

Conjectura de Poincaré.

Geometria o topologia?

Joan Porti (UAB)

XI Trobada matemàtica

SCM

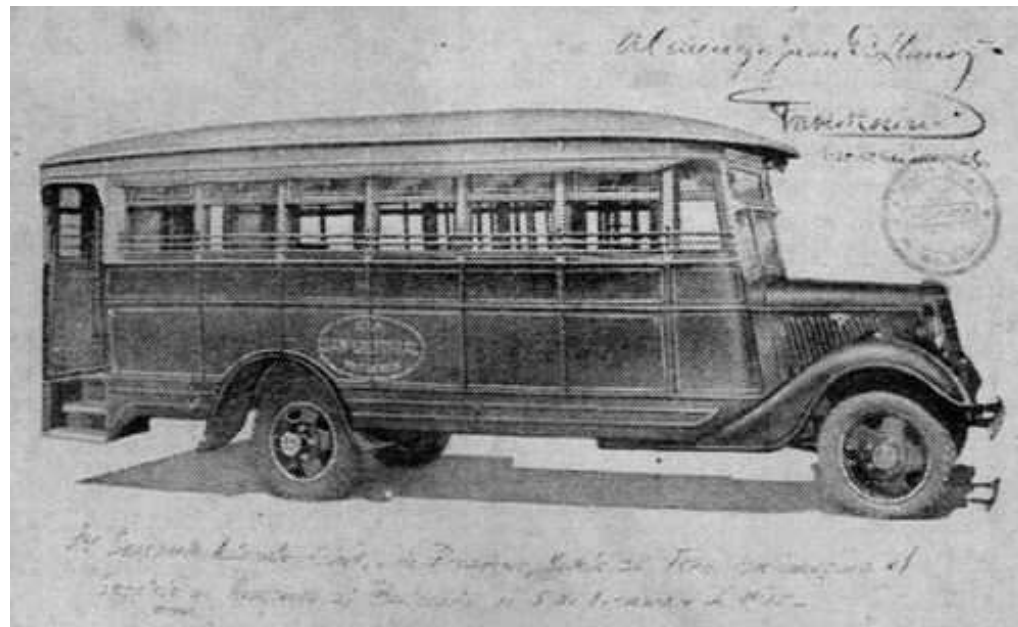
6 de juny de 2008

Jules Henri Poincaré



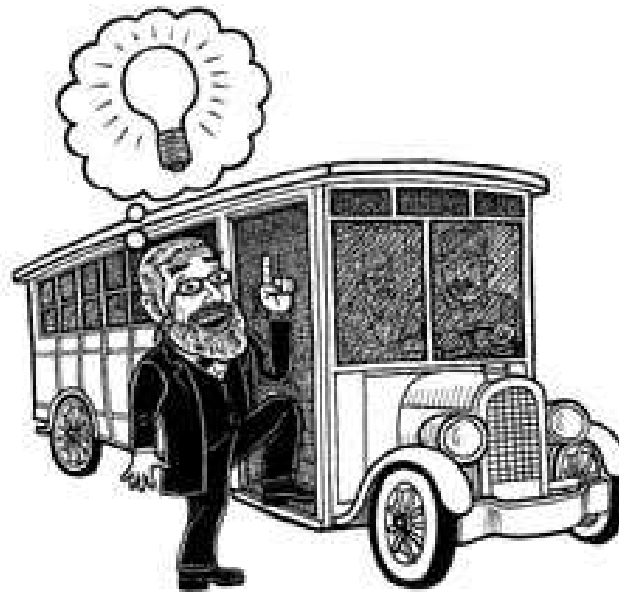
Jules Henri Poincaré

*“...nous montâmes dans un omnibus
pour je ne sais quelle promenade.
Au moment où je mettais le pied
sur le marchepied, l'idée me vint...”*



Jules Henri Poincaré

*“...nous montâmes dans un omnibus
pour je ne sais quelle promenade.
Au moment où je mettais le pied
sur le marchepied, l'idée me vint,...”*



Poincaré i l'analysis situs

- Poincaré, H. **Analysis situs.** J. de l'Éc. Pol. (2) I. 1-123 (1895)

Poincaré i l'analysis situs

- Poincaré, H. **Analysis situs.** J. de l'Éc. Pol. (2) I. 1-123 (1895)
- Poincaré, H. **Complément à l'Analysis situs.** Palermo Rend. 13, 285-343 (1899)

Poincaré i l'analysis situs

- Poincaré, H. **Analysis situs.** J. de l'Éc. Pol. (2) I. 1-123 (1895)
- Poincaré, H. **Complément à l'Analysis situs.** Palermo Rend. 13, 285-343 (1899)
- Poincaré, H. **Second complément à l'analysis situs** Lond. M. S. Proc. 32, 277-308 (1900).

Poincaré i l'analysis situs

- Poincaré, H. **Analysis situs.** J. de l'Éc. Pol. (2) I. 1-123 (1895)
- Poincaré, H. **Complément à l'Analysis situs.** Palermo Rend. 13, 285-343 (1899)
- Poincaré, H. **Second complément à l'analysis situs** Lond. M. S. Proc. 32, 277-308 (1900).
- Poincaré, H. **Sur certaines surfaces algébriques. III^{ième} complément à l'analysis situs.** S. M. F. Bull. 30, 49-70 (1902).

Poincaré i l'analysis situs

- Poincaré, H. **Analysis situs.** J. de l'Éc. Pol. (2) I. 1-123 (1895)
- Poincaré, H. **Complément à l'Analysis situs.** Palermo Rend. 13, 285-343 (1899)
- Poincaré, H. **Second complément à l'analysis situs** Lond. M. S. Proc. 32, 277-308 (1900).
- Poincaré, H. **Sur certaines surfaces algébriques. III^{ième} complément à l'analysis situs.** S. M. F. Bull. 30, 49-70 (1902).
- Poincaré, H. **Sur l'Analysis situs.** C. R. 133, 707-709 (1902).

Poincaré i l'analysis situs

- Poincaré, H. **Analysis situs.** J. de l'Éc. Pol. (2) I. 1-123 (1895)
- Poincaré, H. **Complément à l'Analysis situs.** Palermo Rend. 13, 285-343 (1899)
- Poincaré, H. **Second complément à l'analysis situs** Lond. M. S. Proc. 32, 277-308 (1900).
- Poincaré, H. **Sur certaines surfaces algébriques. III^{ième} complément à l'analysis situs.** S. M. F. Bull. 30, 49-70 (1902).
- Poincaré, H. **Sur l'Analysis situs.** C. R. 133, 707-709 (1902).
- Poincaré, H. **Cinquième complément à l'analysis situs.** Palermo Rend. 18, 45-110 (1904)

Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complément à l'Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

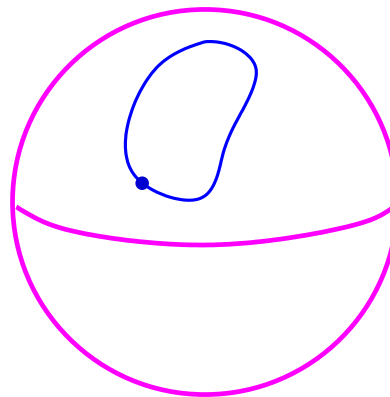
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complément à l'Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$\pi_1(M^3) = 0:$$



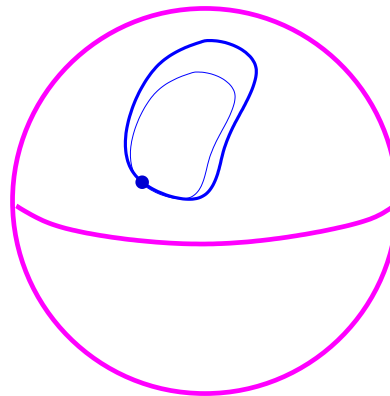
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complément à l’Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$\pi_1(M^3) = 0:$$



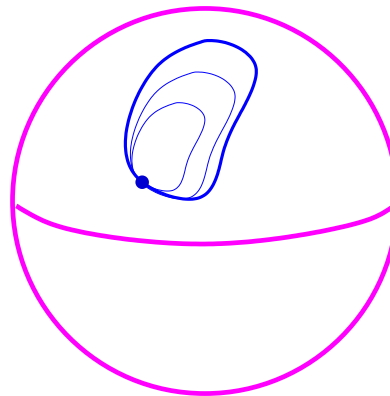
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complement à l’Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$\pi_1(M^3) = 0:$$



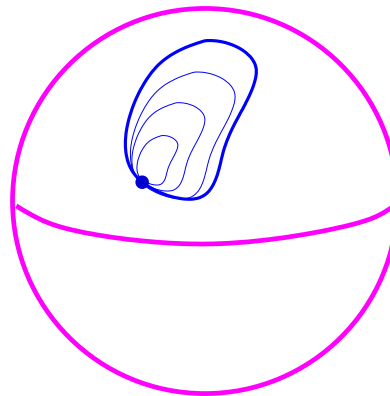
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complement à l’Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$\pi_1(M^3) = 0:$$



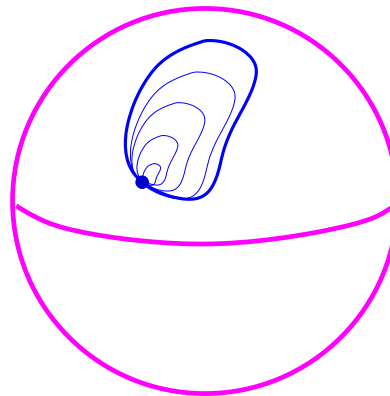
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complement à l’Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$\pi_1(M^3) = 0:$$



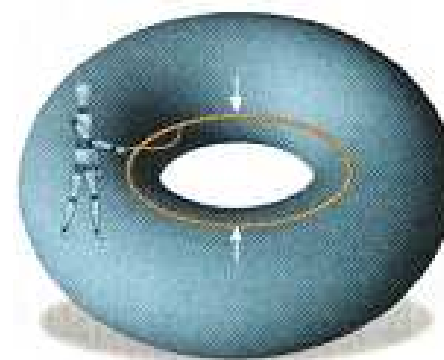
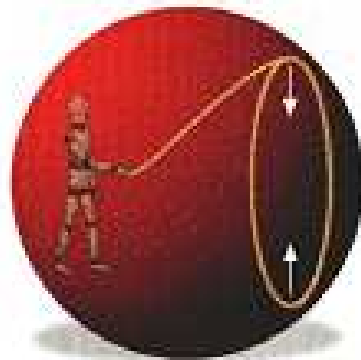
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complément à l'Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

En dim 2, $\pi_1(F^2) = 0$ caracteritza l'esfera entre les superfícies.



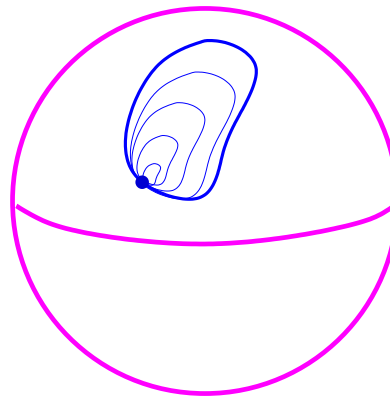
Pregunta de Poincaré

A “Cinquième complement à l’Analysis Situs” (1904):

Sigui M^3 varietat tancada tridimensional.
Si M^3 és simplement connexa ($\pi_1(M^3) = 0$),
és M^3 homeomorfa a S^3 ?

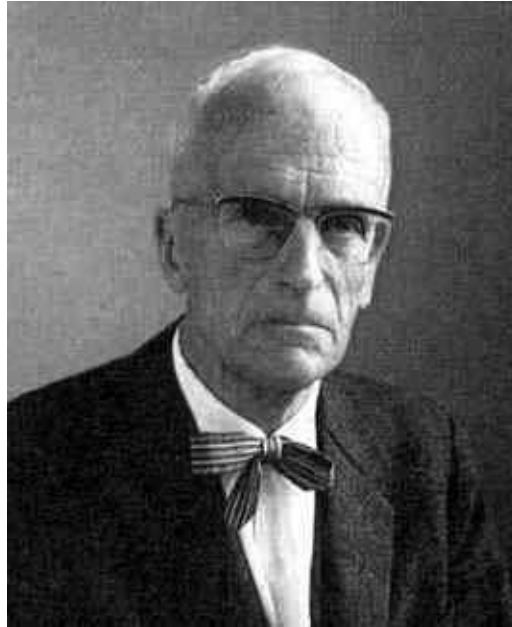
$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$\pi_1(M^3) = 0:$$



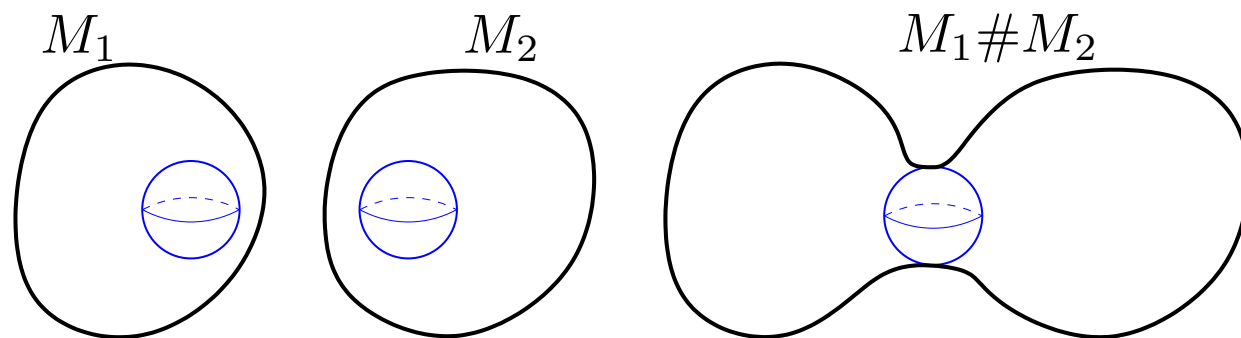
...mais cette question nous entrainerait trop loin.

Kneser i la suma connexa (1929)



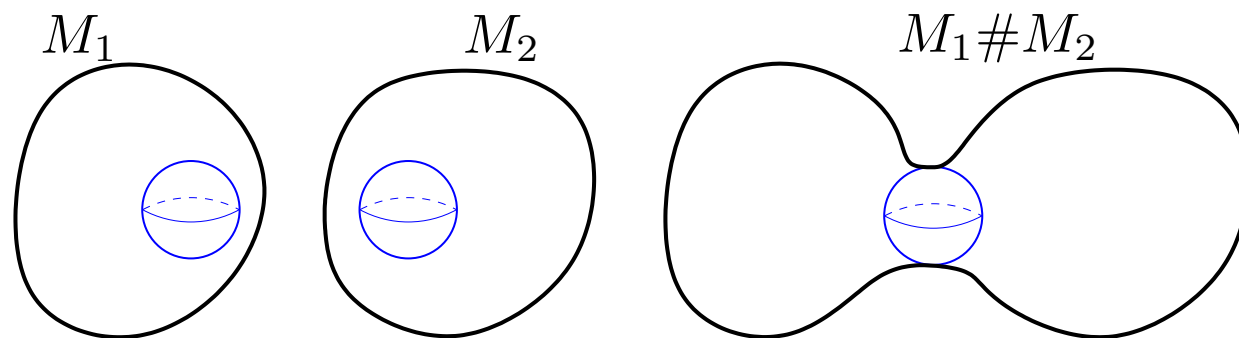
Hellmut Kneser (1898-1973)

Kneser i la suma connexa (1929)



$$M_1 \# M_2 = (M_1 - B^3) \cup_{\partial} (M_2 - B^3)$$

Kneser i la suma connexa (1929)



$$M_1 \# M_2 = (M_1 - B^3) \cup_{\partial} (M_2 - B^3)$$

Teorema de Kneser (1929) M^3 tancada i orientable

$$\implies M^3 \cong M_1^3 \# \cdots \# M_k^3 .$$

$M_1^3, \dots, M_k^3$ primeres i úniques.

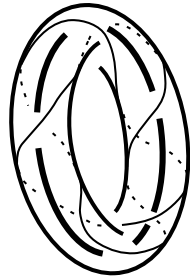
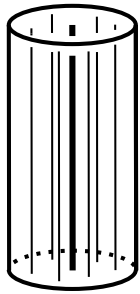
Seifert i les varietats fibrades (1933)



Herbert Seifert (1907-1996)

Seifert i les varietats fibrades (1933)

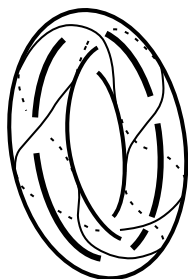
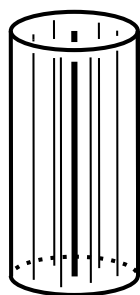
Varietats particionades en cercles de models locals:



enganxem la base i la tapa del cilindre
per una $2\pi \frac{p}{q}$ -rotació, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Seifert i les varietats fibrades (1933)

Varietats particionades en cercles de models locals:



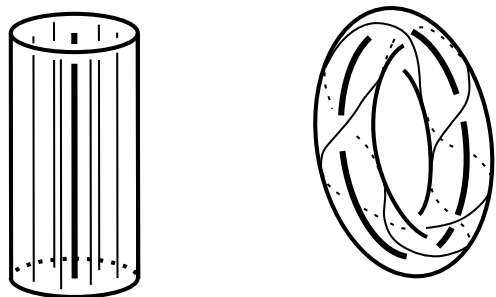
enganxem la base i la tapa del cilindre
per una $2\pi\frac{p}{q}$ -rotació, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

H. Seifert (1933): Classificació de les varietats fibrades de Seifert.

En particular, satisfan la conjectura de Poincaré

Seifert i les varietats fibrades (1933)

Varietats particionades en cercles de models locals:



enganxem la base i la tapa del cilindre
per una $2\pi\frac{p}{q}$ -rotació, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

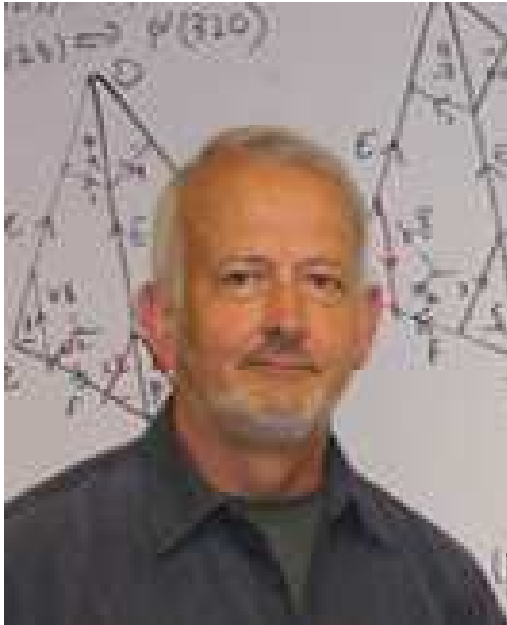
H. Seifert (1933): Classificació de les varietats fibrades de Seifert.

En particular, satisfan la conjectura de Poincaré

Exemples:

- $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$
- $S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\}$ fibració de Hopf: $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \cong S^2$

Jaco-Shalen i Johansson (1979)



W.H. Jaco
(1940)



P.B. Shalen
(1946)



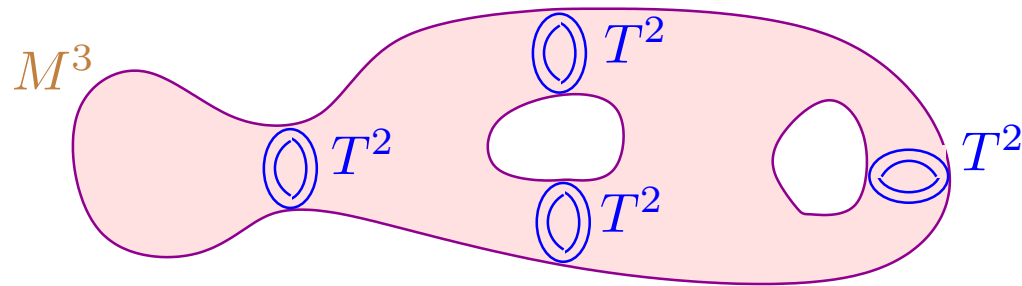
K. Johansson
(1948)

Jaco-Shalen i Johansson (1979)

Teorema de descomposició en tors (JSJ 1979).

M^3 primera, tancada i orientable.

Hi ha una família canònica de tors T^2 que tallen M^3
en trossos que són o bé fibrats de Seifert o bé simples.



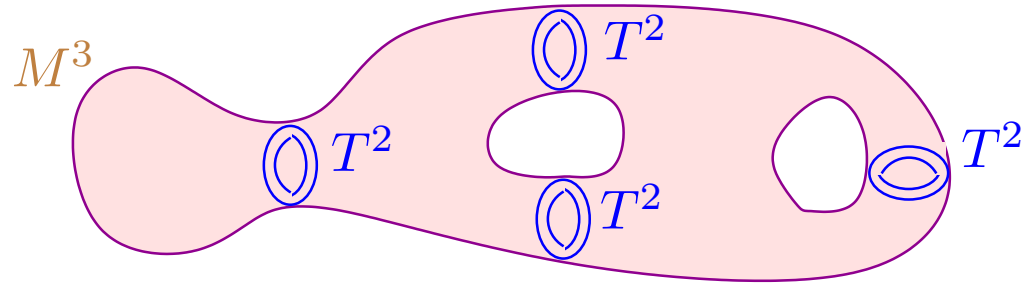
N simple: no és Seifert i cada $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \subset \pi_1(N^3)$ ve de $\pi_1(\partial N^3)$.

Jaco-Shalen i Johansson (1979)

Teorema de descomposició en tors (JSJ 1979).

M^3 primera, tancada i orientable.

Hi ha una família canònica de tors T^2 que tallen M^3
en trossos que són o bé fibrats de Seifert o bé simples.



N simple: no és Seifert i cada $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \subset \pi_1(N^3)$ ve de $\pi_1(\partial N^3)$.

Conjectura de Thurston: simple $\Rightarrow$ hiperbòlica.

Hiperbòlica: $\text{int}(M^3)$ mètrica de Riemann completa curvatura $\equiv -1$

Conjectura de geometrització de Thurston



W.P. Thurston (1946).

Conjectura de geometrització de Thurston

M^3 tancada admet una descomposició canònica
en trossos geomètrics

- Descomposició canònica: suma connexa i tors JSJ
- Varietat geomètrica: mètrica localment homogènia.
(dos punts qualsevol tenen entorns isomètrics)

Conjectura de geometrització de Thurston

M^3 tancada admet una descomposició canònica
en trossos geomètrics

- Descomposició canònica: suma connexa i tors JSJ
- Varietat geomètrica: mètrica localment homogènia.
(dos punts qualsevol tenen entorns isomètrics)
- L. Bianchi (1897): classificació local de les mètriques localment homogènies en dimensió tres.
- Geomètrica $\Leftrightarrow$ fibrada de Seifert, hiperbòlica $\circ T^2 \rightarrow M^3 \rightarrow S^1$.

