_2 \rightarrow \tilde{N}_2$  du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \Lambda^2 H & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & H & \longrightarrow 0 & (v_1) \\
 & \downarrow 2\omega & & & & \parallel & & \\
 0 \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \tilde{N}_2 & \longrightarrow & H & \longrightarrow 0 & (\tilde{v}_1)
 \end{array}$$

induit une clôture  $F : \text{Aut}^+ N_2 \rightarrow \text{Aut}^+ \tilde{N}_2$  du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Hom}(H, \Lambda^2 H) & \longrightarrow & \text{Aut}^+ N_2 & \longrightarrow & \text{Sp } \omega & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow 2\omega & & & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Aut}^+ \tilde{N}_2 & \longrightarrow & \text{Sp } \omega & \longrightarrow 1.
 \end{array}$$

Démonstration. — Soit  $\phi \in \text{Aut}^+ N_2$  et  $p(\phi)$  son image dans  $\text{Sp } \omega$ . La restriction de  $\phi$  à  $\Lambda^2 H$  est alors  $\Lambda^2 p(\phi)$ , et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^2 H & \xrightarrow{\Lambda^2 p(\phi)} & \Lambda^2 H \\
 \downarrow 2\omega & & \downarrow \\
 \mathbb{Z} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

équivalent à la commutativité de

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda^2 H & \longrightarrow & N_2 & & \\
 \downarrow 2\omega & & \downarrow f & \searrow \phi & \\
 \mathbb{Z} & \longrightarrow & \tilde{N}_2 & & N_2 \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \tilde{N}_2.
 \end{array}$$

Comme le carré

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^2 H & \longrightarrow & N_2 \\
 2\omega \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathbb{Z} & \longrightarrow & \tilde{N}_2
 \end{array}$$

est co-cartésien, nous obtenons un unique morphisme induit  $F(\phi) : \tilde{N}_2 \rightarrow \tilde{N}_2$ . L'unicité de  $F(\phi)$  assure que  $\phi \mapsto F(\phi)$  est un morphisme de groupes ayant les propriétés voulues.  $\square$

En résumé nous avons obtenu un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{g,1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g,1} & \longrightarrow & \mathrm{Sp}\omega \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Sp}\omega \rightarrow 1,
 \end{array}$$

où la ligne du bas est scindable et où la flèche centrale n'est plus définie de manière unique. Néanmoins la proposition suivante montre que nous n'avons rien perdu au niveau cohomologique.

PROPOSITION 2.3. — (i) *Deux clôtures arbitraires du diagramme précédent sont conjuguées par un élément de  $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z})$ .*

(ii) *Toutes les clôtures ont même noyau  $\widehat{\mathcal{K}}_{g,1}$ , et il contient le sous-groupe de Johnson  $\mathcal{K}_{g,1}$ .*

*Démonstration.* — Comme dans la proposition 2.1, les classes des clôtures modulo les conjugaisons par des éléments de  $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z})$  sont en bijection avec  $H^1(\mathrm{Sp}\omega; \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z}))$ , et nous pouvons conclure par le lemme 1. Le deuxième point est une conséquence immédiate du premier, du fait que toutes les clôtures se factorisent à travers  $\mathrm{Aut}^+ N_2$  et que le noyau de  $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathrm{Aut} N_2$  est  $\mathcal{K}_{g,1}$ . □

### 3. Construction et stabilité de la fonction $d : \widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

#### 3.1. Construction.

Revenons à l'extension scindable de la proposition 2.1

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2 \xrightarrow{p} \mathrm{Sp}\omega \rightarrow 1 \quad (\Omega).$$

PROPOSITION 3.1. — *Si  $g \geq 2$  alors l'extension ci-dessus induit une suite exacte :*

$$0 \rightarrow H^2(\mathrm{Sp}\omega; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^2(\mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(\Lambda^2 H, \mathbb{Z})^{\mathrm{Sp}\omega}.$$

*De plus :*

(i) *Le monomorphisme  $p^*$ , induit par  $p$ , admet une rétraction  $\sigma^*$  induite par  $n$  importe quelle section de  $p$ .*

(ii) *L'image de  $i^*$  contient la classe  $2\omega$ .*

*Démonstration.* — La deuxième page de la suite spectrale de Hochschild-Serre de l’extension  $(\Omega)$  s’écrit en bas degré :

$\Lambda^2 \text{Hom}(H, \mathbb{Z})^{\text{Sp}\omega}$	$\vdots$		
$\text{Hom}(H, \mathbb{Z})^{\text{Sp}\omega}$	$H^1(\text{Sp}\omega; \text{Hom}(H, \mathbb{Z}))$	$\vdots$	
$\mathbb{Z}$	$\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$	$H^2(\text{Sp}\omega; \mathbb{Z})$	$\vdots$

Évidemment  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})^{\text{Sp}\omega} = 0$  et, par le lemme 1,

$$H^1(\text{Sp}\omega, \text{Hom}(H, \mathbb{Z})) = 0.$$

De même  $\Lambda^2 \text{Hom}(H, \mathbb{Z})^{\text{Sp}\omega} \simeq \text{Hom}(\Lambda^2 H, \mathbb{Z})^{\text{Sp}\omega}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , et engendré par  $\omega$ . Donc le terme  $H^2(\text{Sp}\omega; \mathbb{Z})$  survit à l’infini et la suite de la proposition n’est autre que la suite exacte

$$0 \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow H^2(\text{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z}) \rightarrow E_2^{0,2}.$$

Dans la proposition 2.3, nous avons vu que toutes les sections de l’extension  $(\Omega)$  sont conjuguées par des éléments de  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$ , or, comme l’action de conjugaison induit l’identité en cohomologie, ces sections induisent le même morphisme en cohomologie, qui est alors une rétraction de  $p^*$  par contravariance.