Ex: $S^3, T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ (fib. Seifert i homogènies)

Conjectura de geometrització de Thurston

M^3 tancada admet una descomposició canònica
en trossos geomètrics

- Descomposició canònica: suma connexa i tors JSJ
- Varietat geomètrica: mètrica localment homogènia.
(dos punts qualsevol tenen entorns isomètrics)
- L. Bianchi (1897): classificació local de les mètriques localment homogènies en dimensió tres.
- Geomètrica $\Leftrightarrow$ fibrada de Seifert, hiperbòlica $\circ T^2 \rightarrow M^3 \rightarrow S^1$.

Ex: $S^3, T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ (fib. Seifert i homogènies)

- Implica Poincaré.

Bianchi i les mètriques homogènies



Luigi Bianchi (1856-1928)

Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$

Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



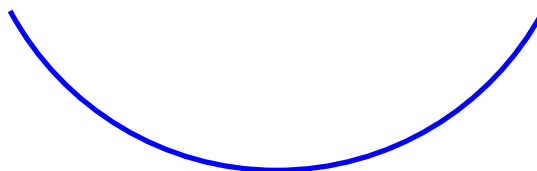
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



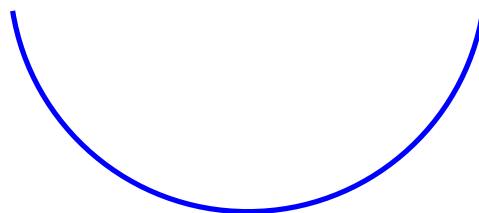
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



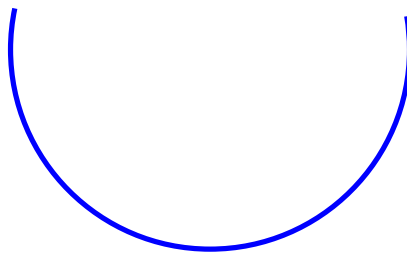
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



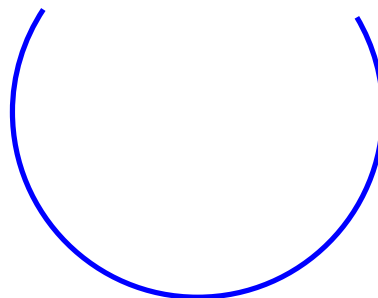
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



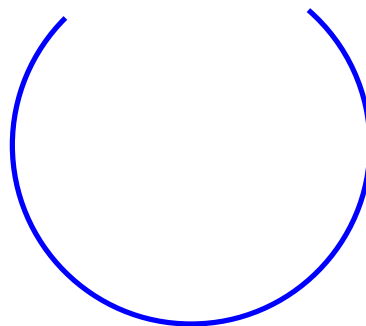
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



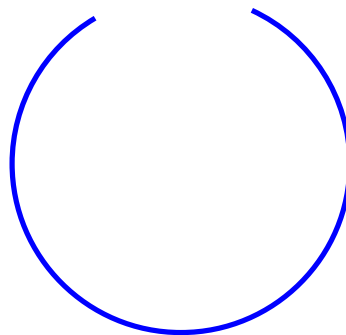
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



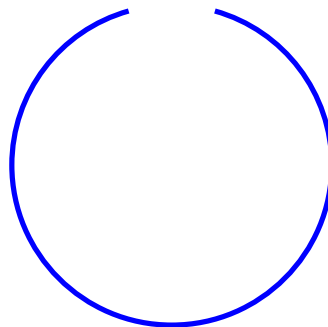
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



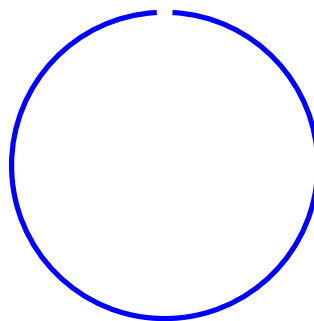
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$



$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

$$x \mapsto x + 1$$



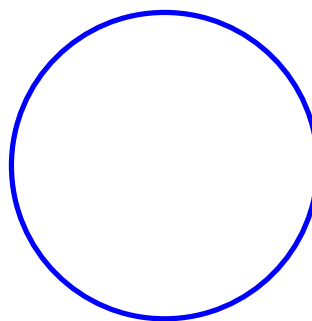
Exemple: el cercle S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

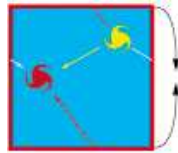


$\mathbb{Z}$ actua per translacions (que preserven la distància).

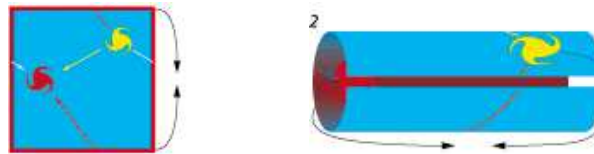
$$x \mapsto x + 1$$



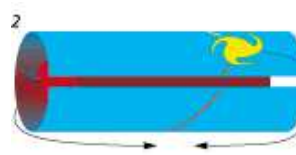
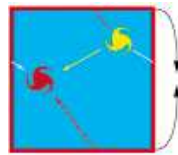
Exemple: el tor T^2



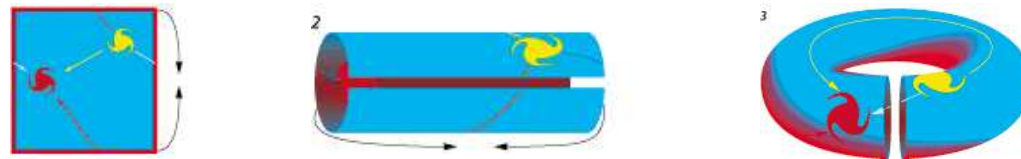
Exemple: el tor T^2



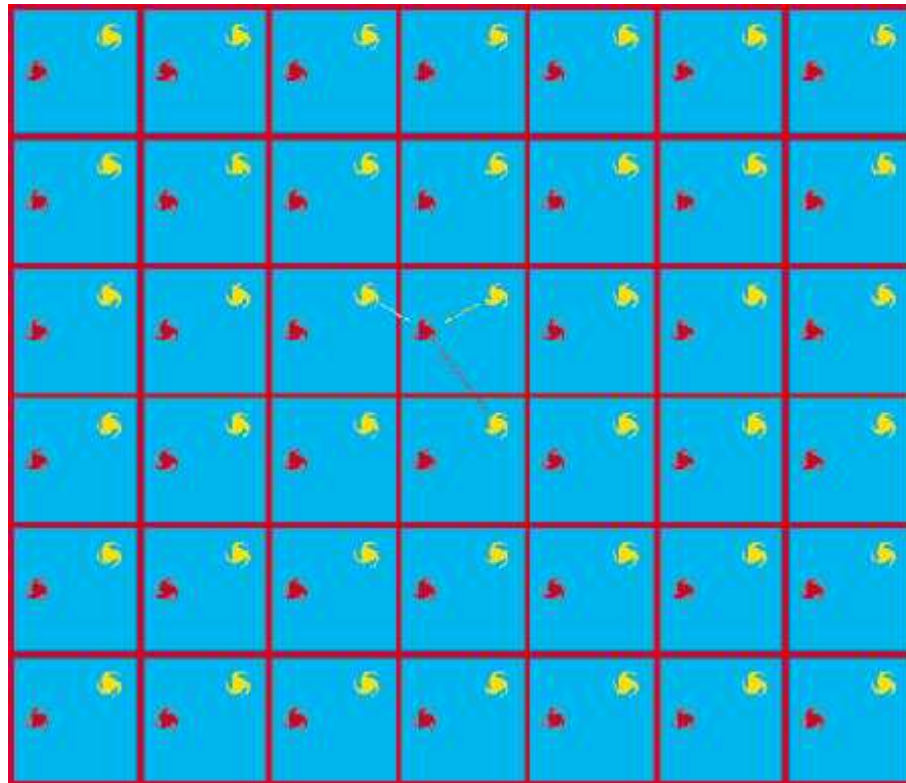
Exemple: el tor T^2



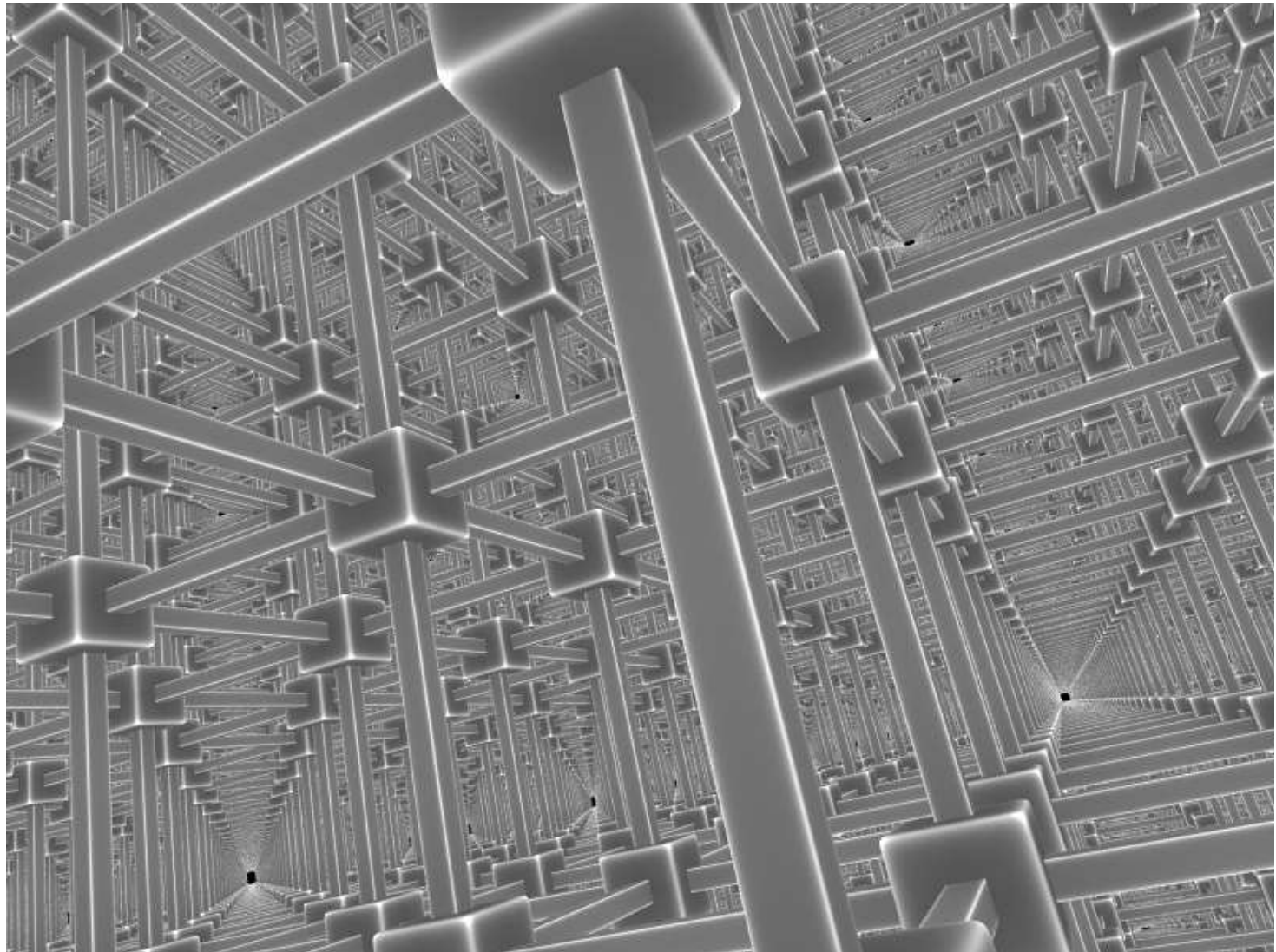
Exemple: el tor T^2



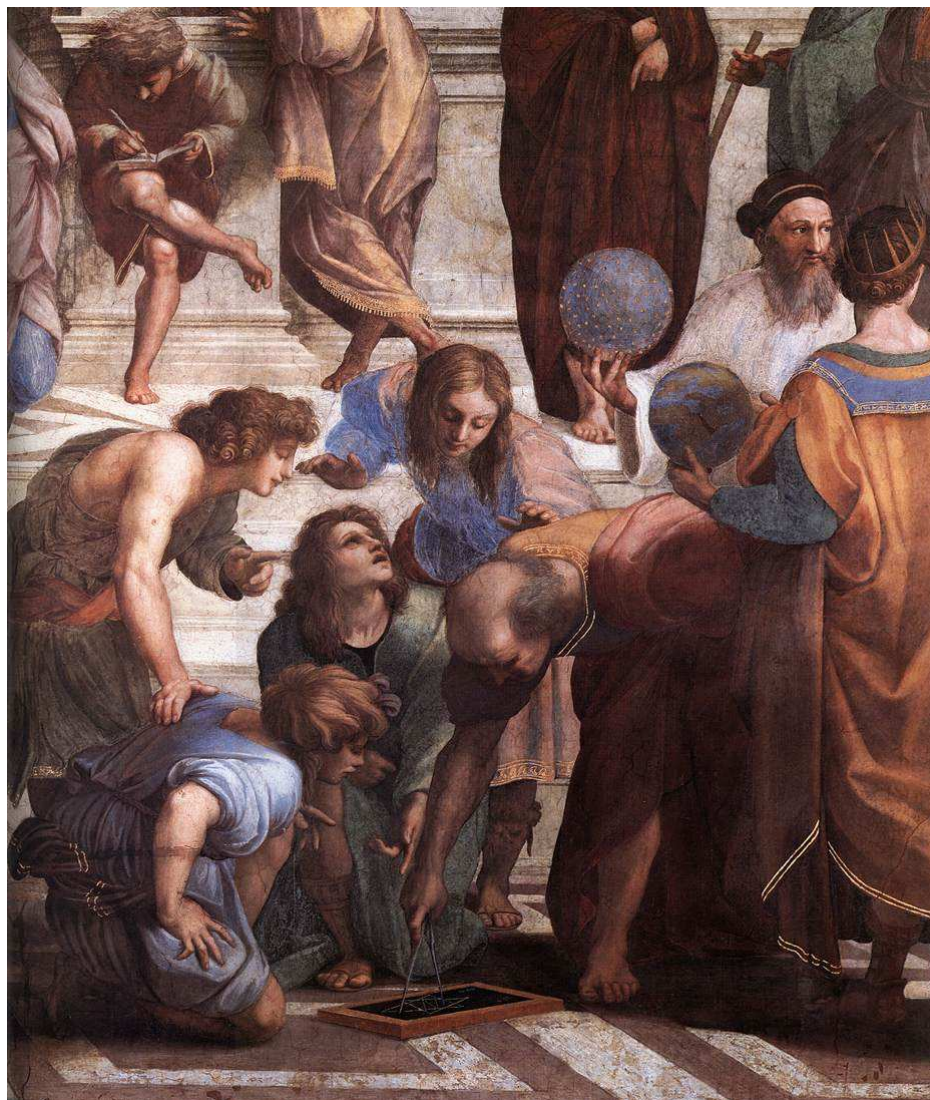
$$T^2 = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$$



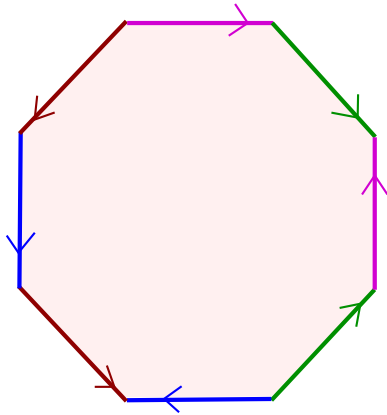
Enrajolament de l'espai euclidià $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$



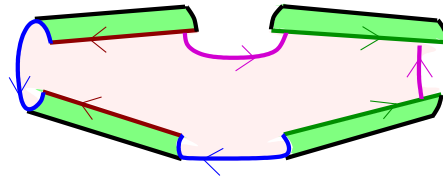
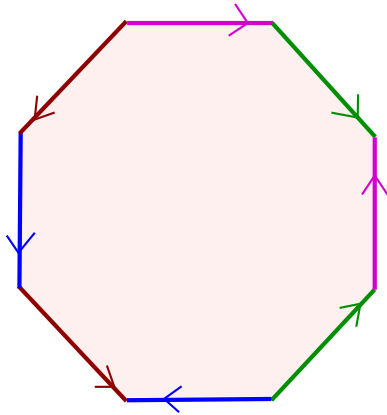
Euclides segons Raffaello Sanzio



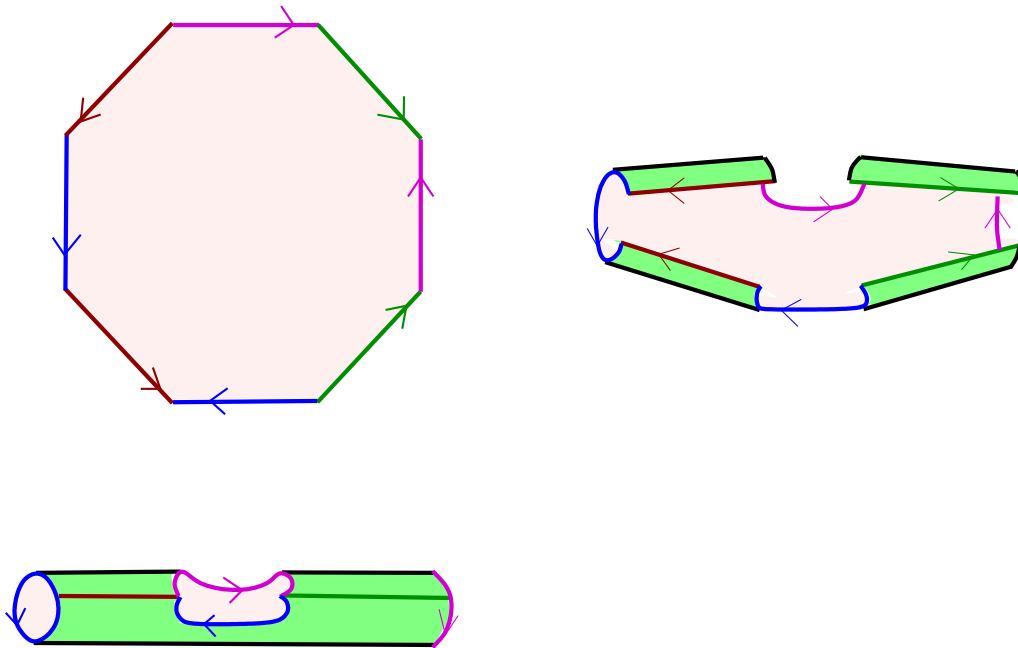
Exemple: superfície F_2



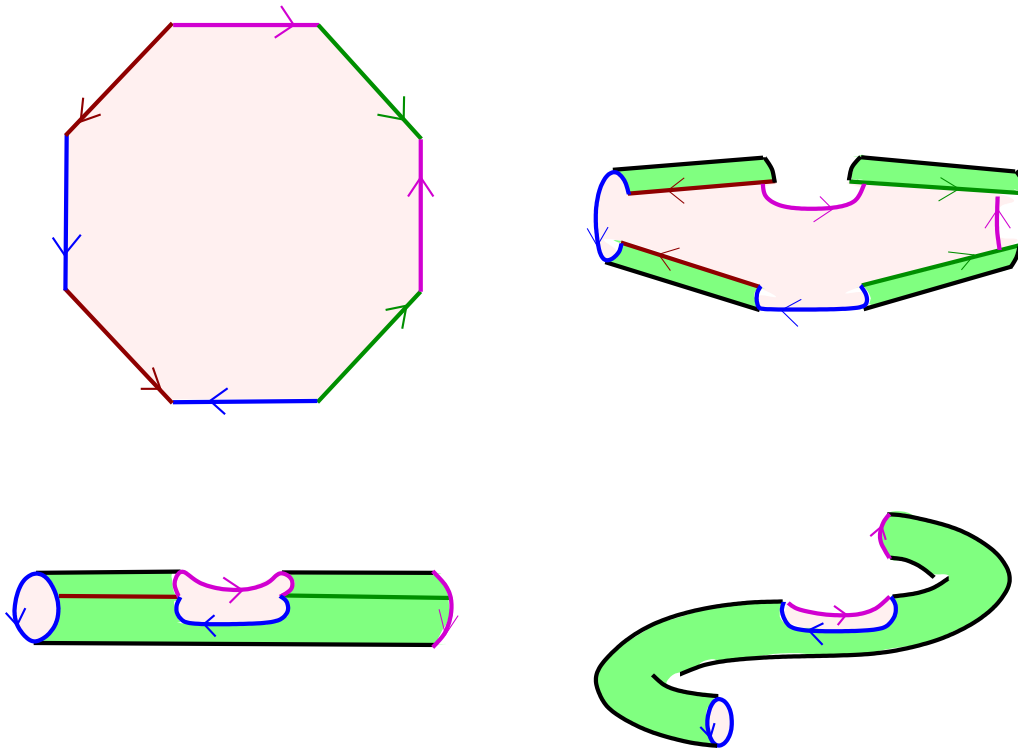
Exemple: superfície F_2



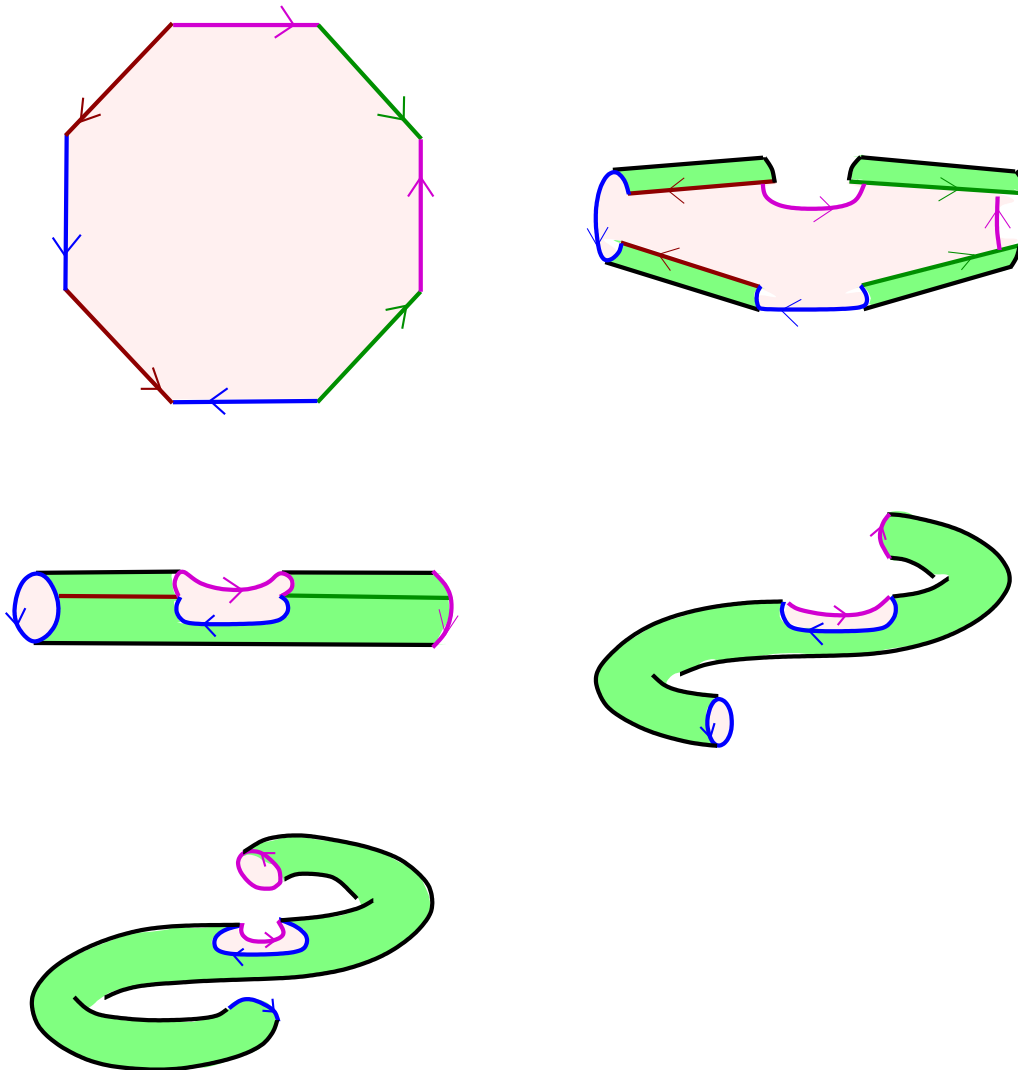
Exemple: superfície F_2



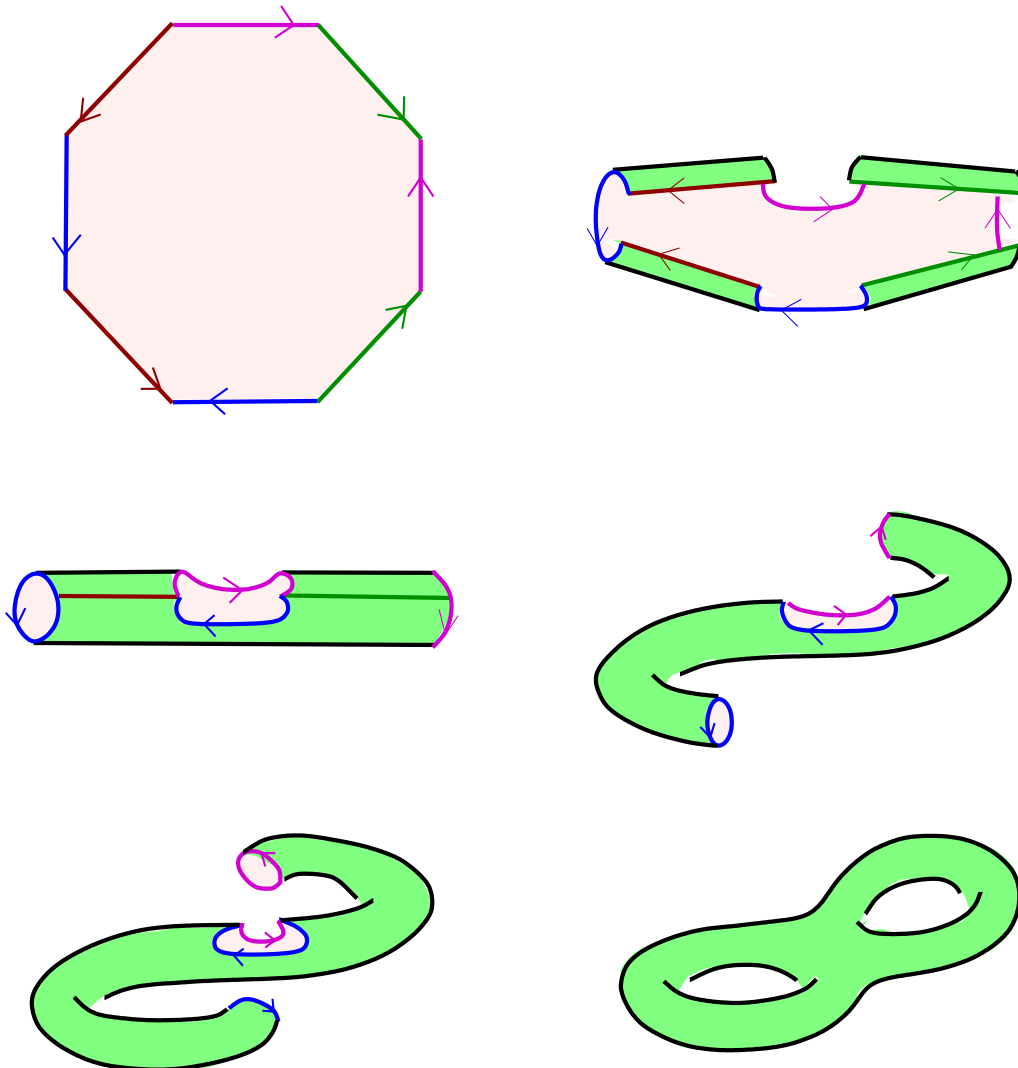
Exemple: superfície F_2



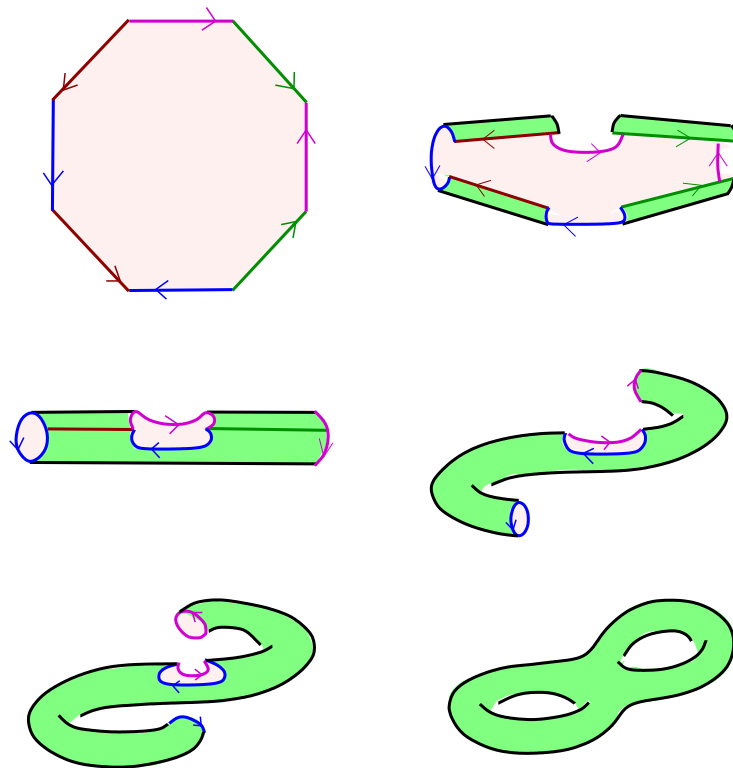
Exemple: superfície F_2



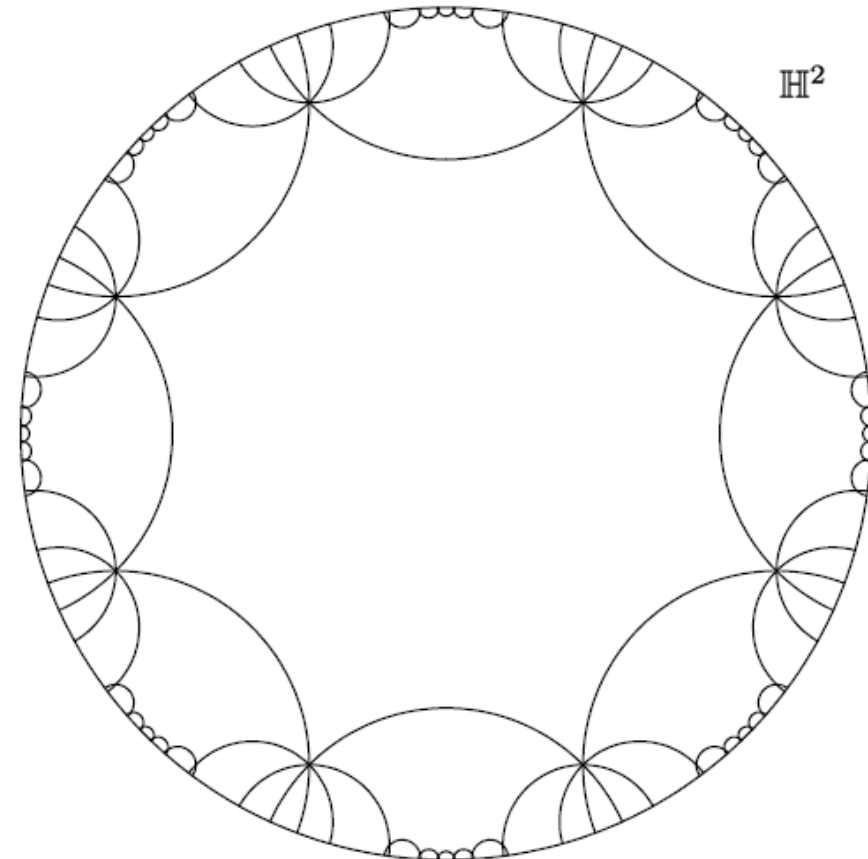
Exemple: superfície F_2



Exemple: superfície F_2

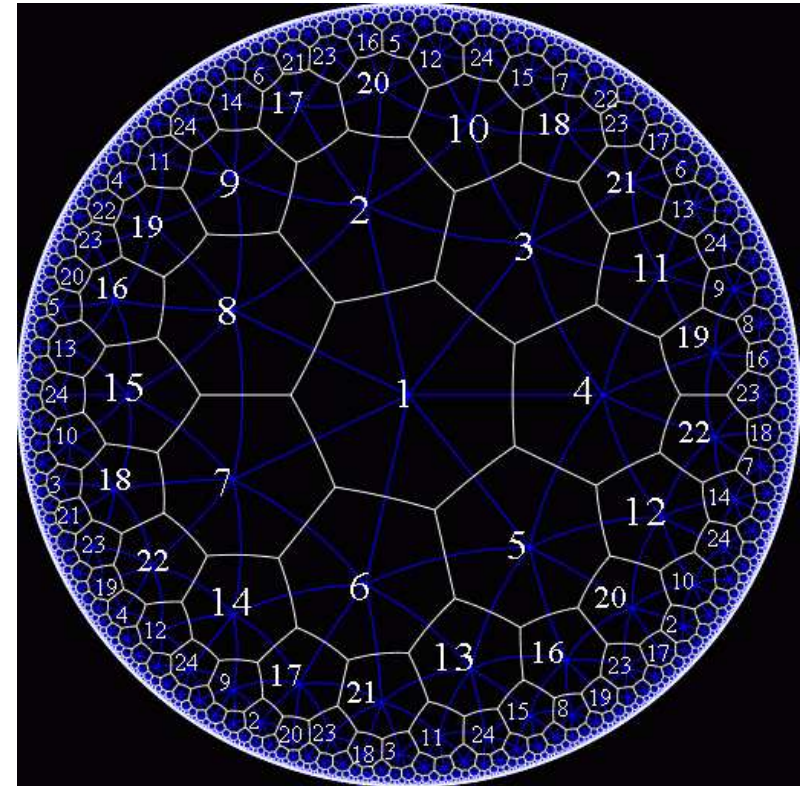
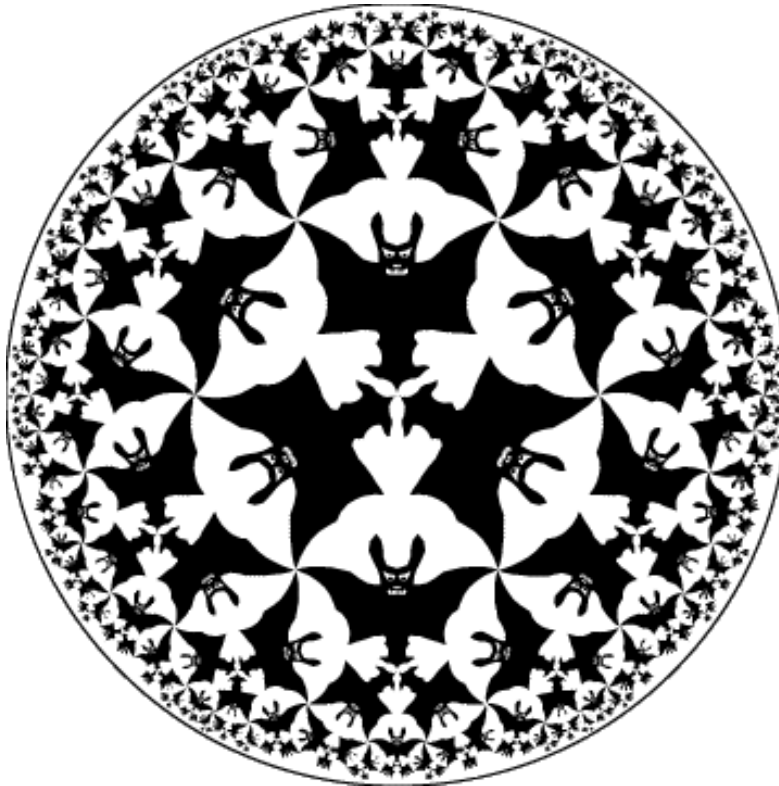


$$F_2 = \mathbf{H}^2 / \Gamma$$



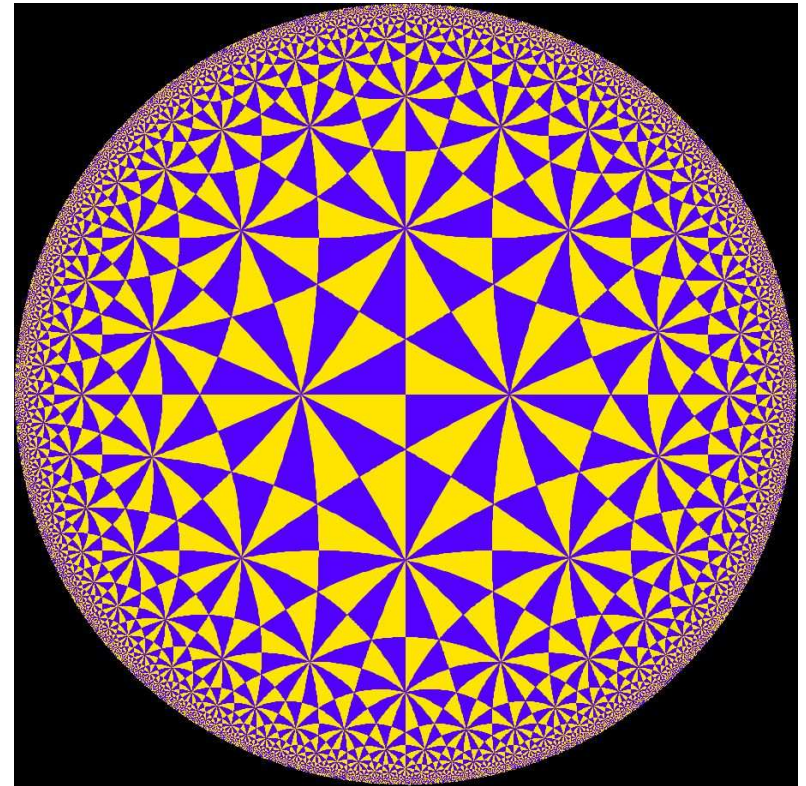
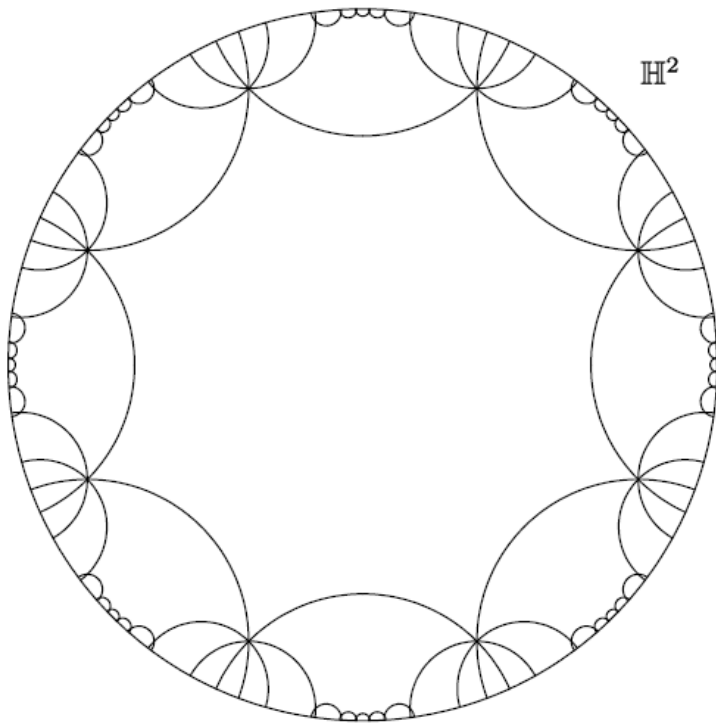
$$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Enrajolaments del pla hiperbòlic



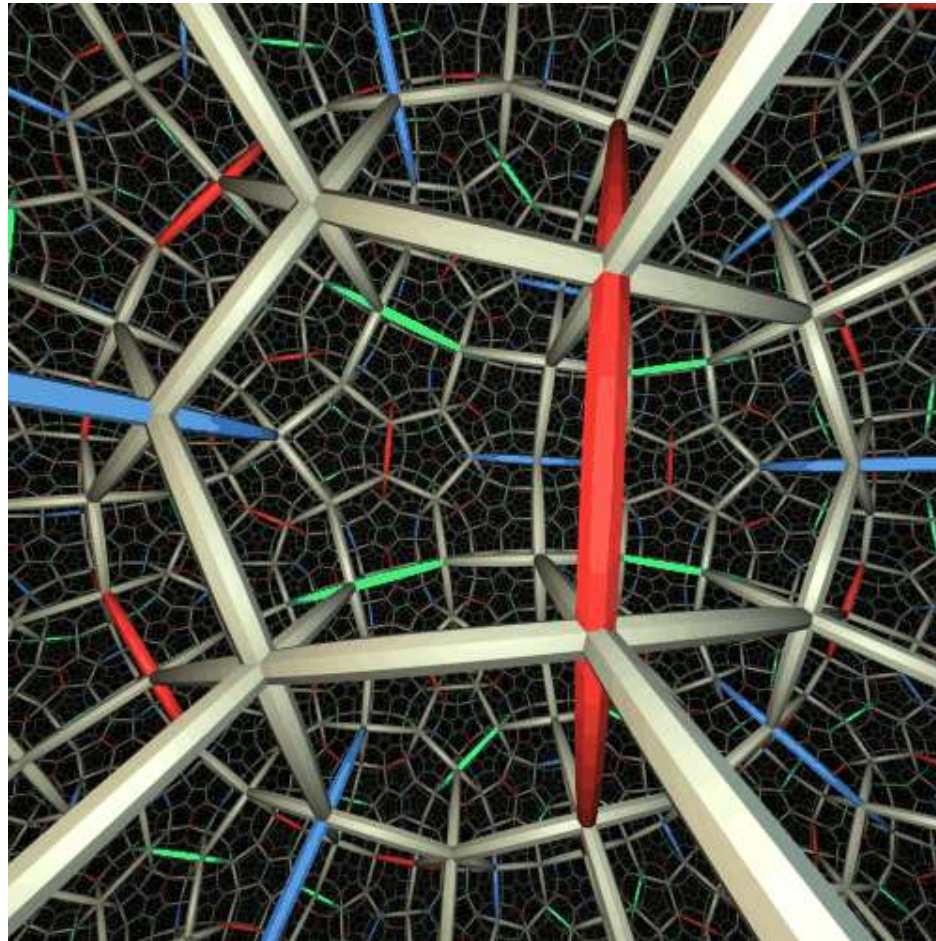
$$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Enrajolaments del pla hiperbòlic



$$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Enrajolament de l'espai hiperbòlic



Dodecàedres regulars d'angles dièdrics rectes.

Varietats de Riemann



Bernhard Riemann(1826-1866)

Varietats de Riemann

Conferència d'habilitació (10 de juny de 1854) a Göttingen.

Ueber
die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Von
B. R i e m a n n.

Sobre les hipòtesis en que es fonamenta la geometria

Varietats de Riemann

Conferència d'habilitació (10 de juny de 1854) a Göttingen.

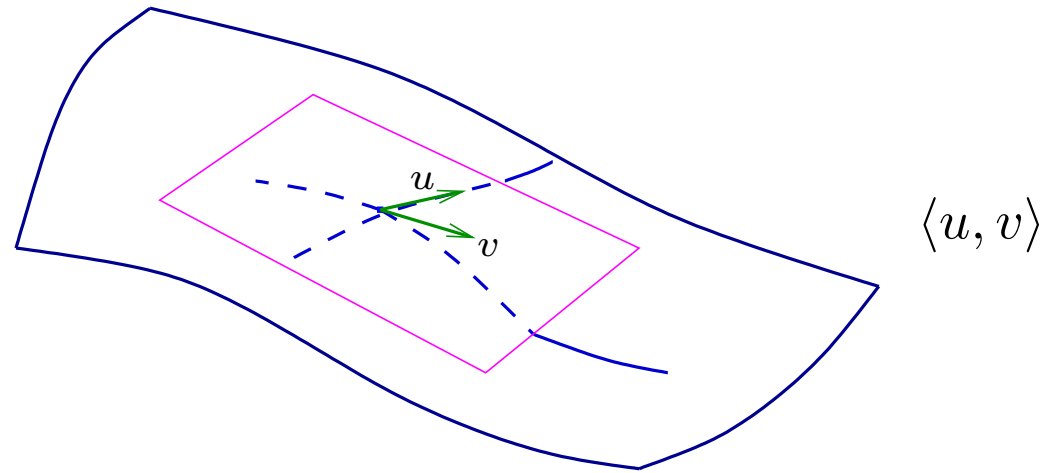
Ueber
die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Von
B. R i e m a n n.

Sobre les hipòtesis en que es fonamenta la geometria

- Text fundacional de la geometria de Riemann
- Adreçat al claustre de la facultat de filosofia. On són els càlculs?
- Desenvolupament posterior del càlcul tensorial.
- Bàsic per la relativitat general.