Reste à vérifier le deuxième point. Fixons une section  $\sigma$  de  $p : \text{Aut}^+ \tilde{N}_2 \rightarrow \text{Sp}\omega$ . Via  $\sigma$  le groupe  $\text{Sp}\omega$  agit sur  $\tilde{N}_2$  et nous avons une extension centrale :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{N}_2 \rtimes \text{Sp}\omega \rightarrow H \rtimes \text{Sp}\omega \rightarrow 1.$$

La forme  $\omega$  induit un isomorphisme de  $\text{Sp}\omega$ -modules  $H \simeq \text{Hom}(H, \mathbb{Z})$ , donc  $H \rtimes \text{Sp}\omega \simeq \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) \rtimes \text{Sp}\omega \simeq \text{Aut}^+ \tilde{N}_2$ , et l’extension ci-dessus définit un élément de  $H^2(\text{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z})$  dont la restriction à  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$ , par construction, a pour classe de cohomologie  $2\omega$ . □

*Remarque.* — On peut montrer qu’en fait l’image de  $i^*$  est engendrée par  $2\omega$ , ceci est dû au fait que la surjection  $\text{Aut } N_2 \rightarrow \text{Aut } N_1$  n’est pas scindable (cf. [Pit99b]).



Deux classes particulières dans  $H^2(\text{Aut } \tilde{N}_2; \mathbb{Z})$  :

LEMME 2. — La surjection canonique  $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Sp } \omega$  induit un isomorphisme  $\mathbb{Z} = H_2 \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_2 \text{Sp } \omega$ .

Démonstration. — Dans [Pit99a] nous avons montré que pour  $g \geq 4$ ,  $H_2 \mathcal{M}_{g,1} \simeq \mathbb{Z}$  et nous en avons donné un générateur explicite en relation avec la formule de Hopf appliquée à la présentation de Wałjnryb de  $\mathcal{M}_{g,1}$ . D'après les calculs de Johnson [Joh80b]  $H_0(\mathcal{M}_{g,1}, H_1(\mathbb{T}_{g,1})) = 0$  et la suite exacte des cinq termes appliquée à

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Sp } \omega \rightarrow 0$$

montre alors que  $H_2 \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_2 \text{Sp } \omega$  est surjective et même un isomorphisme car ce dernier groupe n'est pas fini (par exemple parce que  $\text{Hom}(H_2 \text{Sp } \omega, \mathbb{Z}) = H^2(\text{Sp } \omega; \mathbb{Z}) \neq 0$  [Mey73]).  $\square$

Les groupes  $\mathcal{M}_{g,1}$  et  $\text{Sp } \omega$  étant parfaits pour  $g \geq 4$ , en passant à la cohomologie nous obtenons des isomorphismes  $H^2(\text{Sp } \omega; \mathbb{Z}) \simeq H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$  et ces groupes sont engendrés par  $m$  la classe duale de notre générateur. En identifiant  $H^2(\text{Sp } \omega; \mathbb{Z})$  avec son image par  $p^*$ , nous obtenons donc une classe  $m \in H^2(\text{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z})$ .

Désignons par ailleurs par  $c \in H^2(\text{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z})$  l'unique classe telle que  $i^*(c) = 2\omega$  et  $\sigma^*(c) = 0$  (rappelons que  $\sigma$  désigne une section arbitraire du morphisme  $p : \text{Aut}^+ \tilde{N}_2 \rightarrow \text{Sp } \omega$ ).

Fixons une clôture  $G : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}^+ \tilde{N}_2$ . Comme toutes les clôtures sont conjuguées elles induisent un même morphisme  $\Psi : H^2(\text{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$ . Il existe alors un unique  $\lambda \in \mathbb{Z}$  tel que  $c - \lambda \cdot m \in \ker \Psi$ . La suite exacte des cinq termes associée à  $G$  induit un diagramme commutatif où la ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^2(\text{Aut}^+ \tilde{N}_2; \mathbb{Z}) & & \\ & & \downarrow & \searrow \Psi & \\ \text{Hom}(H_1 \mathcal{M}_{g,1}, \mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Hom}(H_1 \widehat{\mathcal{K}}_{g,1}, \mathbb{Z})^{\text{Im } G} & \xrightarrow{\partial} & H^2(\text{Im } G; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z}), \end{array}$$

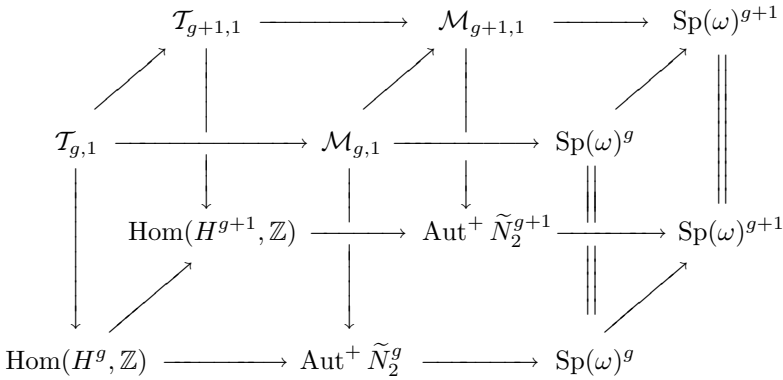
où la flèche verticale est induite par l'inclusion  $\text{Im } G \hookrightarrow \text{Aut}^+ \tilde{N}_2$ . Comme pour  $g \geq 4$   $\mathcal{M}_{g,1}$  est parfait,  $\text{Hom}(H_1 \mathcal{M}_{g,1}, \mathbb{Z}) = 0$  et l'annulation de la classe  $\Psi(c - \lambda \cdot m)$  fournit donc un unique morphisme  $d : \widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Le paragraphe suivant nous permet d'étendre la fonction  $d : \widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Z}$  construite ci-dessus pour  $g \geq 4$  aux genres  $g \leq 3$ .