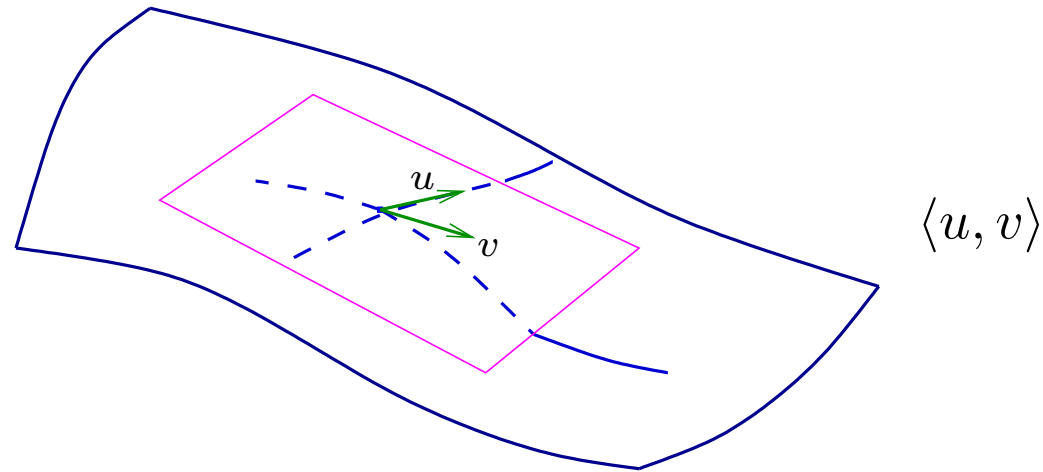
Geometria de Riemann

En el tangent de cada punt, tenim un producte escalar.



Geometria de Riemann

En el tangent de cada punt, tenim un producte escalar.



En coordenades $(x^1, \dots, x^n)$, $g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\left. \begin{array}{l} u = \sum u^i \partial_i \\ v = \sum v^j \partial_j \end{array} \right\} \langle u, v \rangle = \sum u^i g_{ij}(x) v^j = (u^1 \dots u^n) \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

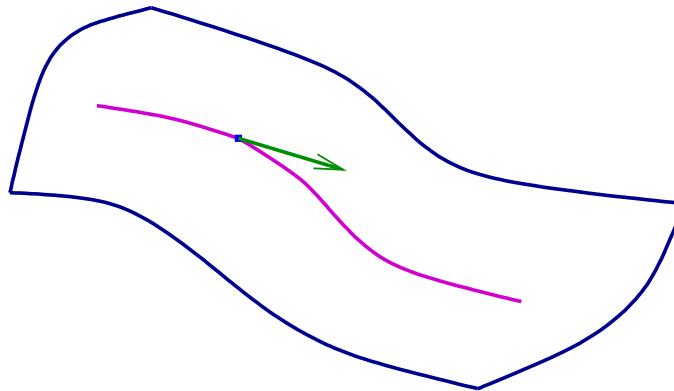
És un exemple de tensor

Geometria de Riemann

$$\left. \begin{array}{l} u = \sum u^i \partial_i \\ v = \sum v^j \partial_j \end{array} \right\} \langle u, v \rangle = \sum u^i g_{ij}(x) v^j = (u^1 \cdots u^n) \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Longitud de corbes $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $a \leq t \leq b$

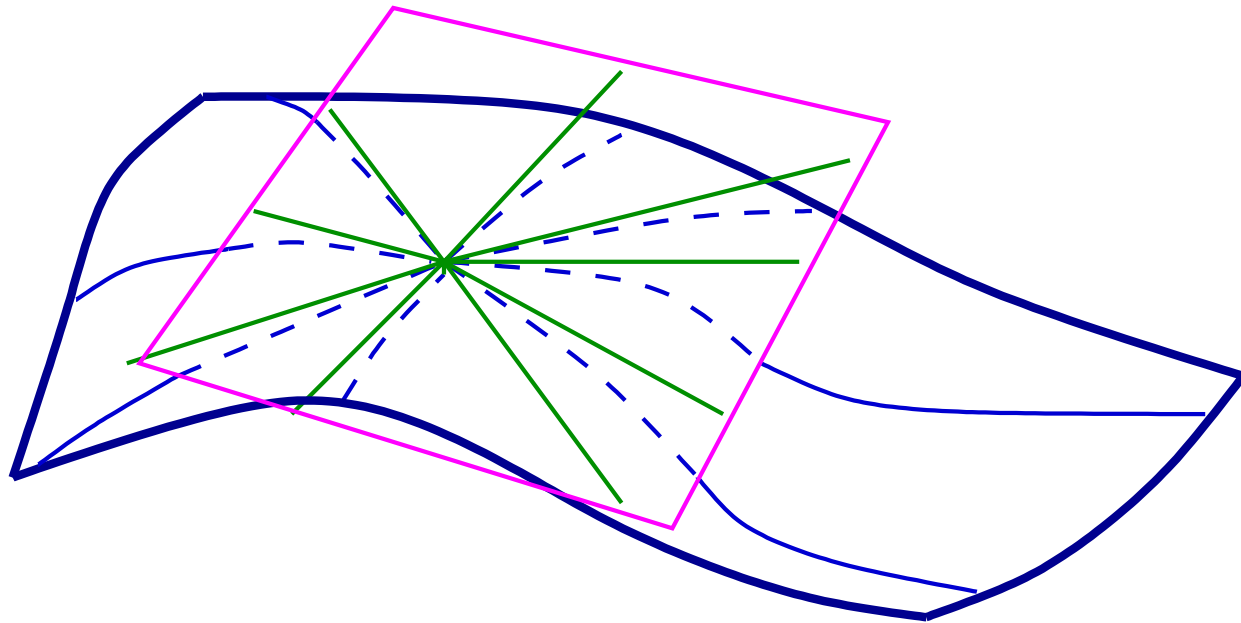
$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} x'_i(t) g_{ij}(\gamma(t)) x'_j(t)} dt$$



Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



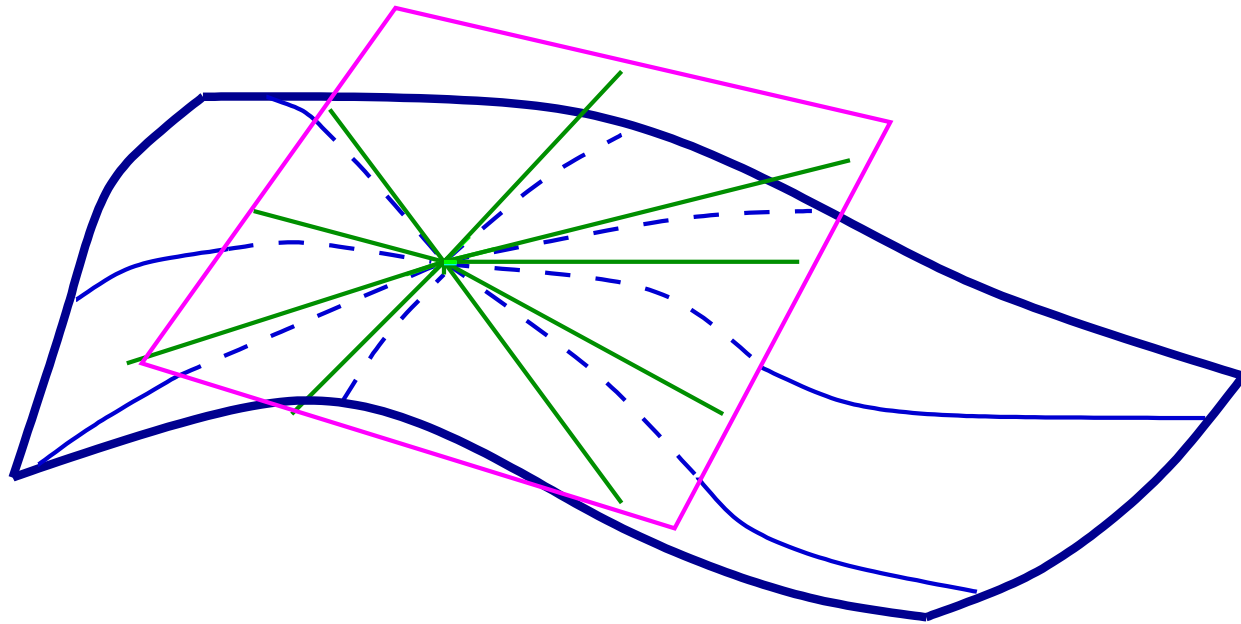
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



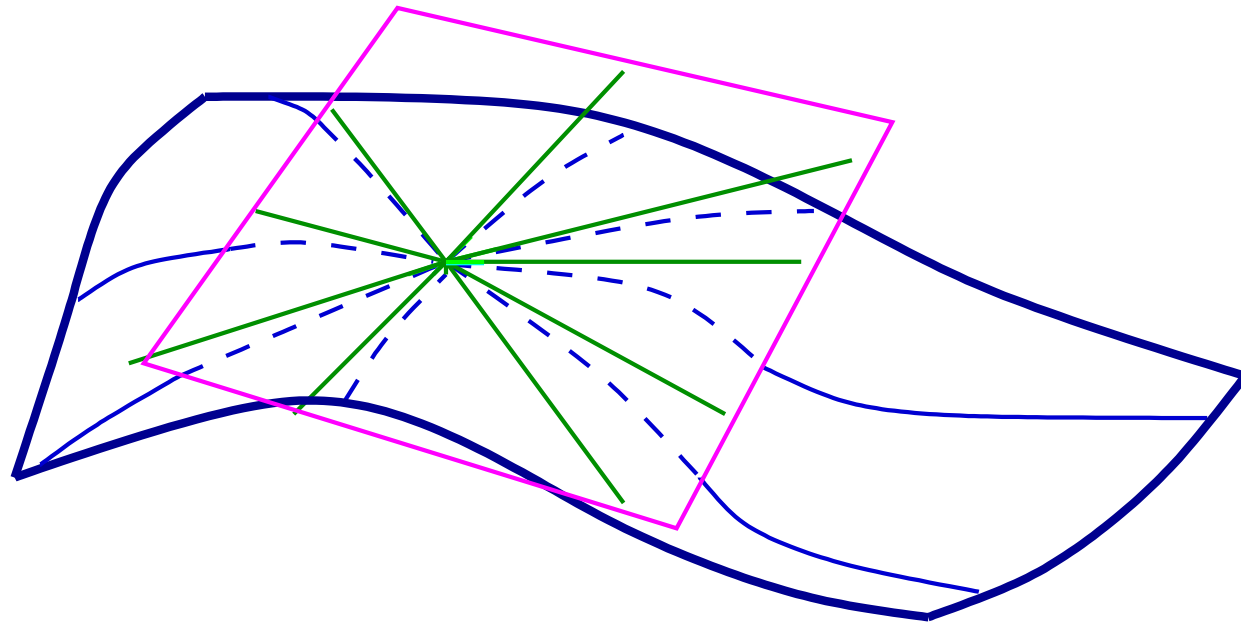
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



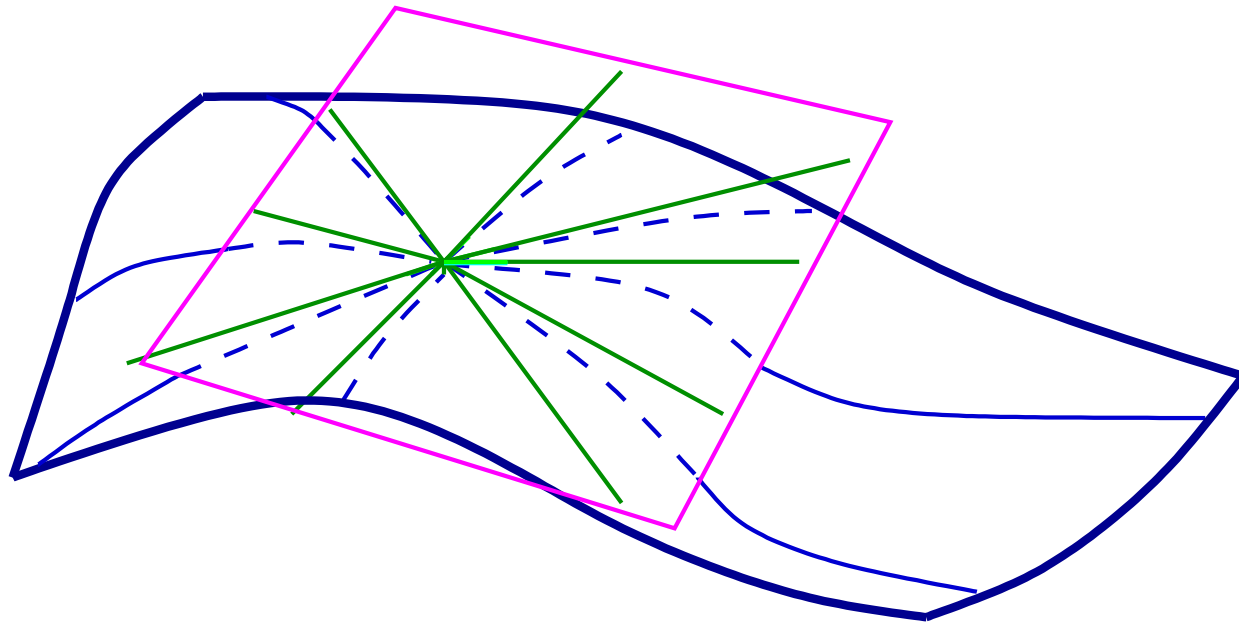
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



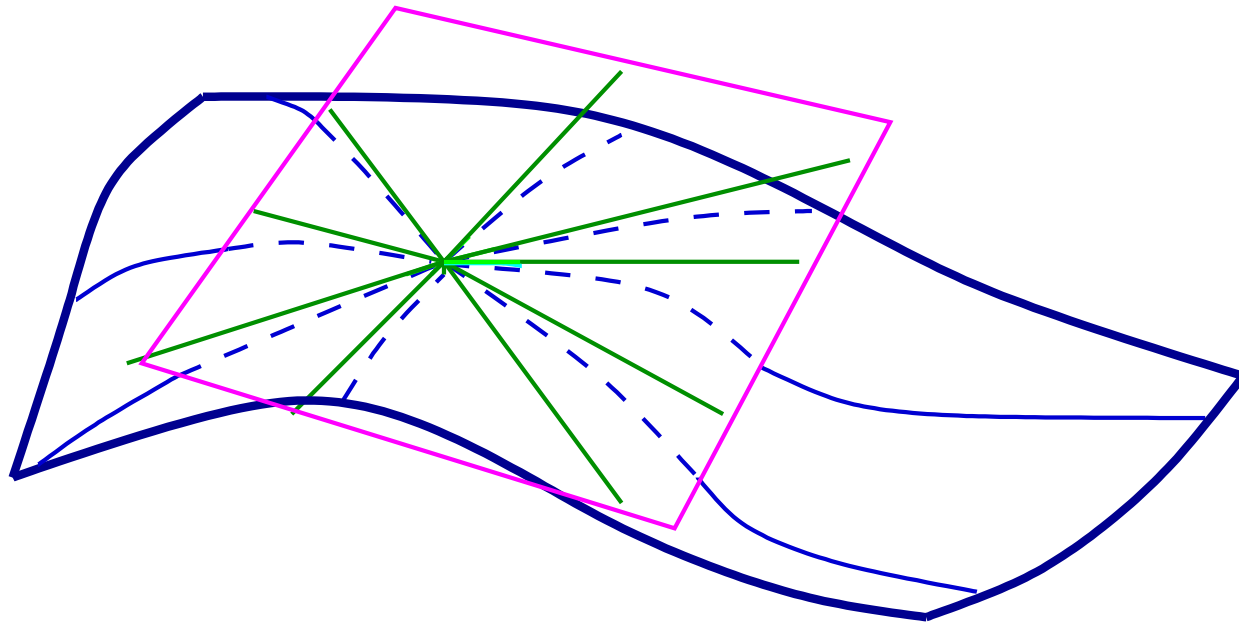
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



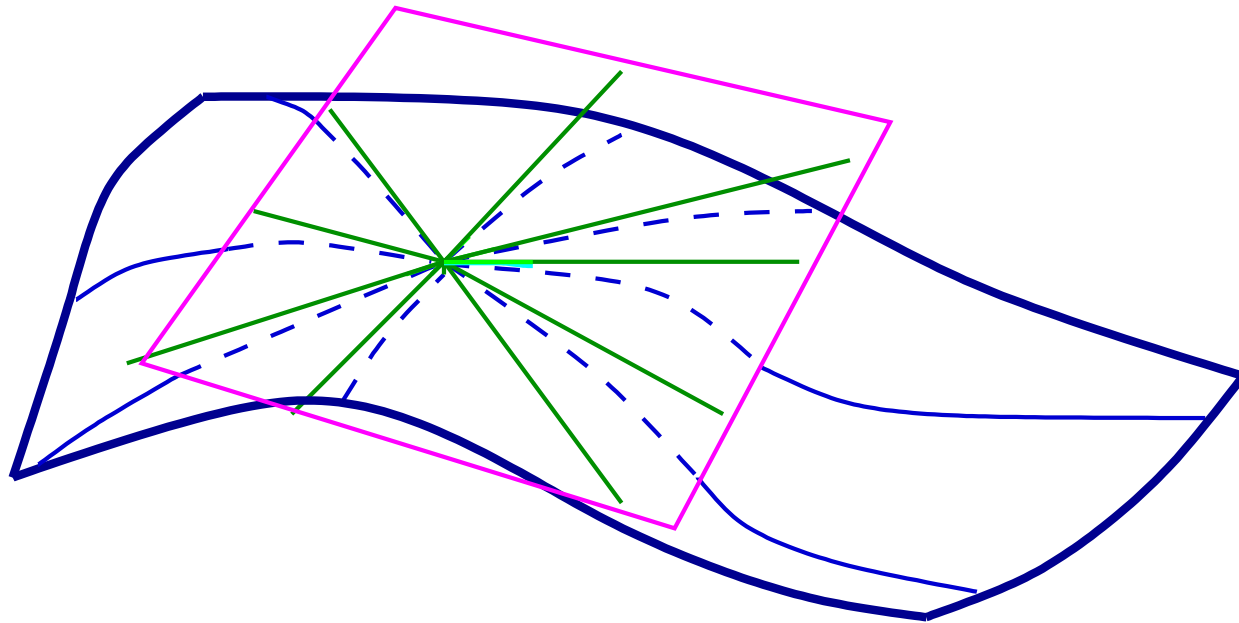
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



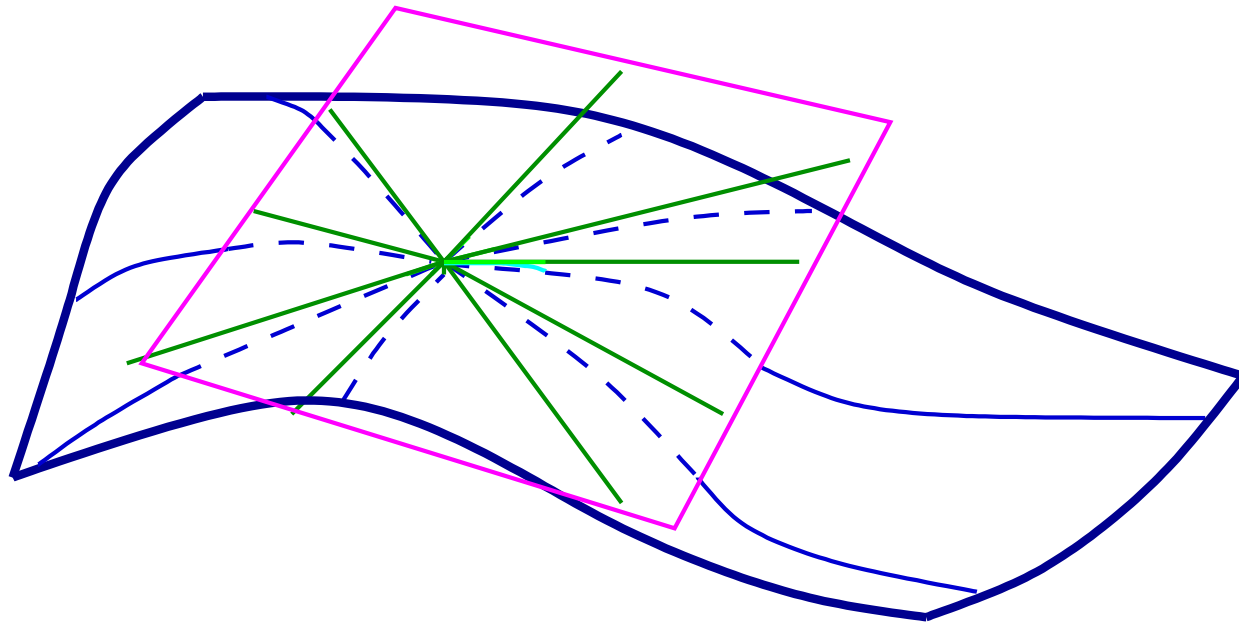
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



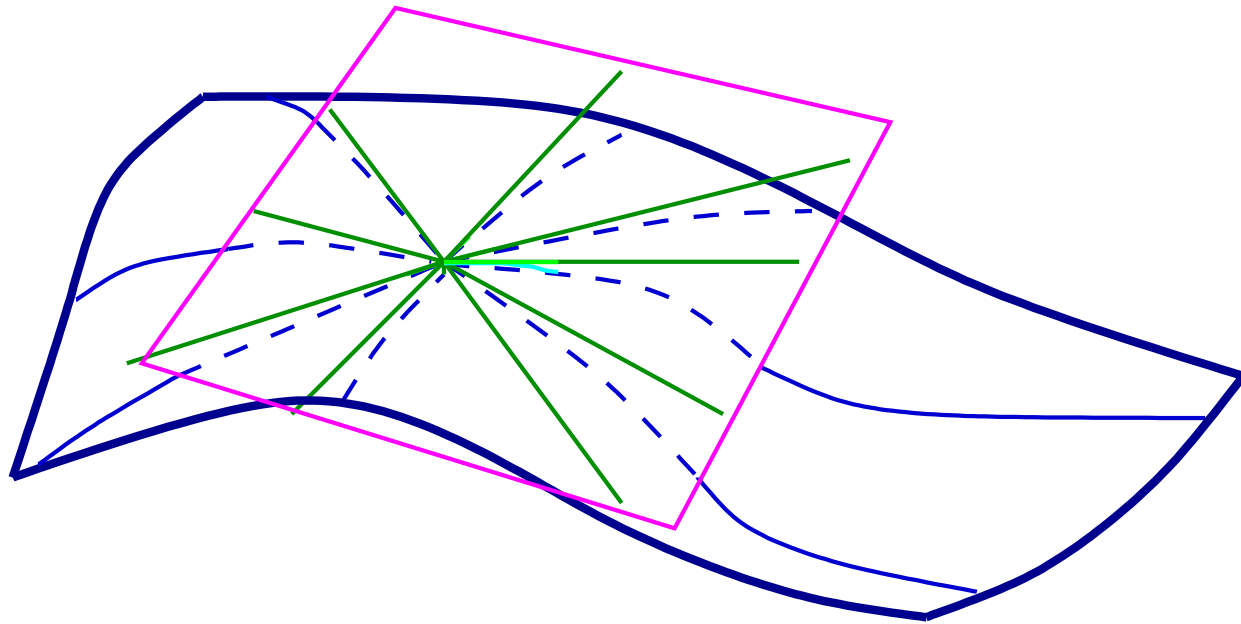
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



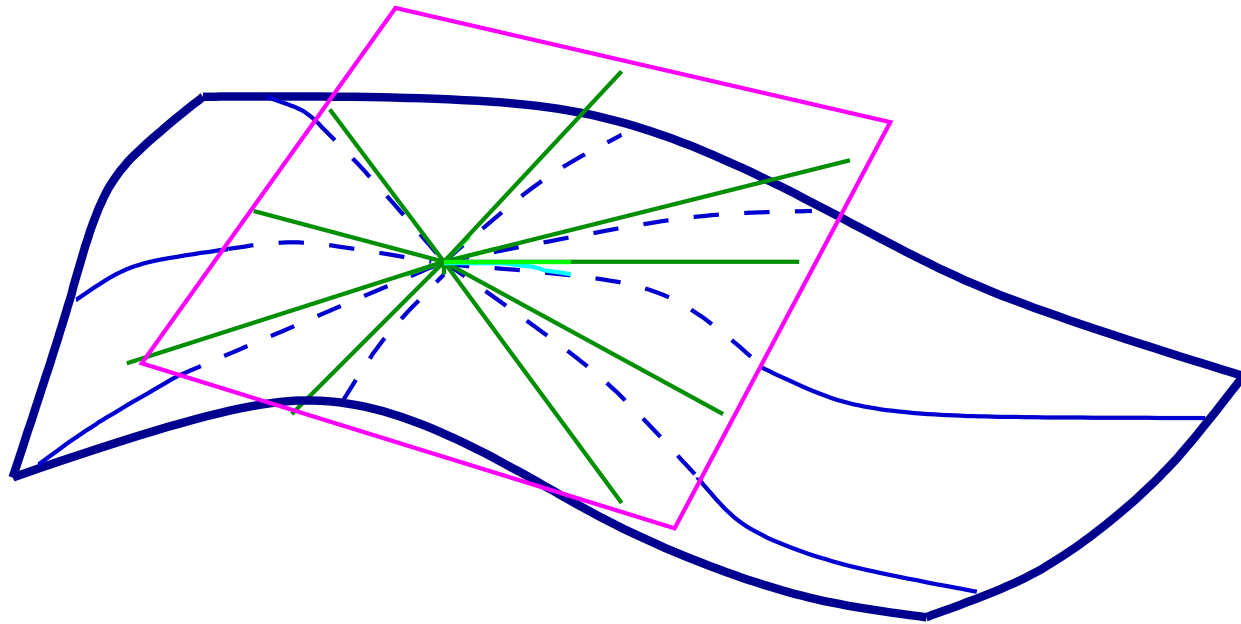
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



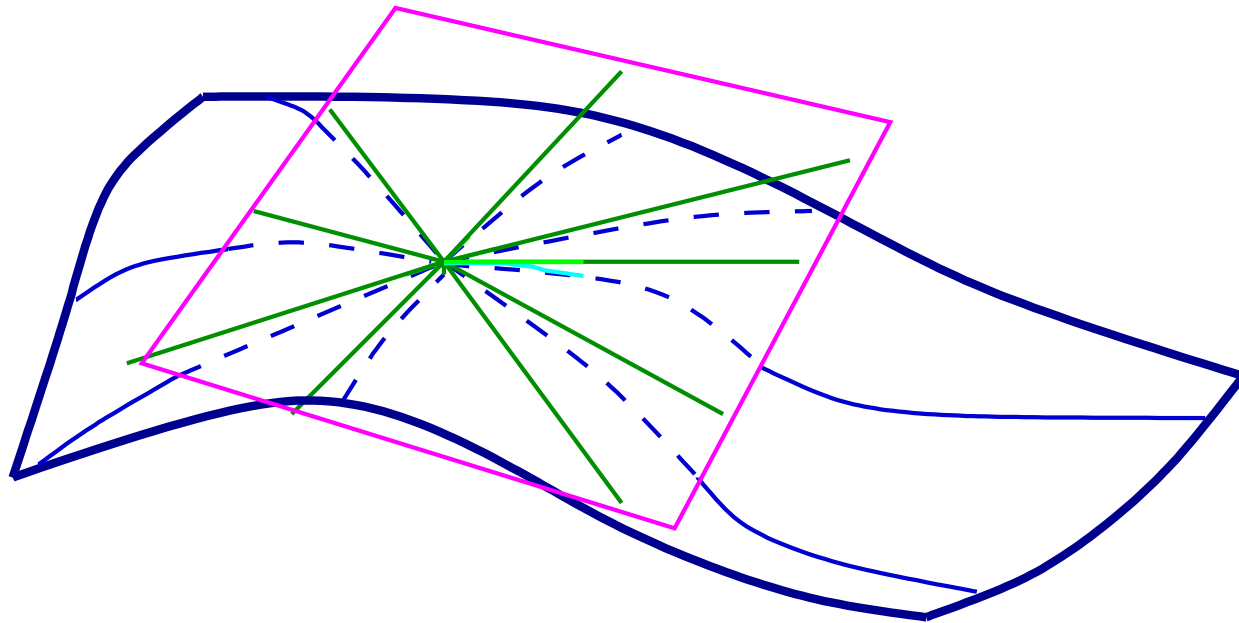
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



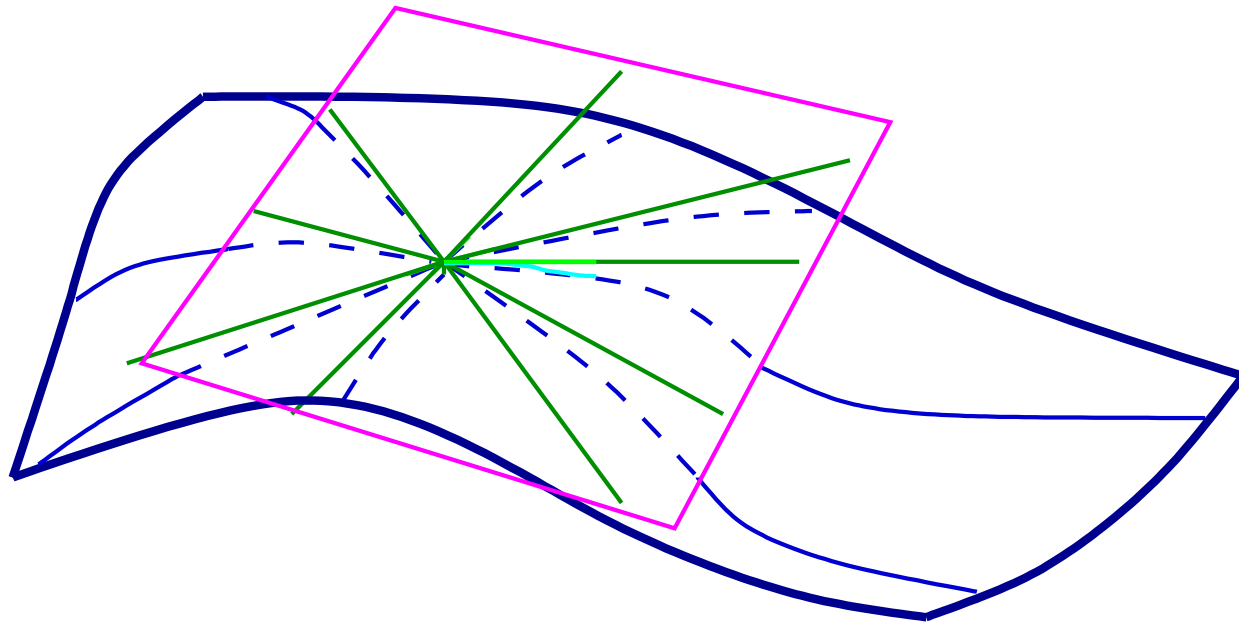
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



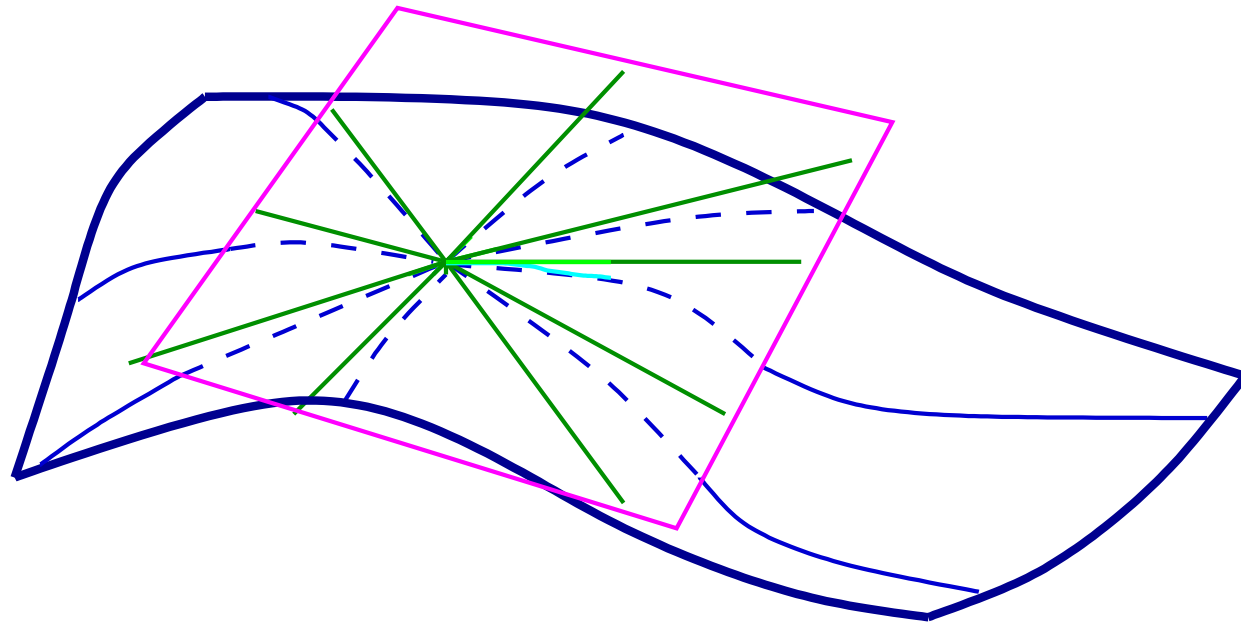
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



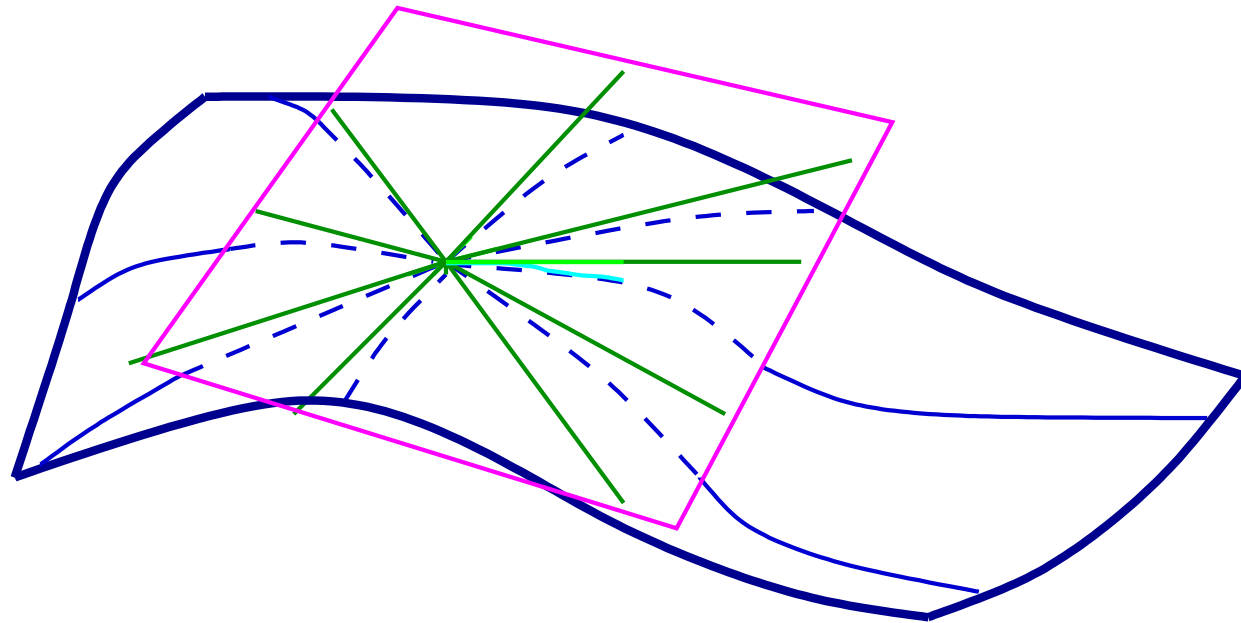
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



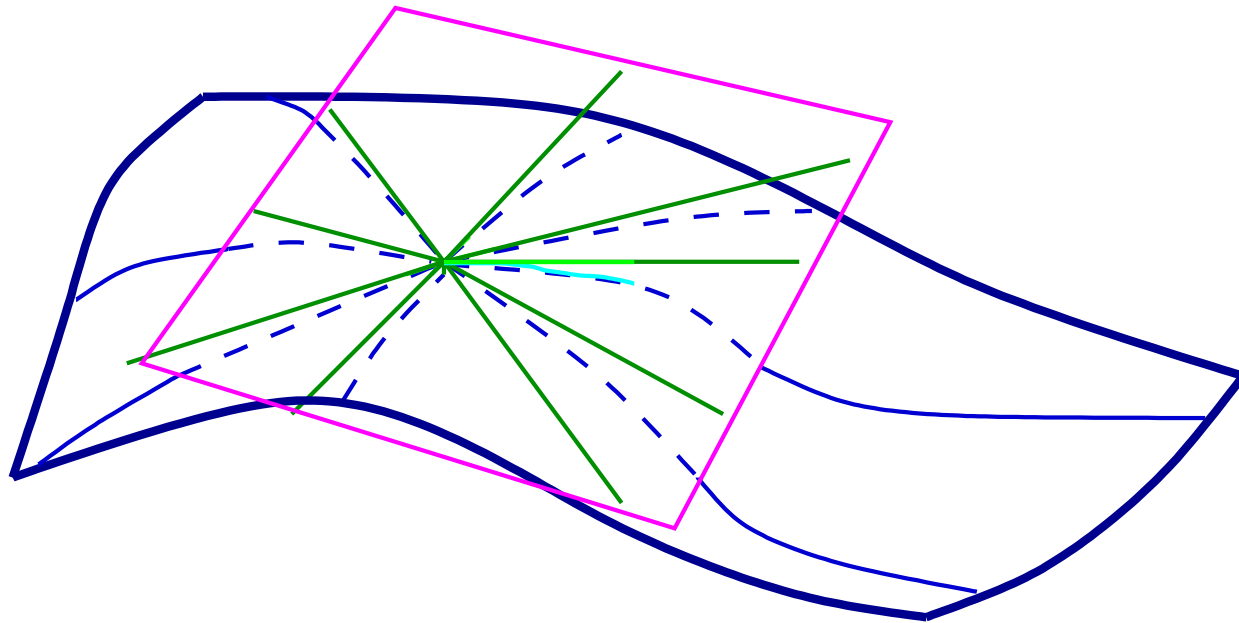
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



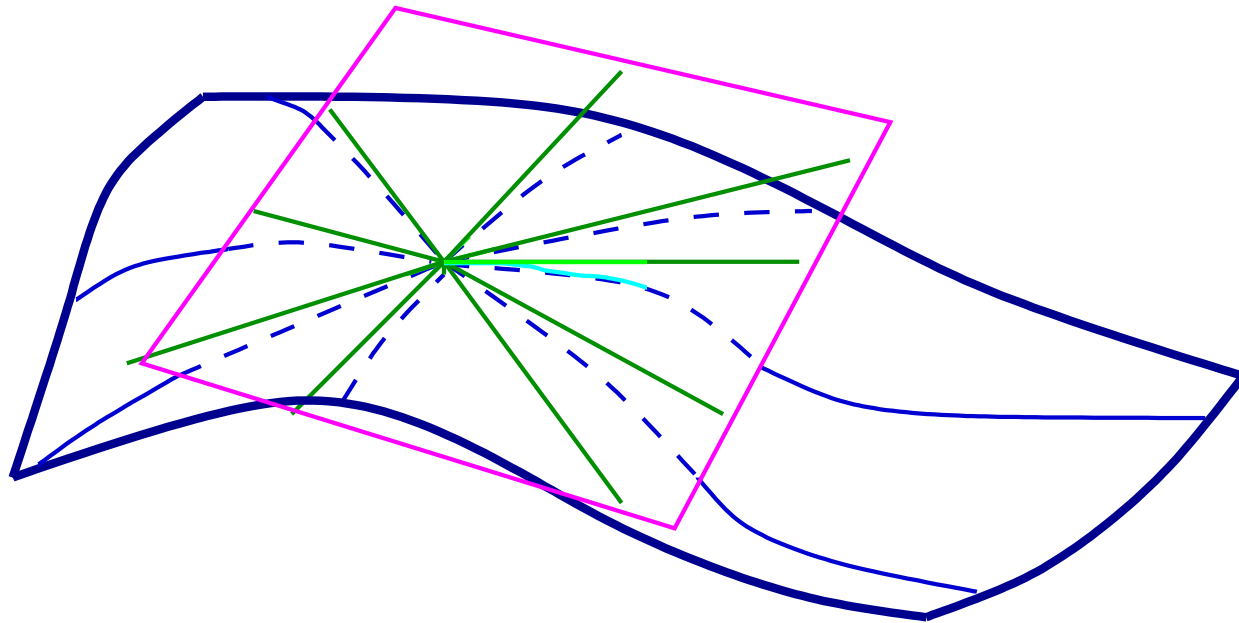
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



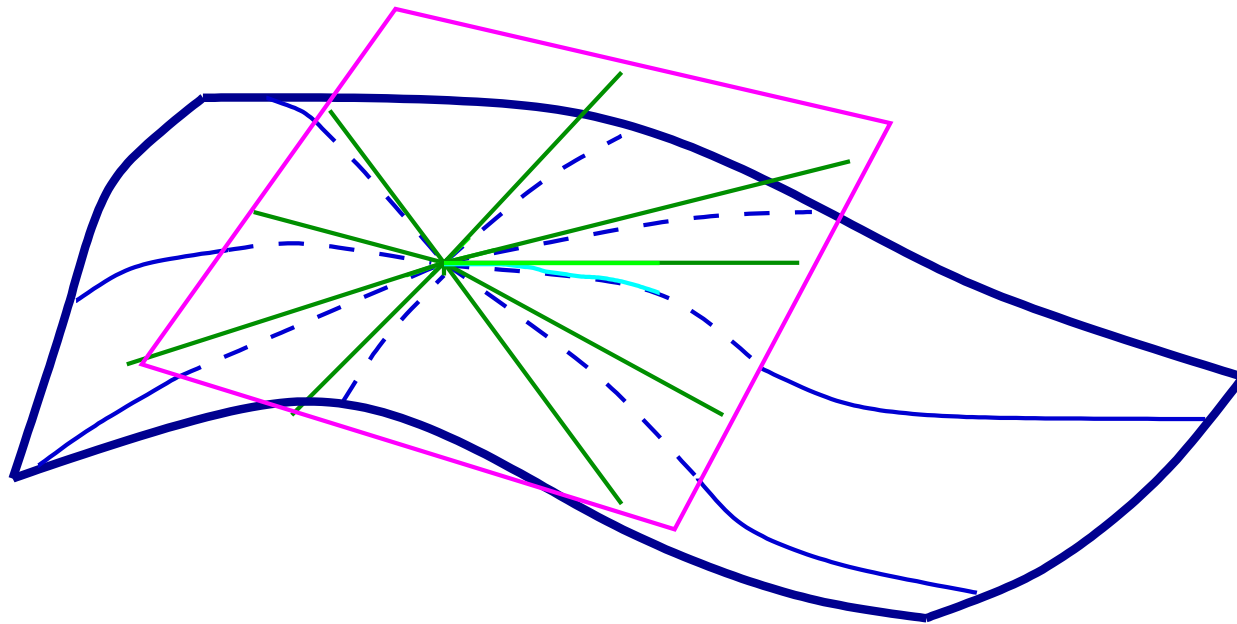
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



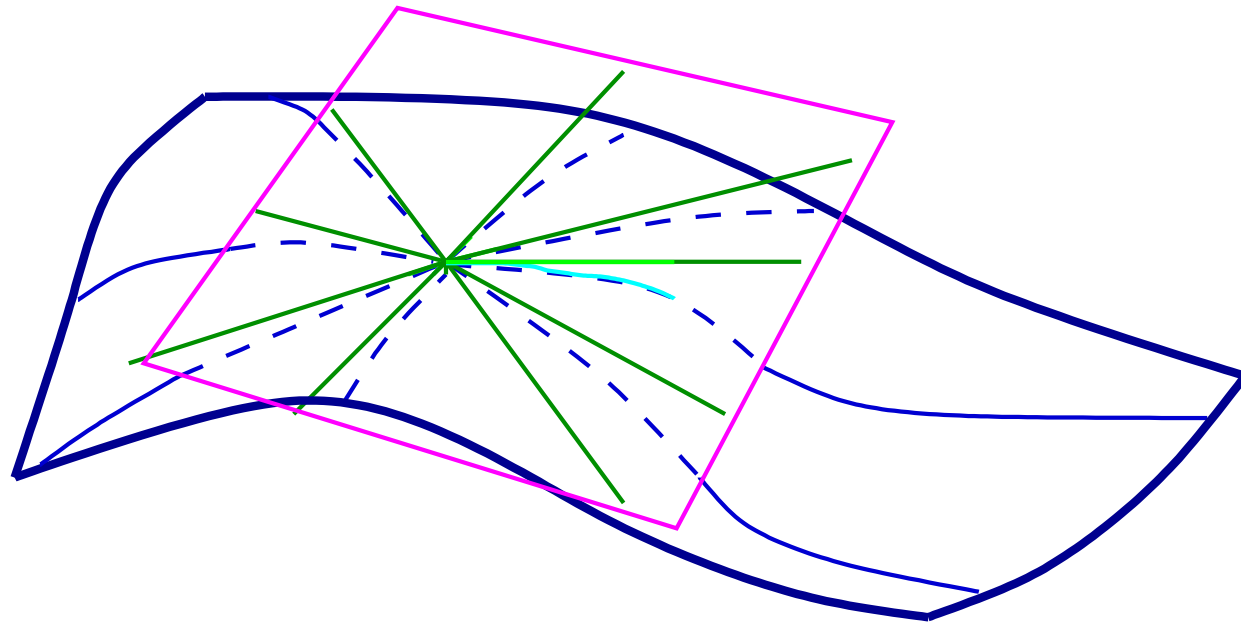
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