**3.2. Stabilité de la fonction  $d$ .**

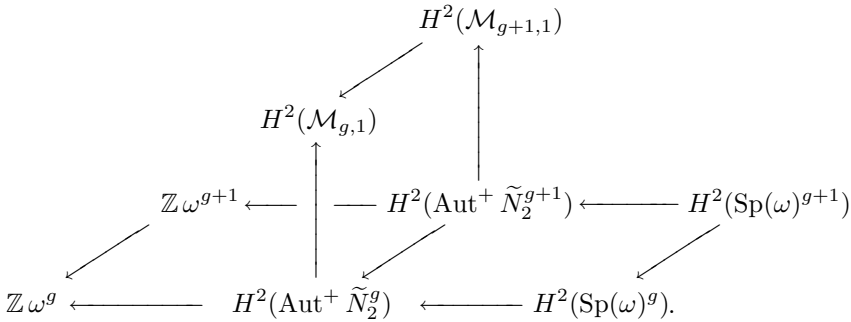
Choisissons un plongement  $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$  tel que  $\partial\Sigma_{g,1} \cap \partial\Sigma_{g+1,1} = \emptyset$ . La forme d'intersection  $\omega^g$  sur  $\Sigma_{g,1}$  coïncide avec la restriction de la forme d'intersection  $\omega^{g+1}$  sur  $\Sigma_{g+1,1}$ , et en prolongeant tout difféomorphisme de  $\Sigma_{g,1}$  qui fixe le bord point à point à  $\Sigma_{g+1,1}$  par l'identité nous obtenons des inclusions  $\mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{g+1,1}$  et  $\mathrm{Sp}(\omega)^g \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\omega)^{g+1}$ , compatibles avec l'inclusion  $H^g = H_1\Sigma_{g,1} \hookrightarrow H_1\Sigma_{g+1,1} = H^{g+1}$ .

Choisissons deux clôtures arbitraires  $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2^g$ , et  $\mathcal{M}_{g+1,1} \rightarrow \mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2^{g+1}$ . Nous avons alors un diagramme commutatif :



où les lignes sont des extensions de groupes.

Par construction le carré avant gauche de ce diagramme est co-cartésien, et nous avons donc un monomorphisme induit  $\mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2^g \rightarrow \mathrm{Aut}^+ \tilde{N}_2^{g+1}$ . En particulier le plongement  $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$  induit une inclusion  $\widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{g+1,1}$ . En cohomologie nous avons alors un diagramme commutatif :



Les coefficients des groupes de cohomologie sont tous  $\mathbb{Z}$ , et nous avons

identifié  $\text{Hom}(\Lambda^2 H, \mathbb{Z})^{\text{Sp } \omega}$  avec le groupe  $\mathbb{Z}$  engendré par  $\omega$ . Comme les difféomorphismes préservant l'orientation de  $\Sigma_{g+1,1}$  agissent de manière transitive sur l'ensemble des sous-surfaces de la forme  $\Sigma_{g,1}$  de  $\Sigma_{g+1,1}$ , changer le plongement  $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$  revient à composer les morphismes  $\mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{g+1,1}$  et  $\text{Sp}(\omega)^g \hookrightarrow \text{Sp}(\omega)^{g+1}$  par un automorphisme intérieur de leur but. Les automorphismes intérieurs d'un groupe induisent l'identité en cohomologie, les morphismes du diagramme ci-dessus sont donc indépendants du choix du plongement. Montrons que nos classes  $c$  et  $m$  sont stables.

Le morphisme  $\mathbb{Z}\omega^{g+1} \rightarrow \mathbb{Z}\omega^g$  obtenu par restriction de la forme d'intersection est un isomorphisme et nous pouvons même l'identifier avec l'identité. Comme le générateur de  $H_2\mathcal{M}_{g,1}$  est par construction stable (cf. [Pit99a]), sa classe duale l'est également ; par conséquent  $c$  et  $m$  sont stables. La naturalité de la suite exacte des cinq termes utilisée pour construire le morphisme  $d$  montre alors que :

PROPOSITION 3.2. — *Pour toute inclusion  $\widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{g+1,1}$ , induite par un plongement  $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$  on a  $d_{g+1|\widehat{\mathcal{K}}_{g,1}} = d_g$ .*

Finalement nous pouvons étendre la définition de la fonction  $d$  en genres  $g \leq 3$  en choisissant un plongement arbitraire  $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g',1}$  où  $g' \geq 4$ , ce plongement induit donc un monomorphisme  $\widehat{\mathcal{K}}_{g,1} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{g',1}$  et la fonction  $d_{|\widehat{\mathcal{K}}_{g,1}}$  est alors indépendante de tous les choix.