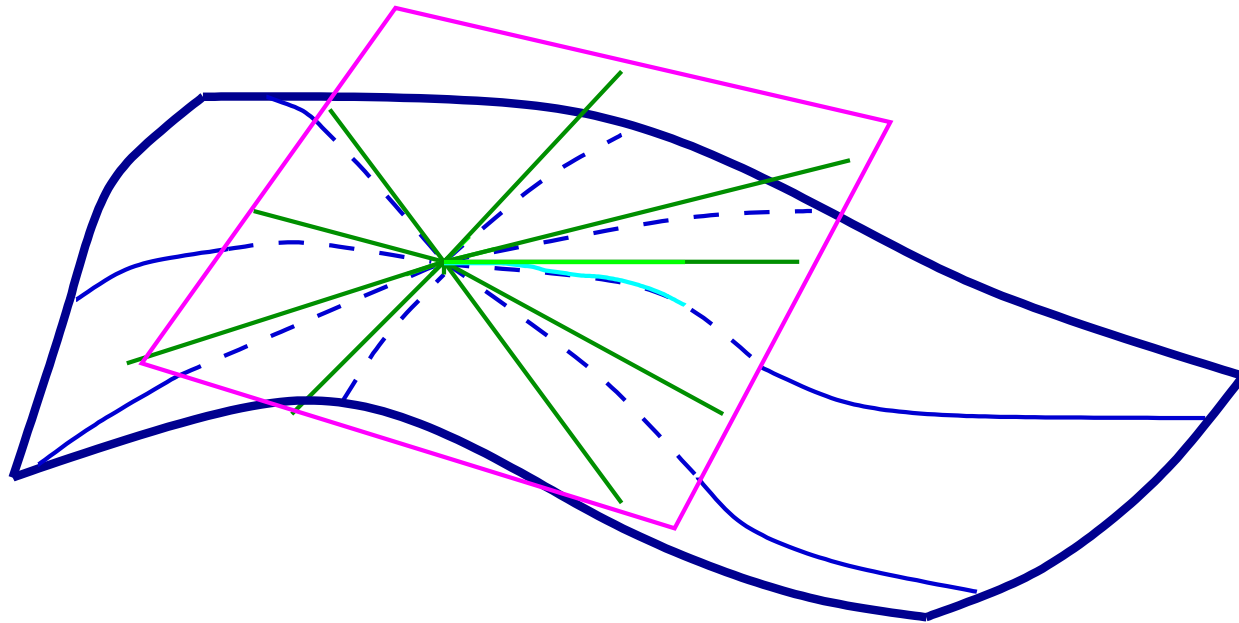
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



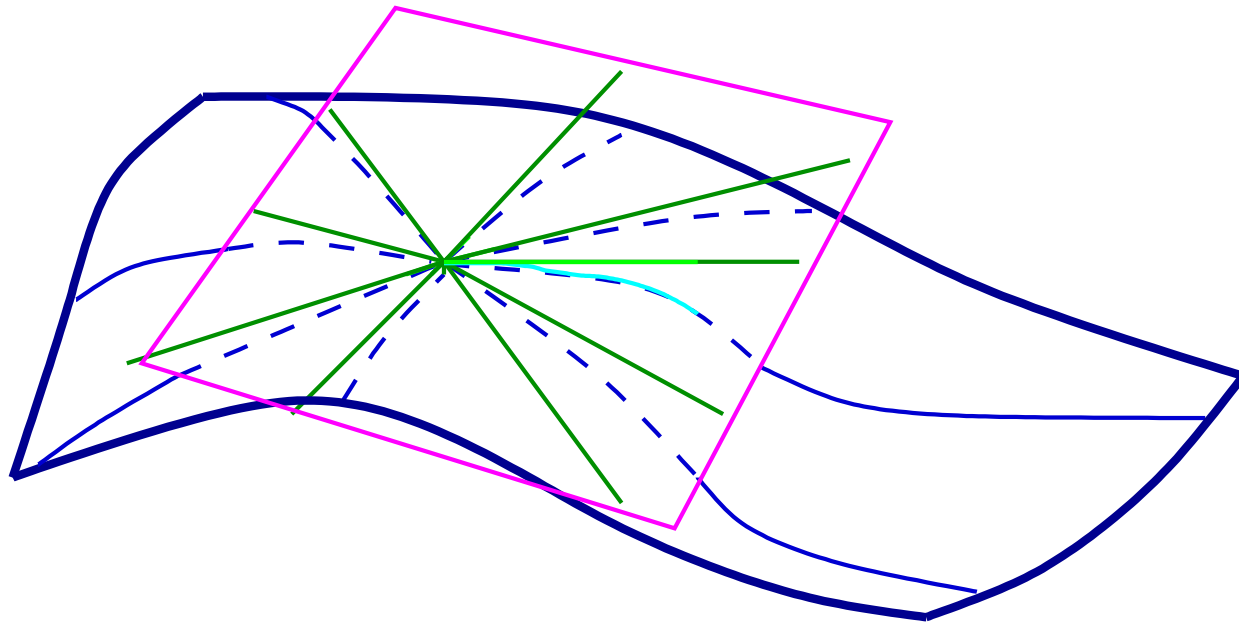
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



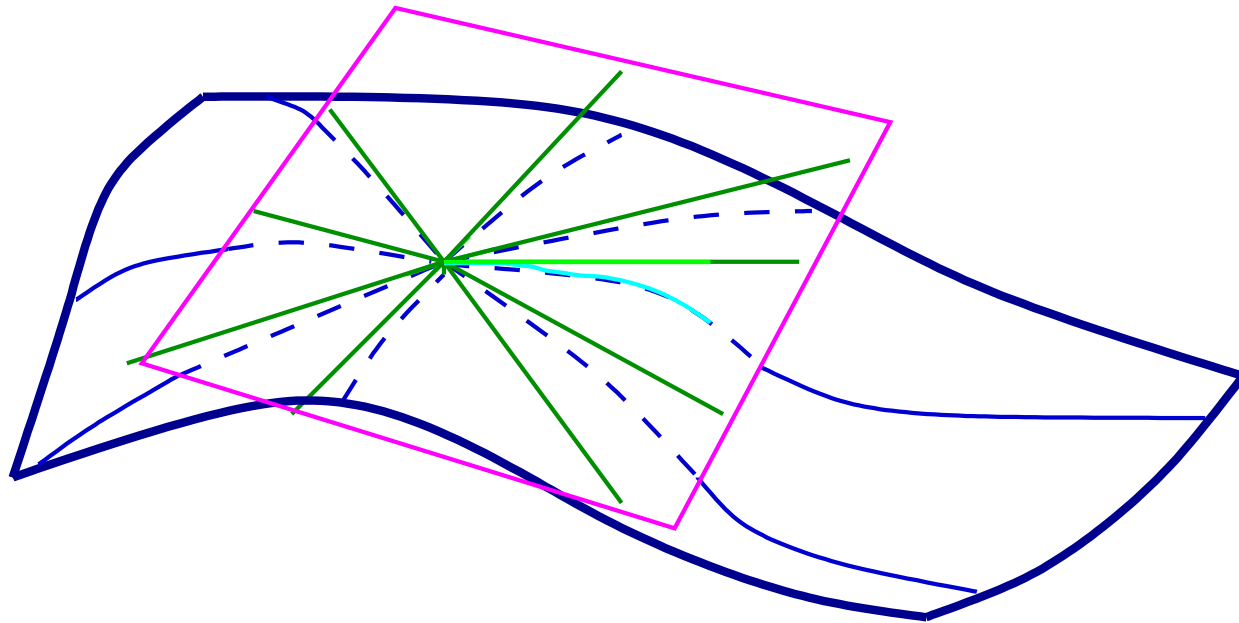
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



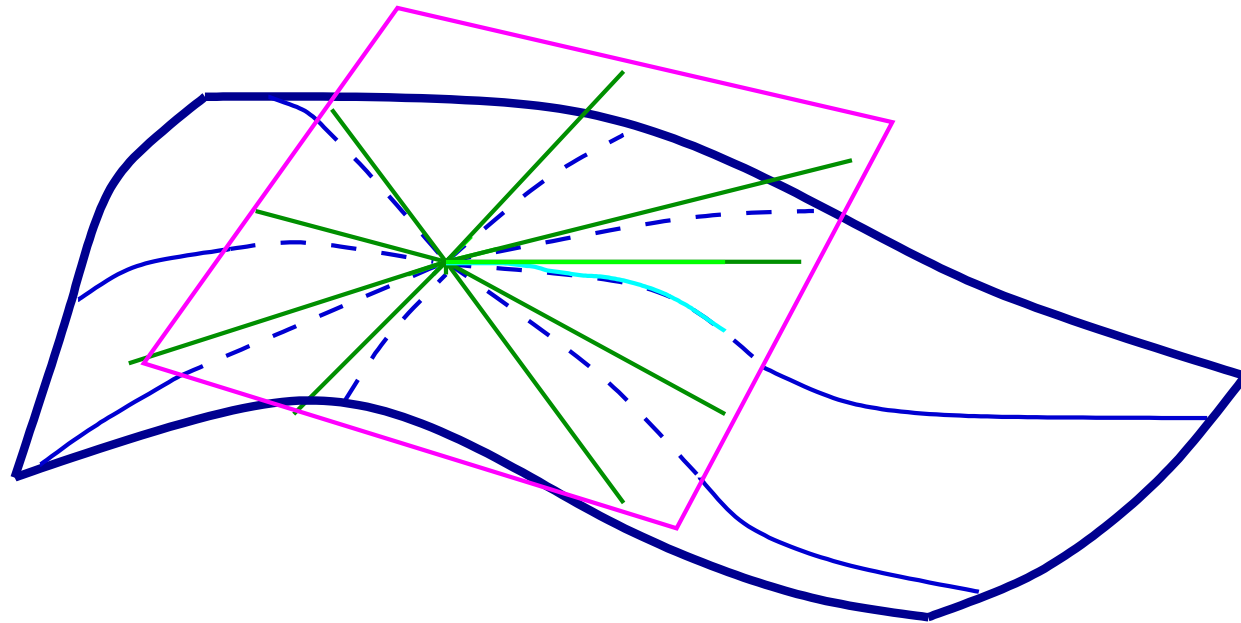
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



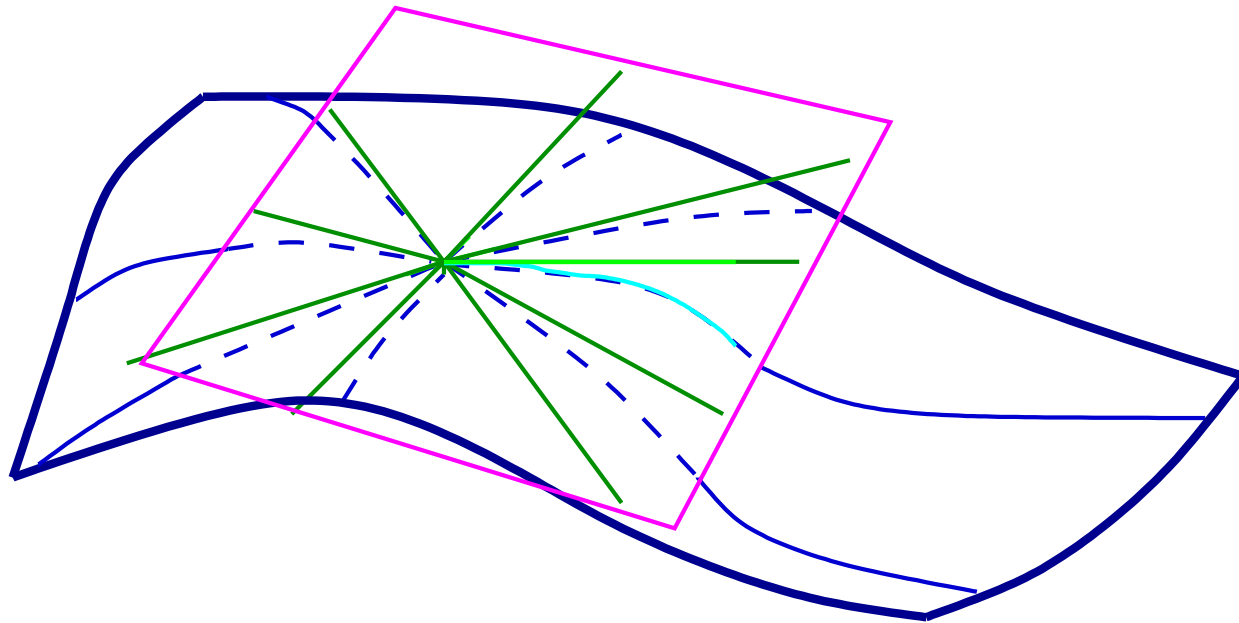
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



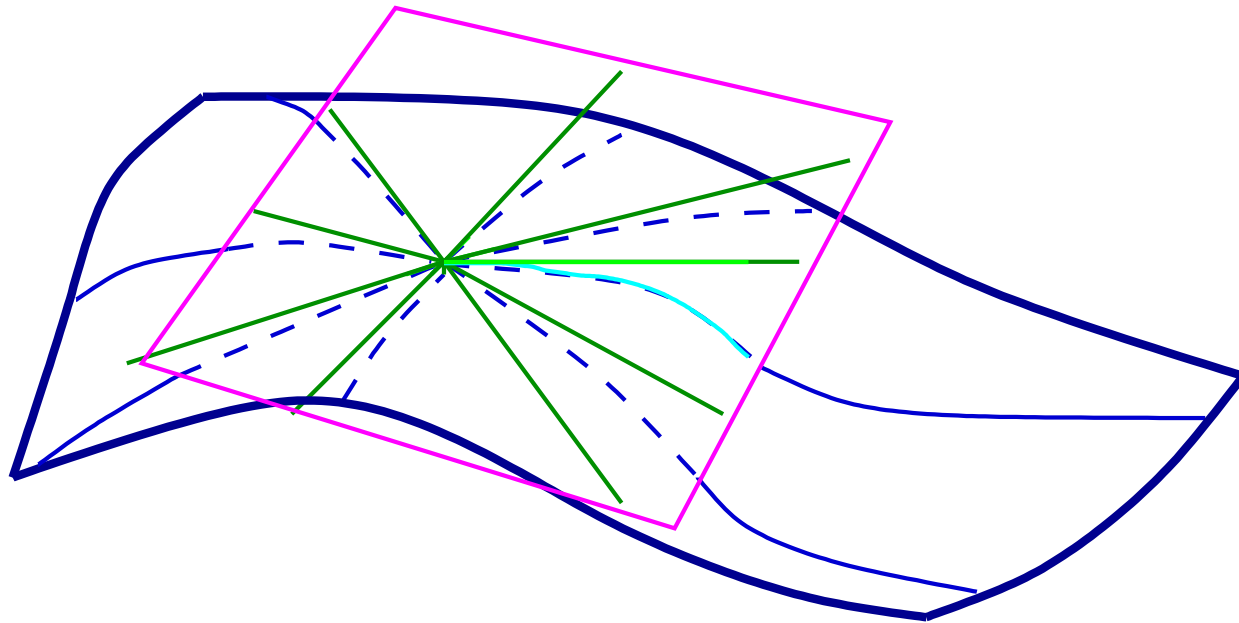
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



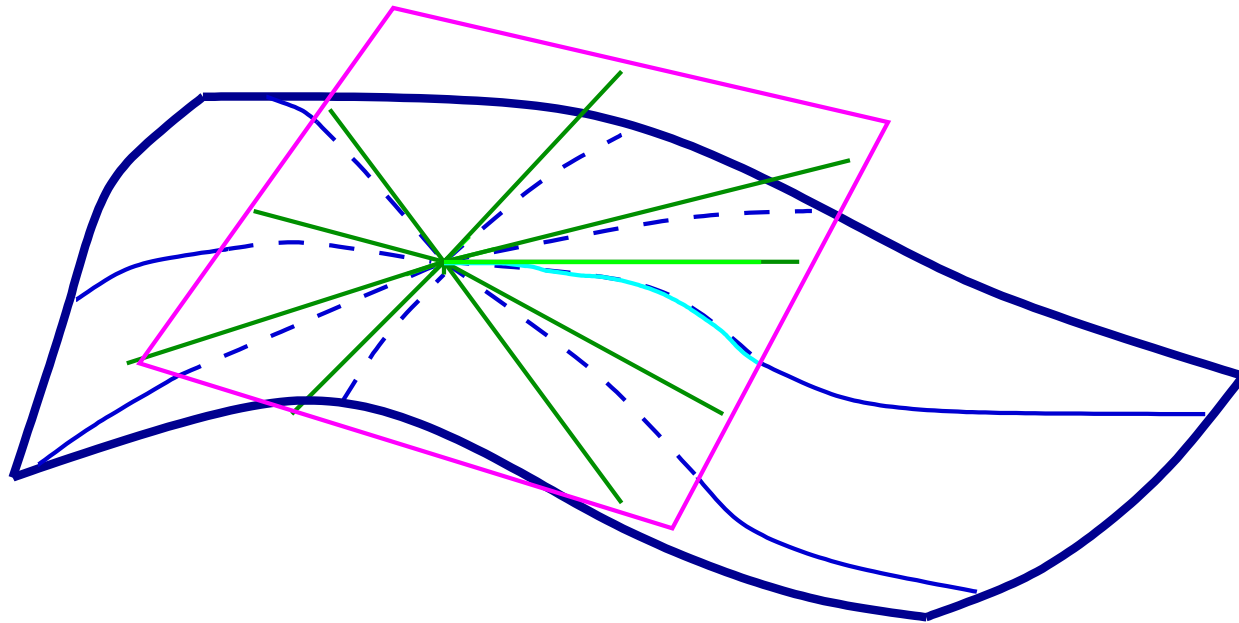
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



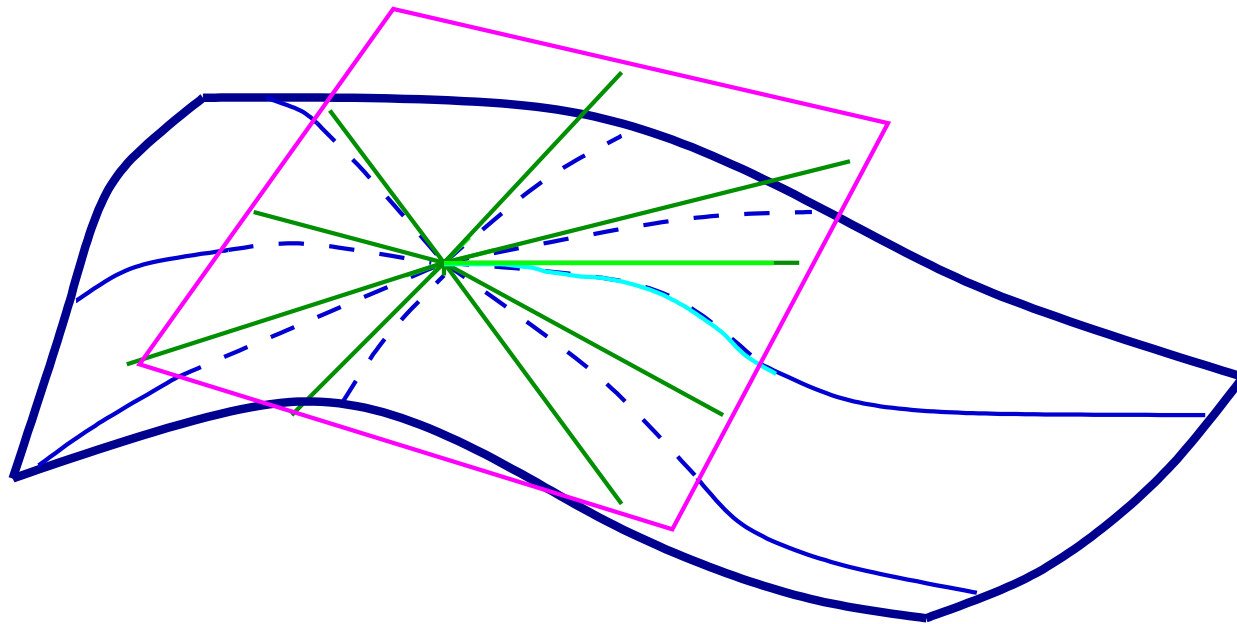
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



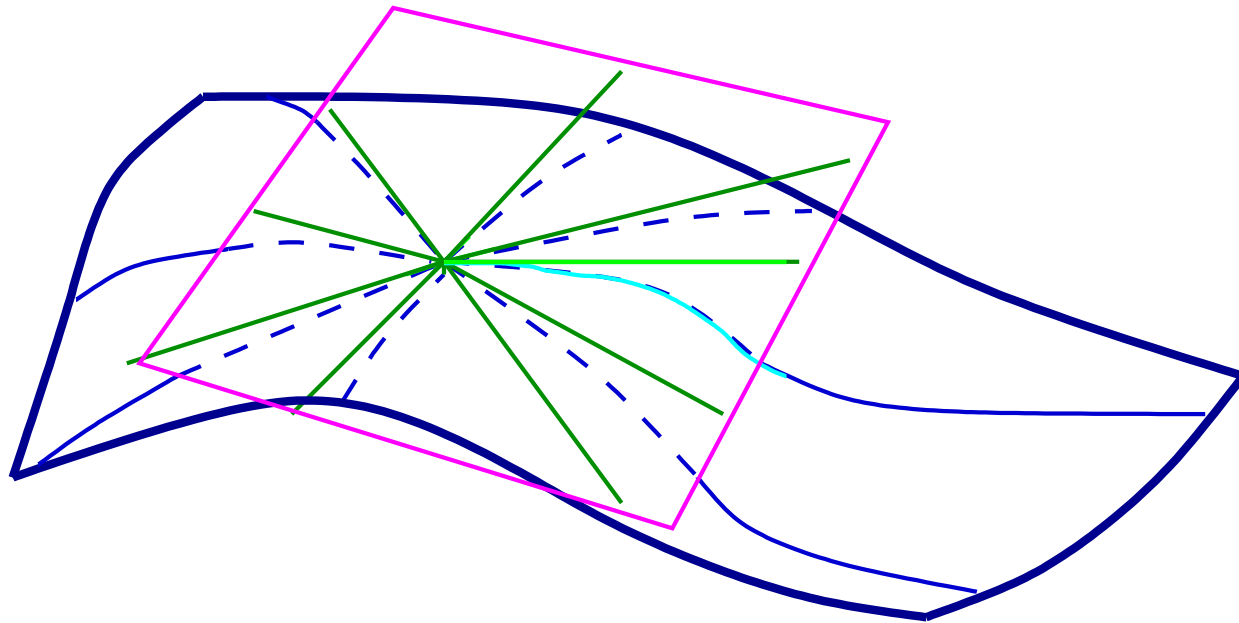
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