## 4. Évaluation de la fonction $d$ sur le groupe de Johnson.

### 4.1. Rappels généraux.

Nous commençons cette section par quelques rappels de cohomologie des groupes en basse dimension. Supposons donnés deux groupes  $G$  et  $H$ ,  $H$  abélien, un morphisme  $\mu : G \rightarrow H$  de noyau  $K$  et une extension centrale  $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0$  de classe  $x$ . Supposons de plus que  $\mu^*(x) \in H^2(G; A)$  est nulle. Cette condition se traduit par l'existence d'un relevé  $\phi : G \rightarrow E$  de  $\mu$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G & & \\
 & & & & \downarrow \mu & & \\
 & & \phi & \swarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & H \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Deux relevés  $\phi_1$  et  $\phi_2$  diffèrent d'un morphisme  $G \rightarrow A$ . Comme  $A$  est abélien, les restrictions de tous les relevés au groupe dérivé  $[G, G]$  coïncident, désignons la restriction par  $f : [G, G] \rightarrow A$ . Rappelons enfin que pour un groupe abélien  $H$  quelconque  $H_2(H)$  s'identifie à  $\Lambda^2 H$  (cf. [Bro94]).

PROPOSITION 4.1. — Soit  $k(x)$  l'image de la classe  $x$  par le morphisme  $H^2(H, A) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 H, A)$  donné par le théorème des coefficients universels. Soient  $g, h \in G$  deux éléments, alors

$$f([g, h]) = k(x)(\mu(g) \wedge \mu(h)).$$

Démonstration. — Par construction pour  $a, b \in H$ ,  $k(x)(a \wedge b) = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ , où  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  sont deux relevés arbitraires respectivement de  $a$  et de  $b$  dans  $E$ . Alors

$$\begin{aligned} f([g, h]) &= \phi([g, h]) = [\phi(g), \phi(h)], \\ &= k(x)(p\phi(g) \wedge p\phi(h)) = k(x)(\mu(g) \wedge \mu(h)). \quad \square \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. — Si  $[G, G]$  est d'indice fini dans  $K \subset G$ , et si pour tout  $q \in \mathbb{Z}$  premier tel que  $q$  divise  $[K : [G, G]]$ , le groupe abélien  $A$  est sans  $q$ -torsion, alors la restriction de  $\phi$  à  $K$ , qui est un morphisme  $K \rightarrow A$ , est entièrement déterminée par  $x$  et donc indépendante du choix de  $\phi$ .

Démonstration. — Soit  $\ell \in K$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$  le plus petit entier tel que  $\ell^n \in [G, G]$ , alors  $n\phi(\ell) = \phi(\ell^n) = f(\ell^n) \in A$ . Comme  $n$  divise  $[K : [G, G]]$ , par hypothèse la multiplication par  $n$  est injective dans  $A$ , donc  $f(\ell^n)$  qui est divisible par  $n$  dans  $A$  l'est de manière unique et, par un léger abus de notations,  $\phi(\ell) = (1/n)f(\ell^n)$ .  $\square$

Cette proposition et son corollaire ont une reformulation plus abstraite. La suite exacte des cinq termes associée au morphisme  $\mu : G \rightarrow H$  s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\text{Im } \mu, A) \longrightarrow \text{Hom}(G, A) \longrightarrow \text{Hom}(K, A)^{\text{Im } \mu} \\ \xrightarrow{\delta} H^2(\text{Im } \mu; A) \xrightarrow{\mu^*} H^2(G; A). \end{aligned}$$

Par hypothèse la restriction de  $x$  à  $\text{Im } \mu$ , que nous noterons encore  $x$ , est dans le noyau de  $\mu^*$ , les morphismes  $F \in \text{Hom}(K, A)^{\text{Im } \mu}$  tels que  $\delta(F) = x$  sont exactement les restrictions à  $K$  des relevés  $\phi$  de la proposition, ils diffèrent bien des morphismes  $G \rightarrow A$ . Les hypothèses du corollaire impliquent que  $\text{Hom}(\text{Im } \mu, A) \rightarrow \text{Hom}(G, A)$  est surjective, ce qui démontre de nouveau l'unicité de  $f$ .

**4.2. Rappels sur le groupe de Johnson.**

Par définition le sous-groupe de Johnson  $\mathcal{K}_{g,1} \subset \mathcal{M}_{g,1}$  est le noyau de l'application canonique  $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Aut } N_2$ . Johnson [Joh85a] a montré que  $\mathcal{K}_{g,1}$  était le sous-groupe engendré par les twists de Dehn à droite le long de courbes simples fermées bordantes, c'est-à-dire de courbes simples  $\gamma$  tracées sur la surface  $\Sigma_{g,1}$  et qui la séparent en deux composantes connexes. La sous-surface de  $\Sigma_{g,1} \setminus \{\gamma\}$  qui ne contient pas le bord  $\partial\Sigma_{g,1}$  est une surface, orientée, à une composante de bord, son genre  $h \leq g$  est appelé le genre de  $\gamma$  et par extension le genre du twist de Dehn à droite défini par  $\gamma$ . Deux twists de Dehn à droite le long de courbes closes simples bordantes sont alors conjugués dans  $\mathcal{M}_{g,1}$  si et seulement si ils ont même genre. Finalement dans [Joh79] et [Joh85b] Johnson démontre :

- 1)  $\mathcal{K}_{g,1}$  est engendré par les twists de genre 1 et 2;
- 2)  $[\mathcal{T}_{g,1}, \mathcal{T}_{g,1}] \subset \mathcal{K}_{g,1}$  est d'indice fini.

PROPOSITION 4.2. — Pour  $g \geq 2$  un morphisme  $\mathcal{M}_{g,1}$ -équivariant  $f : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbb{Z}$  est de la forme  $f(h) = \frac{1}{2}h(h-1)f(2) + h(2-h)f(1)$ , où  $h$  désigne un twist de Dehn à droite de genre  $h$ .