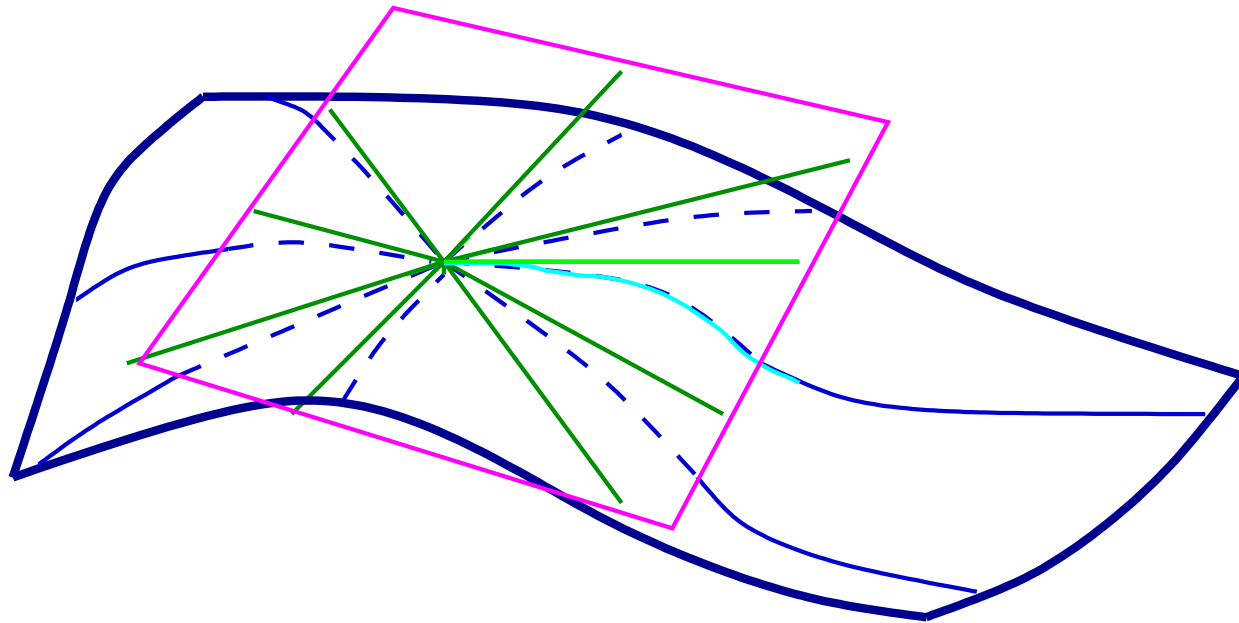
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



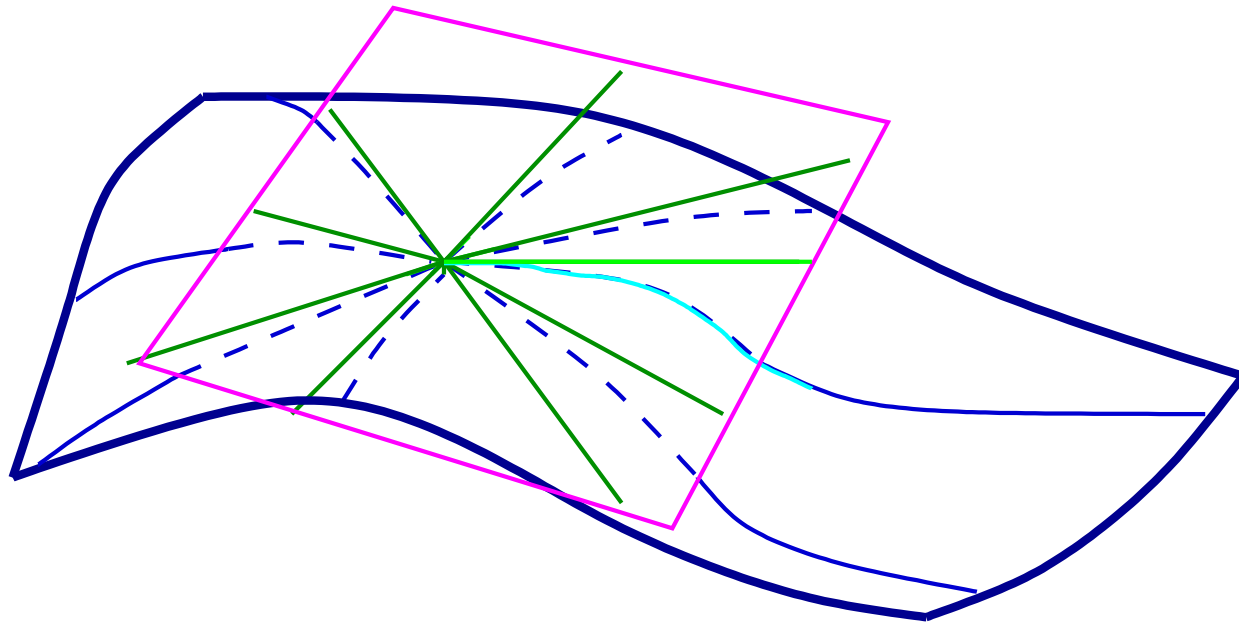
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



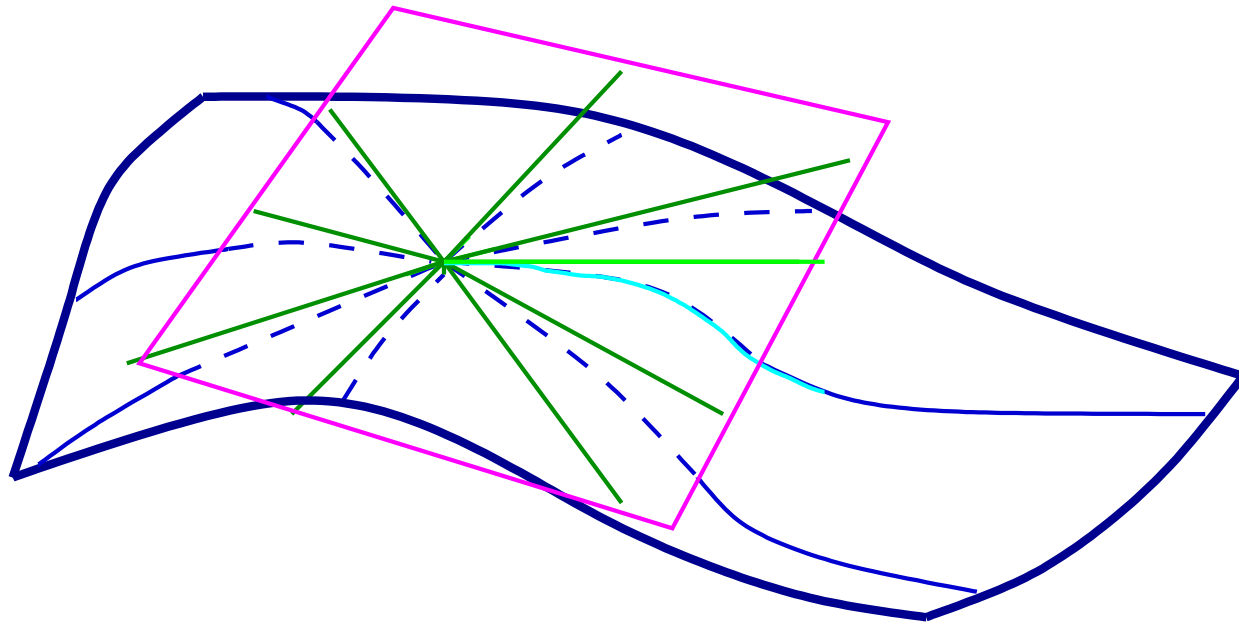
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



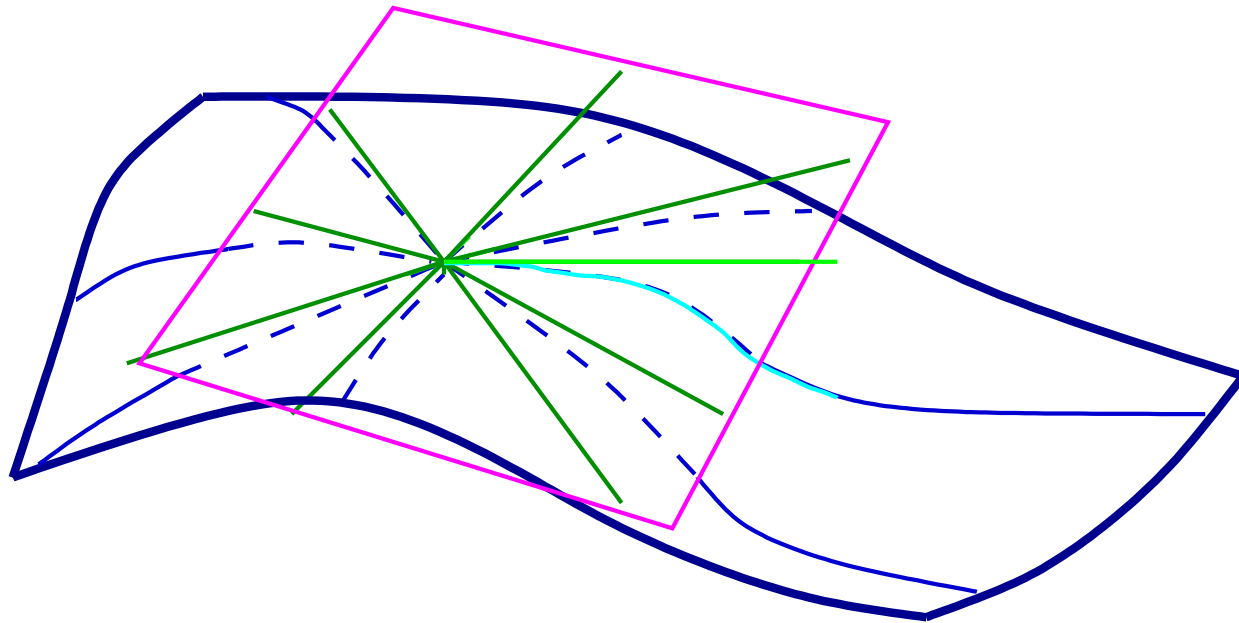
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals



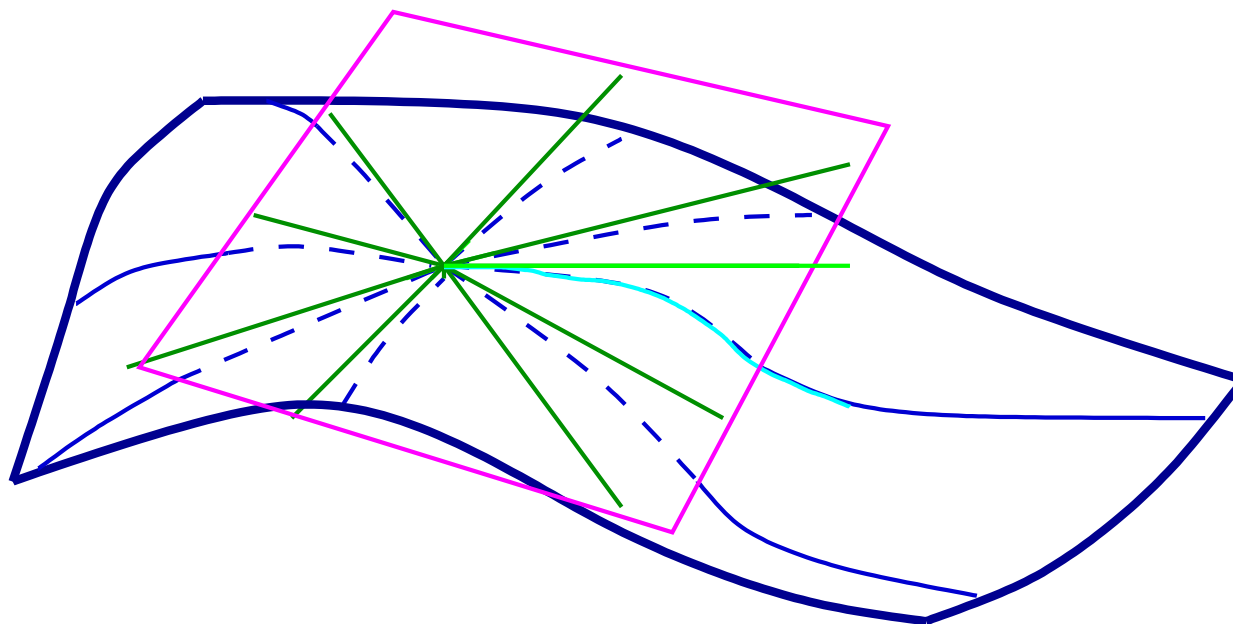
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Com Riemann descobreix la curvatura

Comença escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiques o normals

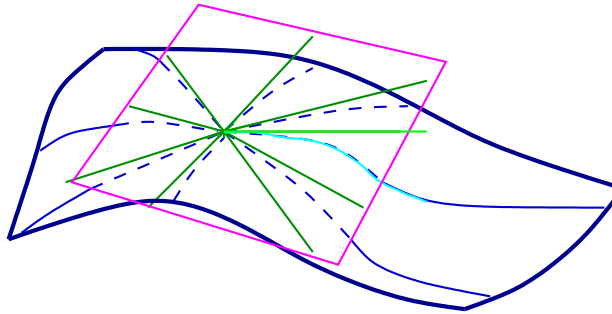


L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

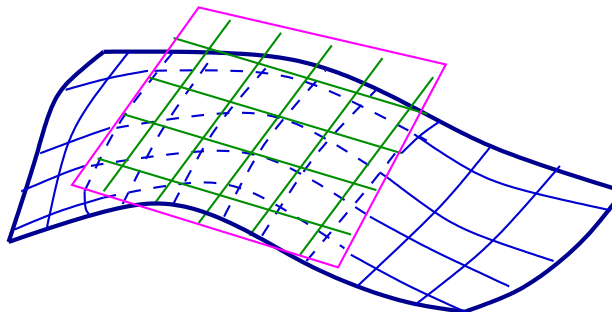
Com Riemann descobreix la curvatura

- Coordenades geodèsiques o normals



L'aplicació exponencial geodèsica identifica

- rectes radials que surten de l'origen, al tangent,
- amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.



Coordenades normals $\longleftrightarrow$ coordenades rectilínies del tangent

Com Riemann descobreix la curvatura

En coordenades geodèsiques Riemann troba:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)$$

- $R_{i\alpha\beta j} = -R_{i\alpha j\beta} = -R_{\alpha i\beta j} = R_{\beta j i\alpha}$
- $R_{i\alpha\beta j} + R_{i\beta j\alpha} + R_{ij\alpha\beta} = 0.$

Com Riemann descobreix la curvatura

En coordenades geodèsiques Riemann troba:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)$$

- $R_{i\alpha\beta j} = -R_{i\alpha j\beta} = -R_{\alpha i\beta j} = R_{\beta j i \alpha}$
- $R_{i\alpha\beta j} + R_{i\beta j\alpha} + R_{ij\alpha\beta} = 0.$
- $R_{i\alpha\beta j}$ és el tensor de curvatura de Riemann
Acualment es defineix mitjançant derivades covariants.
- I Riemann retroba la curvatura de Gauß K per superfícies:

$$K = R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$$

Altres curvatures

En coordenades geodèsiques

- Curvatura de Ricci $R_{ij} = \sum_{\alpha\beta} R_{i\alpha\beta j}$
- Curvatura escalar $R = \sum_{ij} R_{ij}$
- Curvatura seccional del pla $x_3 = \dots = x_n = 0$, $K = R_{1212}$.

Altres curvatures

En coordenades geodèsiques

- Curvatura de Ricci $R_{ij} = \sum_{\alpha\beta} R_{i\alpha\beta j}$
- Curvatura escalar $R = \sum_{ij} R_{ij}$
- Curvatura seccional del pla $x_3 = \dots = x_n = 0$, $K = R_{1212}$.
- “Ricci és el Hessià del volum”
 $d\text{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$$d\text{vol}(x) = \left(1 - \frac{1}{6} \sum_{ij} R_{ij} x^i x^j + O(|x|^3) \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Altres curvatures

En coordenades geodèsiques

- Curvatura de Ricci $R_{ij} = \sum_{\alpha\beta} R_{i\alpha\beta j}$
- Curvatura escalar $R = \sum_{ij} R_{ij}$
- Curvatura seccional del pla $x_3 = \dots = x_n = 0$, $K = R_{1212}$.
- “Ricci és el Hessià del volum”
 $d\text{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$$d\text{vol}(x) = \left(1 - \frac{1}{6} \sum_{ij} R_{ij} x^i x^j + O(|x|^3) \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Equació d'Einstein: $R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}$

Curvatura de Ricci

En coordenades geodèsiques

- $R_{ij} = R_{ji} = \sum_{\alpha\beta} R_{i\alpha\beta j}$

Curvatura de Ricci

En coordenades geodèsiques

- $R_{ij} = R_{ji} = \sum_{\alpha\beta} R_{i\alpha\beta j}$
- Com a forma quadràtica, pot ser definida positiva $R_{ij} > 0$.

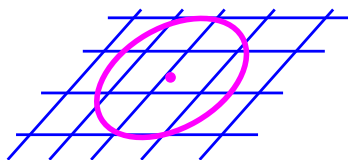
Curvatura de Ricci

En coordenades geodèsiques

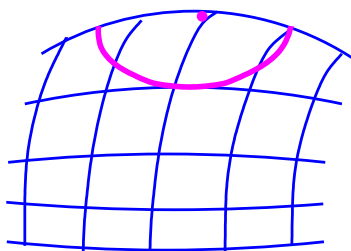
- $R_{ij} = R_{ji} = \sum_{\alpha\beta} R_{i\alpha\beta j}$
- Com a forma quadràtica, pot ser definida positiva $R_{ij} > 0$.

$$d\text{vol}(x) = \left(1 - \frac{1}{6} \sum_{ij} R_{ij} x^i x^j + O(|x|^3) \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

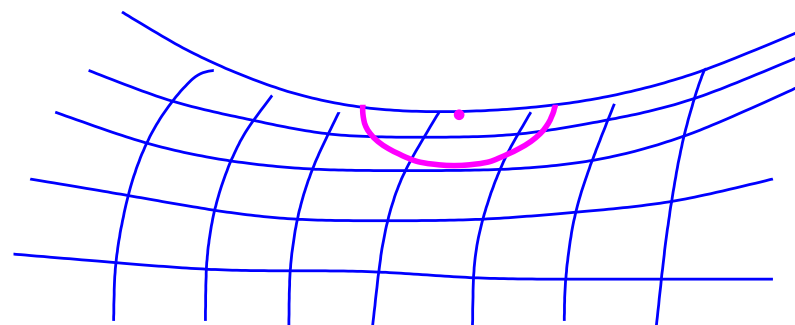
$$R_{ij} = 0$$



$$R_{ij} > 0$$



$$R_{ij} < 0$$



Hamilton i el Flux de Ricci (1982)



R.S. Hamilton (1943).

Hamilton i el Flux de Ricci (1982)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2 R_{ij}$$

Hamilton i el Flux de Ricci (1982)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2 R_{ij}$$

- En coordenades harmòniques $\{x^i\}$, $\Delta x^i = 0$.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta(g_{ij}) + Q_{ij}(g^{-1}, \frac{\partial g}{\partial x})$$

on $\left\{ \begin{array}{l} \Delta(g_{ij}) = \text{laplaciana de la funció escalar } g_{ij} \\ Q_{ij} = \text{expressió quadràtica} \end{array} \right.$

És una equació de difusió-reacció.

Hamilton i el Flux de Ricci (1982)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2 R_{ij}$$

- En coordenades harmòniques $\{x^i\}$, $\Delta x^i = 0$.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta(g_{ij}) + Q_{ij}(g^{-1}, \frac{\partial g}{\partial x})$$

on $\left\{ \begin{array}{l} \Delta(g_{ij}) = \text{laplacià de la funció escalar } g_{ij} \\ Q_{ij} = \text{expressió quadràtica} \end{array} \right.$

És una equació de difusió-reacció.

- Heurística del programa de Hamilton:

“O bé $g(t)$ convergeix a una mètrica localment homogènia
o bé crea singularitats corresponents a la descomposició canònica”.

Hamilton i el Flux de Ricci (1982)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2 R_{ij}$$

- Heurística del programa de Hamilton:
“O bé $g(t)$ convergeix a una mètrica localment homogènia
o bé crea singularitats corresponents a la descomposició canònica”.
- Hamilton/DeTurck:

Existència en temps curt i unicitat

quan M^n és compacte hi ha una **única** solució
definida per $t \in [0, T)$, $T > 0$.

Exemple

- Suposem que $g(0)$ té curvatura seccional constant K .

$$\Rightarrow R_{ij} = (n - 1)K g_{ij}(0)$$

Posant $g_{ij}(t) = f(t)g_{ij}(0)$, llavors $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$ equiv. a l'ODE

$$f'(t) = -2(n - 1)K$$

Exemple

- Suposem que $g(0)$ té curvatura seccional constant K .

$$\Rightarrow R_{ij} = (n - 1)K g_{ij}(0)$$

Posant $g_{ij}(t) = f(t)g_{ij}(0)$, llavors $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$ equiv. a l'ODE

$$f'(t) = -2(n - 1)K$$

$$g(t) = (1 - 2K(n - 1)t)g(0)$$

- si $K < 0$ s'expandeix per sempre
- si $K = 0$ es manté estable
- si $K > 0$ col·lapsa al temps $T = \frac{1}{2K(n-1)}$

Exemple: Solitons

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}.$$

Una solució g_t és un **solitó** si $g_t = \lambda(t) \Phi_t^* g_0$.

Contractant si $\lambda < 1$, estable si $\lambda = 1$ i expansiu si $\lambda > 1$.

Exemple: Solitons

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}.$$

Una solució g_t és un **solitó** si $g_t = \lambda(t)\Phi_t^* g_0$.

Contractant si $\lambda < 1$, estable si $\lambda = 1$ i expansiu si $\lambda > 1$.

Un **solitó gradient** si $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t = \nabla f$

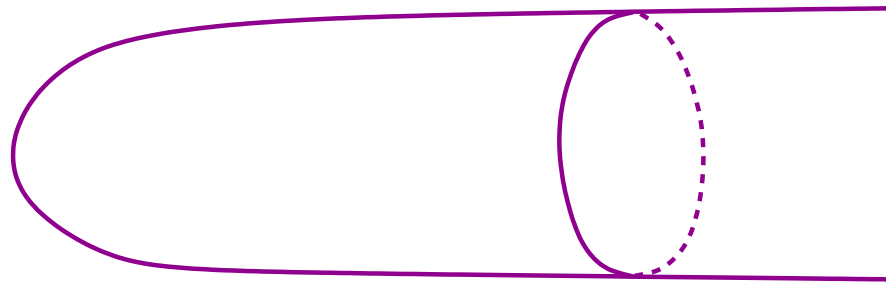
Equivalentment:

$$R_{ij} + \text{Hess}_{ij}(f) + c g_{ij} = 0$$

- Solitons amb curvatura ≥ 0 : després d'*explotar* les singularitats.