*Démonstration.* — Rappelons la relation de la lanterne. Soit  $D^2$  un disque privé de trois disques  $D_1^2, D_2^2, D_3^2$ . Désignons par  $C_0$  et par  $C_i$  quatre courbes respectivement parallèles au bord de  $D^2$  et aux trois disques  $D_i^2$ , ainsi que trois autres courbes  $C_{12}, C_{13}$  et  $C_{23}$  comme sur la figure 2.

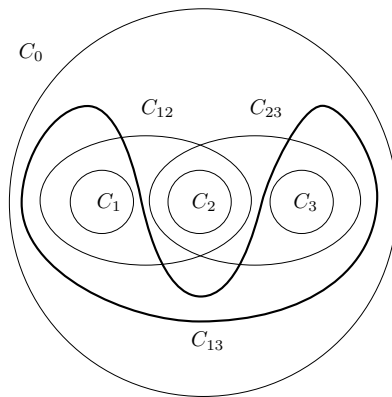


Figure 2. Configuration de la lanterne.

Si  $T_j$  désigne le twist de Dehn à droite le long de la courbe  $C_j$ , et  $T_{ij}$  le twist le long de la courbe  $C_{ij}$  alors

$$T_0 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_{12} \circ T_{13} \circ T_{23}.$$

En prenant pour courbes  $C_0, C_1, C_2, C_3$  des courbes bordantes de genres respectifs  $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2 + h_3$ , nous obtenons pour tous  $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{N}$  :

$$f(h_1 + h_2 + h_3) + f(h_3) + f(h_2) + f(h_1) = f(h_1 + h_2) + f(h_1 + h_3) + f(h_2 + h_3).$$

En prenant  $h_1 = 1 = h_2$  et  $h_3 = h - 1$ , nous obtenons la relation  $f(h + 1) - f(h) = f(h) - f(h - 1) + f(2) - 2f(1)$ , et on conclut par récurrence. □

### 4.3. Évaluation de $d$ sur les générateurs de Johnson du groupe $\mathcal{K}_{g,1}$ .

Choisissons une clôture arbitraire  $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}^+ \tilde{N}_2$ . Nous avons alors un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{g,1} & \xrightarrow{j} & \mathcal{M}_{g,1} \\ J \downarrow & & \downarrow G \\ \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & \text{Aut}^+ \tilde{N}_2 \end{array}$$

Comme  $m$  provient d'une classe dans  $H^2(\text{Sp} \omega; \mathbb{Z})$ ,

$$0 = j^* G^*(c - \lambda \cdot m) = J^* i^*(c - \lambda \cdot m) = J^*(i^* c) = J^*(2\omega)$$

(cf. définition de  $c$ ), et que de plus  $[\mathcal{T}_{g,1}, \mathcal{T}_{g,1}] \subset \mathcal{K}_{g,1}$  est d'indice fini, nous pouvons donc appliquer les résultats de la première partie de cette section au calcul de  $d$ . Par ailleurs, la stabilité de  $d$  et la covariance par rapport à  $\mathcal{M}_{g,1}$  montrent qu'il suffit de calculer  $d(\zeta)$  pour  $\zeta$  une courbe parallèle au bord de  $\Sigma_{g,1}$ .

Soit  $T_\zeta$  le twist de Dehn à droite défini par  $\zeta$ . Dans  $\pi_1(\Sigma_{g,1}, x_0)$  nous avons la relation  $\partial \Sigma_{g,1} = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i]$ , elle a un analogue dans  $\mathcal{M}_{g,1}$ , dont la démonstration est donnée en annexe :

LEMME 3. —  $(T_\zeta)^{2-2g} = \prod_{i=g}^1 [\tilde{\beta}_i^{-1}, \tilde{\alpha}_i^{-1}]$ .

Les applications  $\tilde{\alpha}_i$  et  $\tilde{\beta}_i$  (cf. figures 3 et 4, sont les images des courbes  $\alpha_i, \beta_i$  par l'application  $\pi_1(\Sigma_{g,1}, x_0) \rightarrow \mathcal{M}_{g,1}$  suivante. Soit  $\gamma$  une courbe fermée simple orientée passant par le point de base  $x_0$ . Un voisinage régulier de  $\gamma$  dans  $\Sigma_{g,1}$  est une surface de genre 0 avec trois composantes de bord, l'une d'entre elles étant le bord de  $\Sigma_{g,1}$ . Désignons par  $\gamma^+$  la composante de bord, autre que  $\partial\Sigma_{g,1}$ , qui se trouve à droite de  $\gamma$  (cette notion à un sens car  $\Sigma_{g,1}$  et  $\gamma$  sont orientés), et par  $\gamma^-$  la troisième composante. Les courbes  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  sont des courbes simples fermées, disjointes du bord de  $\Sigma_{g,1}$ , homologues. Remarquons que dans  $\Sigma_g$  les courbes  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  sont isotopes, en particulier les twists de Dehn  $T_{\gamma^+}$  et  $T_{\gamma^-}$  ont même effet en homologie (mais sont distincts dans  $\mathcal{M}_{g,1}$  comme on le vérifie en regardant leur effet sur  $\pi_1(\Sigma_{g,1}, x_0)$ ). Le difféomorphisme  $\tilde{\gamma}$  est alors par définition  $T_{\gamma^+} \circ T_{\gamma^-}^{-1}$ . On vérifie sans peine qu'un isotopie de  $\gamma$  induit une isotopie au niveau des application associées.

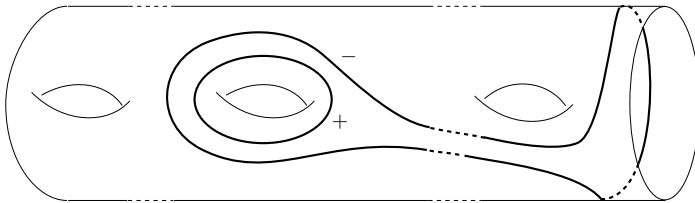


Figure 3. Morphisme  $\tilde{\alpha}_i$ .

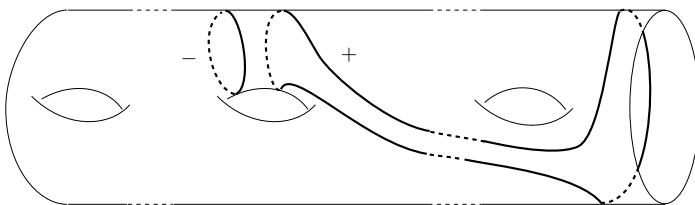


Figure 4. Morphisme  $\tilde{\beta}_i$ .

Nous pouvons alors évaluer

$$d(T_{\zeta}^{2-2g}) = \sum_{i=g}^1 d([\tilde{\beta}_i^{-1}, \tilde{\alpha}_i^{-1}]).$$

Par définition du morphisme  $J$  (voir [Joh80a]), on a  $J(\tilde{\alpha}_i) = (2g - 2)a_i$  et  $J(\tilde{\beta}_i) = (2g - 2)b_i$ , et en utilisant le résultat de la proposition 4.1,

$$\begin{aligned} d([\tilde{\beta}_i^{-1}, \tilde{\alpha}_i^{-1}]) &= -2\omega(J(\tilde{\alpha}_i)J(\tilde{\beta}_i)) \\ &= -2(2g - 2)^2\omega(a_i, b_i) \\ &= -2(2g - 2)^2. \end{aligned}$$

Et finalement pour  $g \geq 2$ ,

$$d(g) = 4g(g - 1).$$

Par la stabilité de  $d$  et par le calcul de la proposition 4.2,  $d(1) = 0$ . Notre fonction  $d$  coïncide donc avec la fonction construite par Morita dans [Mor89b].

*Remarque 4.3.* — Ni le coefficient  $\lambda$  ni la classe  $m$  ne jouent de rôle dans l'évaluation du morphisme  $d$ . Ce morphisme provient fondamentalement du fait que l'image de la classe  $2\omega \in H^2(\text{Hom}(H, \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$  par le morphisme induit par l'application canonique  $\mathcal{T}_{g,1} \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Z})$  est nulle. C'est le manque d'informations sur  $H^2(\mathcal{T}_{g,1}; \mathbb{Z})$  qui oblige, pour démontrer ce fait, à effectuer un détour par  $H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$ .

## 5. Annexe : relations de Morita et de la lanterne.

Dans cette annexe nous démontrons la relation du lemme 3 et de la lanterne.

### 5.1. Relation de Morita.

La relation ci-dessous à été proposée par Morita dans [Mor89b], mais sans démonstration et avec une légère erreur que nous corrigeons.

LEMME 4. — Pour  $g \geq 2$ , on a la relation

$$(T_\zeta)^{2-2g} = \prod_{i=g}^1 [\tilde{\beta}_i^{-1}, \tilde{\alpha}_i^{-1}].$$

*Démonstration.* — Rappelons que sur la surface  $\Sigma_g$  nous avons fixé un disque  $D^2$  et un point de base  $x_0 \in \partial D^2$ . Désignons par  $\mathcal{M}_{g,*}$  le groupe  $\pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_g; \{x_0\}))$  et par  $\mathcal{M}_g$  le groupe  $\pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_g))$ . Soit enfin  $T_1\Sigma_g$  le fibré en cercles canonique de la surface  $\Sigma_g$  et  $v$  le vecteur unitaire au point de base  $x_0$  qui est tangent au bord orienté de  $D^2$ . Nous avons alors trois fibrations localement triviales (cf. [Cerf61])

$$\begin{aligned} \text{Diff}^+(\Sigma_g) &\longrightarrow T_1\Sigma_g \\ f &\longmapsto T_1f(v) \end{aligned}$$



de fibre  $\text{Diff}^+(\Sigma_g; \text{rel } D^2)$ ,

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff}^+(\Sigma_g) & \longrightarrow & \Sigma_g \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array}$$

de fibre  $\text{Diff}^+(\Sigma_g; \text{rel } \{x_0\})$  et enfin  $T_1\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ , de fibre  $S^1$ . Par construction ces fibrations s'insèrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff}^+(\Sigma_g) & \longrightarrow & T_1\Sigma_g \\ \parallel & & \downarrow \\ \text{Diff}^+(\Sigma_g) & \longrightarrow & \Sigma_g. \end{array}$$

Pour  $g \geq 2$ , Earle et Eells [Ea-Ee67] ont montré que les composantes connexes de  $\text{Diff}(\Sigma_g)$  sont contractiles, par conséquent les suites exactes longues d'homotopie de ces fibrations induisent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{Z} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 \longrightarrow & \pi_1(T_1\Sigma_g) & \xrightarrow{\tilde{k}} & \mathcal{M}_{g,1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_g & \longrightarrow 1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\ 1 \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_g) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g,*} & \longrightarrow & \mathcal{M}_g & \longrightarrow 1. \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & 1 & & 1 & & & \end{array}$$

Remarquons qu'avec les conventions usuelles sur les compositions des chemins et sur les compositions des fonctions, les applications  $\tilde{k}$  et  $k$  sont naturellement des anti-morphismes de groupes.

Le groupe  $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$  est un groupe à un relateur  $\prod_{1 \leq i \leq g} [\alpha_i, \beta_i]$ , et celui ci-est précisément le bord de la surface orientée  $\Sigma_{g,1}$ , mais avec l'orientation opposée à l'orientation de bord. L'orientation de  $\Sigma_g$  nous fournit aussi un générateur privilégié  $t$  de  $Z = \pi_1(S^1)$  et la théorie des extensions centrales nous dit alors que si  $\sigma : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(T_1\Sigma)$  est une section ensembliste de l'extension, alors l'élément  $\prod_{1 \leq i \leq g} [\sigma(\alpha_i), \sigma(\beta_i)]$  s'écrit de manière unique  $t^n$  pour un  $n \in \mathbb{Z}$  et que  $n$  est la classe de

l'extension dans  $H^2(\pi_1(\Sigma_g); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Dans notre situation l'entier  $n$  n'est autre que  $2 - 2g$ , la caractéristique d'Euler de la surface.

D'après [Joh79],  $t$  s'identifie dans  $\mathcal{M}_{g,1}$  au twist  $T_\zeta$ , et d'après Nielsen l'antimorphisme  $i : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathcal{M}_g$  envoie le lacet  $\gamma$  sur le seul élément de  $\mathcal{M}_{g,*}$  dont l'action sur  $\pi_1(\Sigma)$  est donnée par  $\theta \mapsto \gamma^{-1}\theta\gamma$ . Dans la dernière partie de l'article nous avons construit une application  $\pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{M}_{g,1}$   $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} = T_{\gamma^+} \circ T_{\gamma^-}^{-1}$ , comme les courbes  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  sont isotopes dans  $\Sigma$ , l'image de cette application est contenue dans  $\ker(\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g)$  et on vérifie directement qu'elle relève l'antimorphisme  $i$ . La relation du lemme est alors précisément la relation  $\prod_{1 \leq i \leq g} [\sigma(\alpha_i), \sigma(\beta_i)] = t^{2-2g}$ . La présence de l'inverse dans les commutateurs et le changement dans l'ordre des indices est uniquement dû au fait que  $\tilde{k}$  et  $k$  sont des anti-morphismes.

**5.2. Relation de la lanterne.**

Soit  $D^2$  un disque privé de trois disques et  $\mathcal{M}_{0,4}$  son mapping class group. Désignons les composantes de bord par  $C_0, \dots, C_3$ , le twist le long d'une courbe parallèle au bord  $C_i$  par  $T_i$  et par  $T_{ij}$  le twist le long d'une courbe  $C_{ij}$  qui entoure  $C_i$  et  $C_j$  (cf. figure 5).

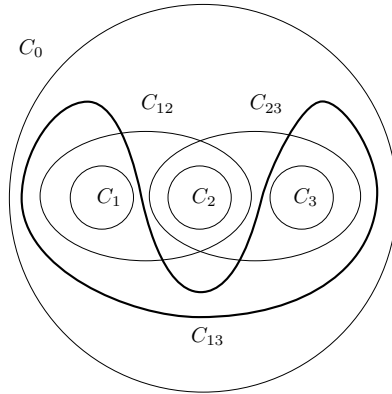


Figure 5. Configuration de la lanterne.

PROPOSITION 5.1 (voir [Joh79]). — On a la relation

$$T_0 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_{12} \circ T_{13} \circ T_{23}.$$

Démonstration. — Le groupe  $\mathcal{M}_{0,4}$  s'identifie naturellement au groupe  $\pi_0(\text{Diff}^+(D^2; \partial D^2, D_1, D_2, D_3))$ , où  $\text{Diff}^+(D^2; \partial D^2, D_1, D_2, D_3)$  désigne le

groupe des difféomorphismes qui préservent l'orientation d'un disque  $D^2$  et qui sont l'identité sur  $\partial D^2$  et sur trois disques plongés et deux à deux disjoints,  $D_1, D_2, D_3$ . Ce groupe est naturellement la fibre de la fibration suivante :

$$\begin{aligned} \text{Diff}^+(D^2; \partial D^2) &\longrightarrow B_3(D^2), \\ f &\longmapsto (f(D_1), f(D_2), f(D_3)), \end{aligned}$$

où  $B_3(D^2)$  désigne l'espace des configurations de trois disques disjoints à l'intérieur de  $D^2$ . Par un théorème de Smale [Sma68], le groupe  $\text{Diff}^+(D^2; \partial D^2)$  est contractile, en particulier la suite exacte longue de la fibration ci-dessus induit un isomorphisme

$$\pi_1(B_3(D^2)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\text{Diff}^+(D^2; \partial D^2, D_1^2, D_2^2, D_3^2)).$$

Le groupe  $\pi_1(B_3(D^2))$  s'identifie naturellement au groupe des tresses pures parallélisées, c'est-à-dire au groupe des tresses dans lequel les « fils » sont remplacés par des bandes. Par exemple l'effet de  $T_i$  sur la bande  $i$  est représenté sur la figure 6 (les autres bandes restent fixes).

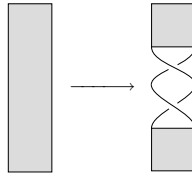


Figure 6. Effet de  $T_i$  sur la bande  $i$ .

En nous restreignant au centre de chaque bande nous obtenons une surjection  $\pi_1(B_3(D^2)) \rightarrow P_3 \rightarrow 1$ , où  $P_3$  est le groupe des tresses pures d'Artin, et dont le noyau est le groupe engendré par les trois twists  $T_1, T_2, T_3$ .

On obtient alors une extension centrale :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \pi_1(B_3(D^2)) \longrightarrow P_3 \rightarrow 1.$$

De plus, en relevant les chemins suivis par les centres par les chemins des disques qui sont translatés d'un disque de petit rayon centré à l'origine, on vérifie que l'extension est scindable.

La projection d'un twist de Dehn sur  $\mathbb{Z}^3$  se calcule en regardant le nombre de tours qu'effectue la courbe autour de chacun des disques. Ainsi

la courbe  $C_0$  entourant les trois disques une fois, la projection de  $T_0$  sur  $\mathbb{Z}^3$  est  $(1, 1, 1)$ , et de même celles de  $T_{12}, T_{13}$  et  $T_{23}$  sont respectivement  $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$  et  $(0, 1, 1)$ . En projetant la relation de la lanterne sur  $\mathbb{Z}^3$  nous obtenons la relation  $(1, 1, 1) + (0, 0, 1) + (0, 1, 0) + (1, 0, 0) = (0, 1, 1) + (1, 0, 1) + (1, 1, 0)$  qui est trivialement vérifiée. Dans  $P_3$  les twists  $T_1, T_2$  et  $T_3$  sont nuls, la relation de la lanterne découle finalement de l'égalité des tresses de la figure 6, où à gauche on a représenté l'image de  $T_0$  et à droite l'image de la composée  $T_{12}T_{13}T_{23}$  :

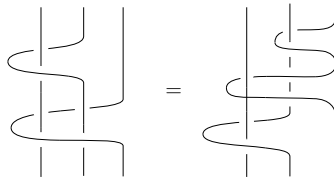


Figure 7. Relation de lanterne dans  $P_3$ .

Relation que nous pouvons également démontrer en utilisant la présentation d'Artin du groupe de tresses. Désignons par  $s_1$  et  $s_2$  les générateurs du groupe des tresses de la figure 8.



Figure 8. Générateurs d'Artin.

Alors  $T_0$  se projette sur l'élément  $s_2s_1^2s_2s_1^2$  et le produit  $T_{12}T_{13}T_{23}$  sur  $s_1^2s_2s_1^2s_2$  ; en utilisant la relation de tresses  $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$  on obtient bien

$$s_2s_1^2s_2s_1^2 = s_2s_1s_2s_1s_2s_1 = s_1s_2s_1s_2s_1s_2 = s_1^2s_2s_1^2s_2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Bro94] K.S. BROWN, Cohomology of Groups, Graduate Texts in Mathematics, 87, Springer-Verlag, 1994.  
 [Cerf61] J. CERF, Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. Math. France, Gauthier-Villars, 1961.  
 [Ea-Ee67] C.J. EARLE, J. EELLS, The Diffeomorphism Group of a Compact Riemann Surface, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 557-559.

- [Joh79] D. JOHNSON, Homeomorphisms of a Surface which Act Trivially on Homology, Proc. Amer. Math. Soc., 75 (1979), 119–125.
- [Joh80a] D. JOHNSON, An Abelian Quotient of the Mapping Class Group, Math. Ann., 249 (1980), 225–242.
- [Joh80b] D. JOHNSON, Conjugacy Relations in Subgroups of the Mapping Class Group and a Group-Theoretic Description of the Rochlin Invariant, Math. Ann., 249 (1980), 243–263.
- [Joh85a] D. JOHNSON, The Structure of the Torelli Group II : a Characterization of the Group Generated by Twists on Bounding Curves, Topology, 24 (1985), 113–126.
- [Joh85b] D. JOHNSON, The Structure of the Torelli group III : the Abelianization of  $\mathcal{T}$ , Topology, 24 (1985), 127–144.
- [Lan66] S. LANG, Rapport sur la cohomologie des groupes, Math. Lecture Note Series, 4, W.A. Benjamin, 1966.
- [Mey73] W. MEYER, Die Signatur von Flächenbündeln, Math. Ann., 201 (1973), 239–264.
- [Mor89a] S. MORITA, Casson's Invariant for Homology 3–Spheres and Characteristic Classes of Surface Bundles I, Topology, 28 (1989), 305–323.
- [Mor89b] S. MORITA, Families of Jacobian Manifolds and Characteristic Classes of Surface Bundles 1, Ann. Inst. Fourier, 39-3 (1989), 777–810.
- [Nil27] J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I, Acta Math., 50 (1927), 189–358.
- [Pit99a] W. PITTSCH, Un calcul élémentaire de  $H_2(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbb{Z})$  pour  $g \geq 4$ , C.R.A.S., Sér. 1 Math., 329 (1999).
- [Pit99b] W. PITTSCH, Extension verselles des groupes nilpotents libres, préprint Ecole Polytechnique (1999).
- [Rol90] D. ROLFSEN, Knots and Links, Math. Lecture Series, 7, Publish or Perish, Inc., 1990 (2nd ed.).
- [Sma68] S. SMALE, Diffeomorphisms of the 2–Sphere, Proc. Math. Soc., 10 (1959), 621–626.

Manuscrit reçu le 20 avril 2001,  
accepté le 11 mai 2001.

Wolfgang PITTSCH,  
École Polytechnique  
UMR 7640 du CNRS  
Centre de Mathématiques  
91128 Palaiseau Cedex (France).  
pitsch@math.polytechnique.fr