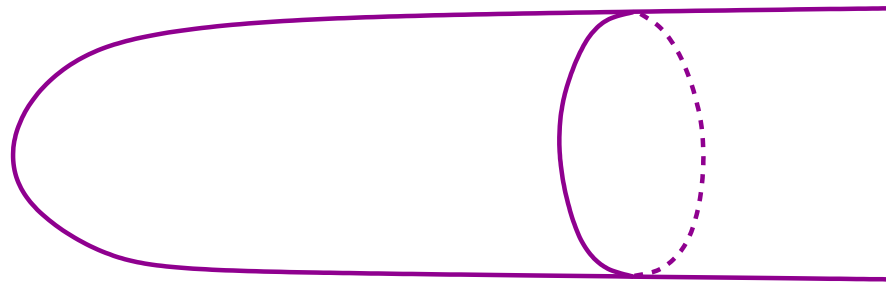
Exemple: Solitó Cigar

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2 \quad \text{a } \mathbb{R}^2$$



Exemple: Solitó Cigar

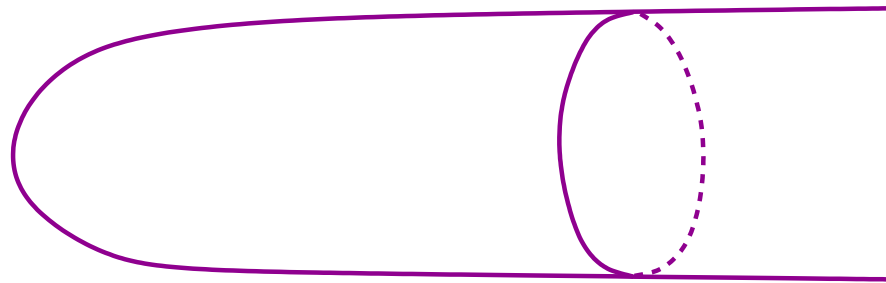
$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2 \quad \text{a } \mathbb{R}^2$$



- Asimptòtic a un cilindre ($\tanh \rho \rightarrow 1$ quan $\rho \rightarrow \infty$)

Exemple: Solitó Cigar

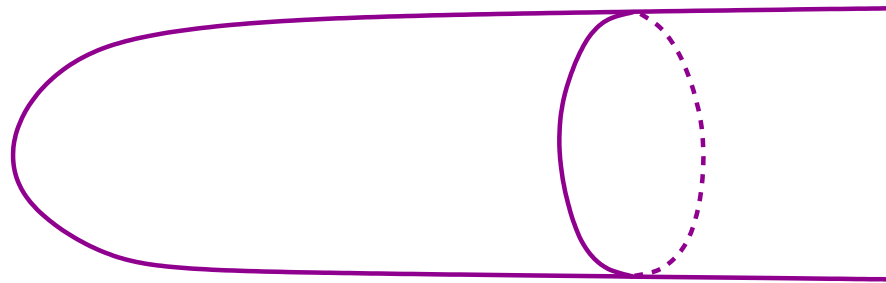
$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2 \quad \text{a } \mathbb{R}^2$$



- Asimptòtic a un cilindre ($\tanh \rho \rightarrow 1$ quan $\rho \rightarrow \infty$)
- $K = \frac{2}{\cosh^2 \rho} > 0$ i $K \rightarrow 0$ quan $\rho \rightarrow \infty$.

Exemple: Solitó Cigar

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2 \quad \text{a } \mathbb{R}^2$$



- Asimptòtic a un cilindre ($\tanh \rho \rightarrow 1$ quan $\rho \rightarrow \infty$)

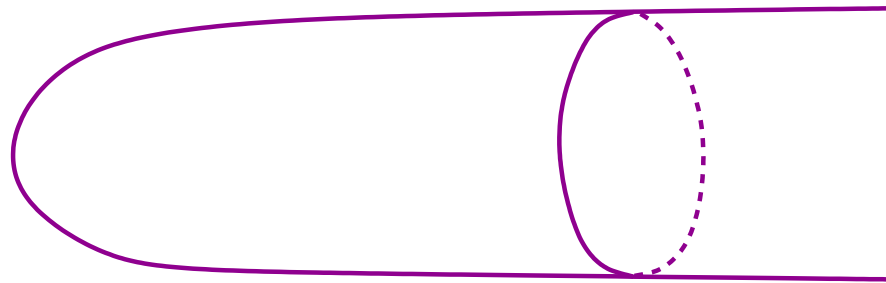
- $K = \frac{2}{\cosh^2 \rho} > 0$ i $K \rightarrow 0$ quan $\rho \rightarrow \infty$.

- És un solitó gradient estable:

$$f = -2 \log \cosh \rho \text{ compleix } Hess(f) + \frac{2}{\cosh^2 \rho} g = 0$$

Exemple: Solitó Cigar

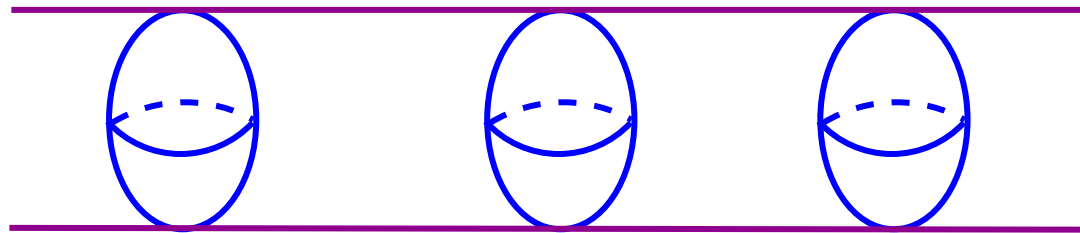
$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2 \quad \text{a } \mathbf{R}^2$$



- Asimptòtic a un cilindre ($\tanh \rho \rightarrow 1$ quan $\rho \rightarrow \infty$)
- $K = \frac{2}{\cosh^2 \rho} > 0$ i $K \rightarrow 0$ quan $\rho \rightarrow \infty$.
- És un solitó gradient estable:
 $f = -2 \log \cosh \rho$ compleix $Hess(f) + \frac{2}{\cosh^2 \rho} g = 0$
- $\text{Cigar} \times S^1$ **NO** hauria de sortir després d'explotar les singularitats.

Més exemples

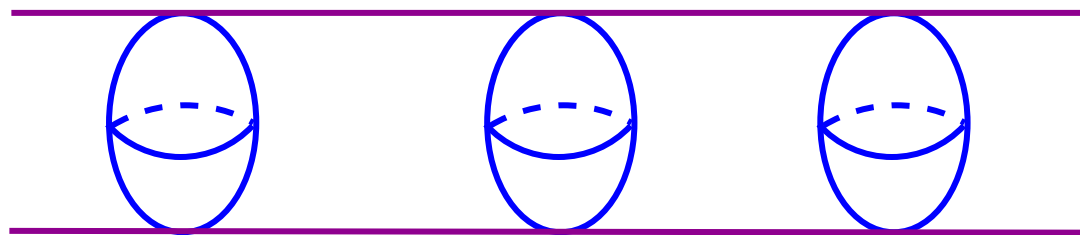
- Cilindre $S^2 \times \mathbf{R}$:



El factor S^2 col·lapsa en temps finit i $\mathbf{R}$ resta constant.

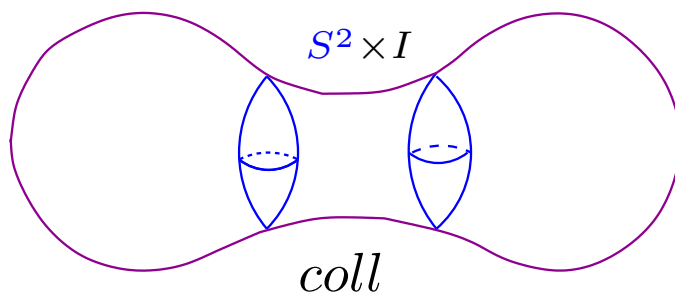
Més exemples

- Cilindre $S^2 \times \mathbf{R}$:



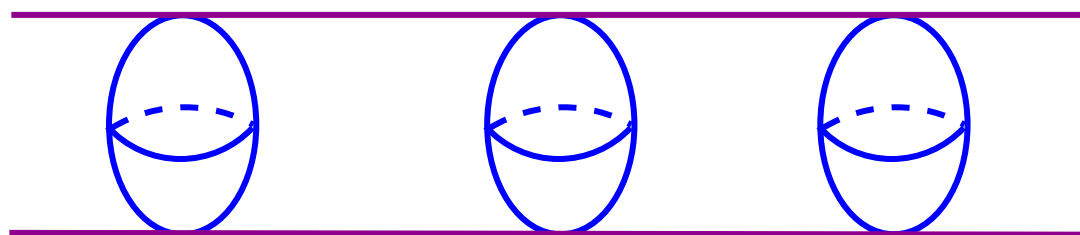
El factor S^2 col·lapsa en temps finit i $\mathbf{R}$ resta constant.

- S^3 amb un “coll”:



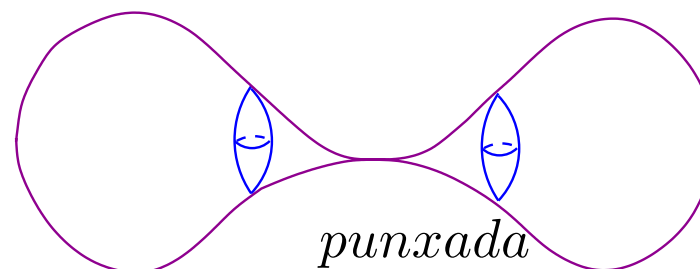
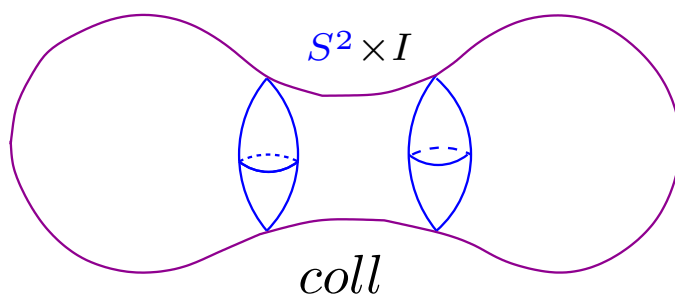
Més exemples

- Cilindre $S^2 \times \mathbf{R}$:

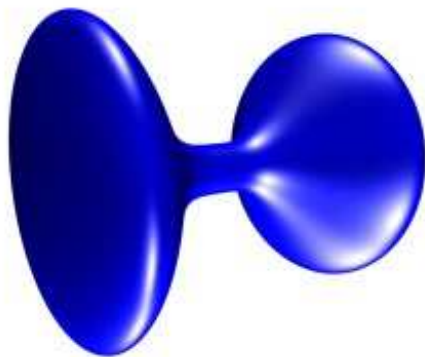


El factor S^2 col·lapsa en temps finit i $\mathbf{R}$ resta constant.

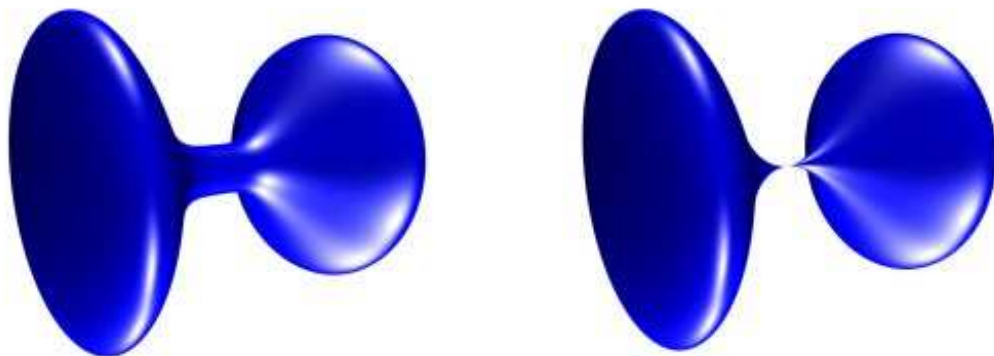
- S^3 amb un “coll”:



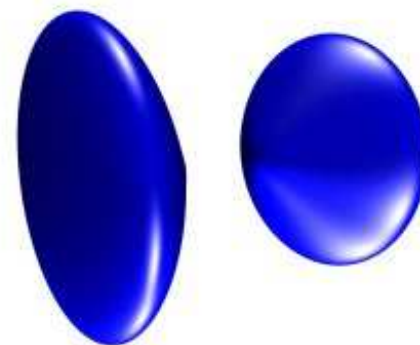
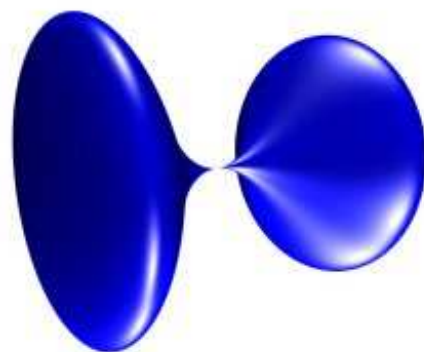
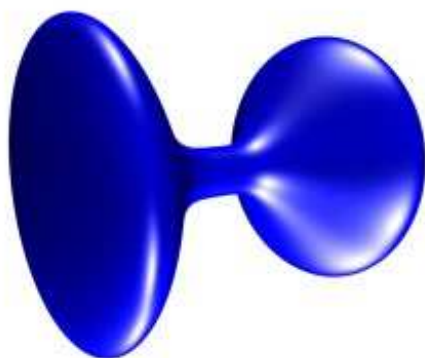
Situació ideal (Dimensió 3)



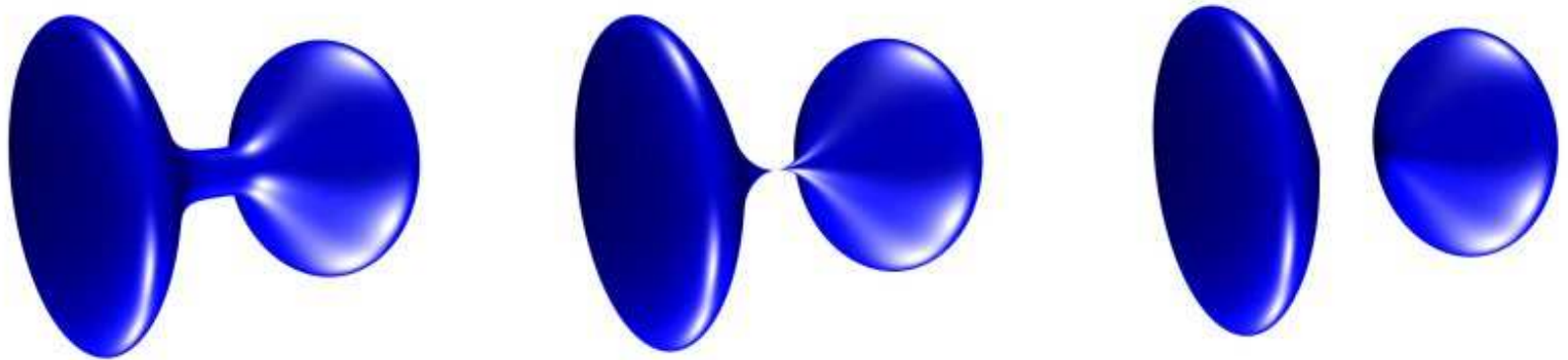
Situació ideal (Dimensió 3)



Situació ideal (Dimensió 3)



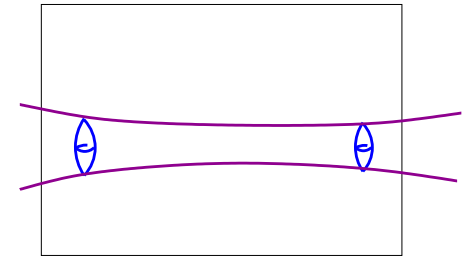
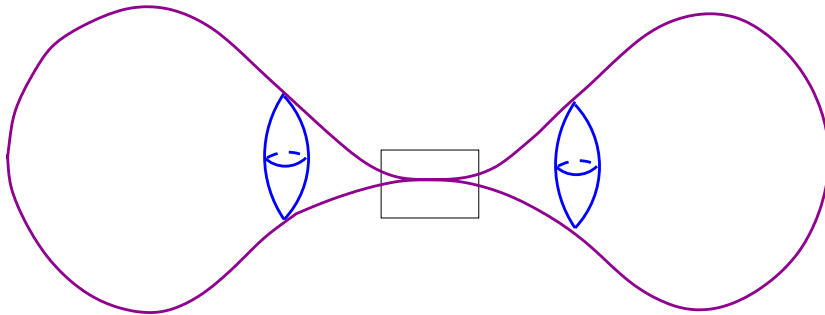
Situació ideal (Dimensió 3)



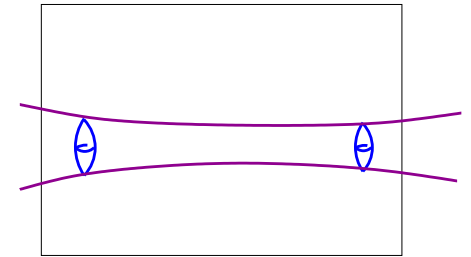
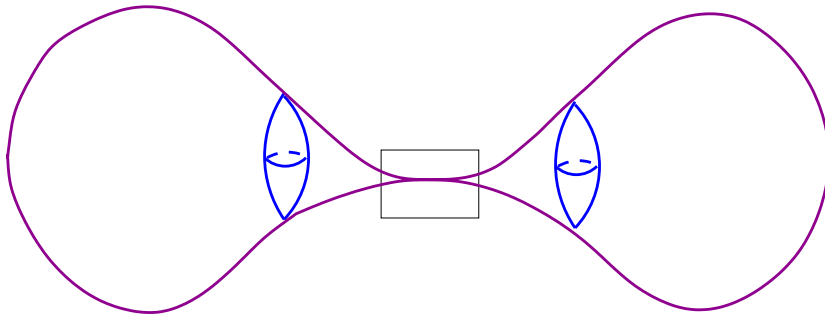
...però això no sabem si és cert!

Haurem de tallar i enganxar.

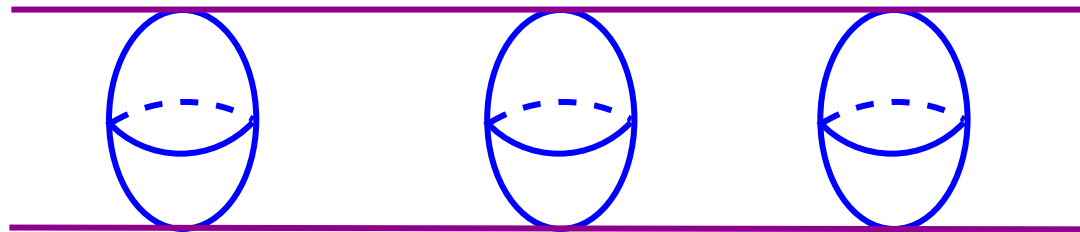
Zoom de singularitats en dimensió tres



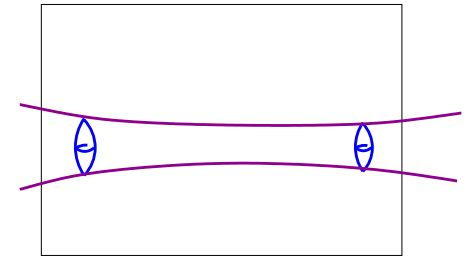
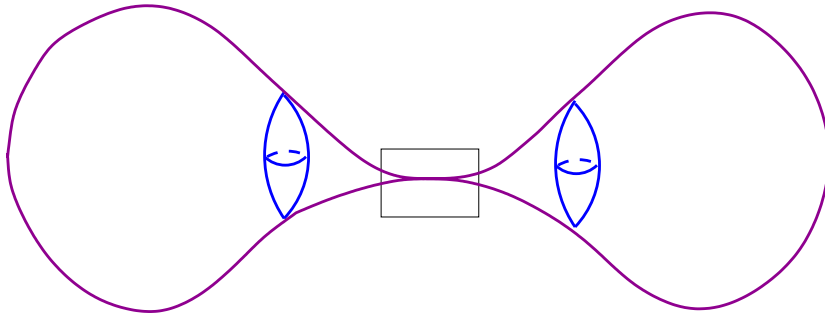
Zoom de singularitats en dimensió tres



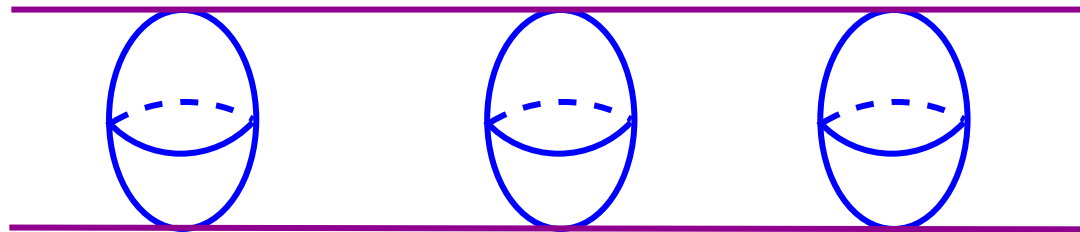
Quan fem un zoom o explosió d'una singularitat
ens agradaria obtenir el cilindre $S^2 \times \mathbf{R}$



Zoom de singularitats en dimensió tres



Quan fem un zoom o explosió d'una singularitat
ens agradaria obtenir el cilindre $S^2 \times \mathbf{R}$



- Hamilton: Com podem evitar el $\text{Cigar} \times S^1$?

Ricci positiva

Teorema (Hamilton 1982)

If M^3 admet una mètrica amb $(R_{ij}) > 0$

$\Rightarrow M^3$ admet una mètrica amb $\text{curv} \equiv 1$

- Idea:**
- $(R_{ij}) > 0$ és una condició invariant pel flux en dim 3.
 - Es poden controlar els valors propis de R_{ij} .

Teorema (Hamilton 1982)

If M^3 admet una mètrica amb $(R_{ij}) > 0$

$\Rightarrow M^3$ admet una mètrica amb $\text{curv} \equiv 1$

Idea: • $(R_{ij}) > 0$ és una condició invariant pel flux en dim 3.

- Es poden controlar els valors propis de R_{ij} .
 - Hi ha un temps d'extinció del flux
 - Els tres valors propis convergeixen a ∞ a la mateixa velocitat.
 - El limit reescalat convergeix a una mètrica de curv. constant.

Teorema (Hamilton 1982)

If M^3 admet una mètrica amb $(R_{ij}) > 0$

$\Rightarrow M^3$ admet una mètrica amb $\text{curv} \equiv 1$

Idea: • $(R_{ij}) > 0$ és una condició invariant pel flux en dim 3.

- Es poden controlar els valors propis de R_{ij} .
 - Hi ha un temps d'extinció del flux
 - Els tres valors propis convergeixen a ∞ a la mateixa velocitat.
 - El limit reescalat convergeix a una mètrica de curv. cntant.

Generalizació:

- Si $(R_{ij}) \geq 0$, admet una mètrica loc. homogènia, $\mathbf{R}^3$, $S^2 \times \mathbf{R}$, S^3 .
(Principi max. fort per tensors (Hamilton)).

Curvatura escalar R

$$R = \sum R_{ii}$$

- Evolució de R pel flux de Ricci:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|(R_{ij})|^2$$

Curvatura escalar R

$$R = \sum R_{ii}$$

- Evolució de R pel flux de Ricci:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|(R_{ij})|^2$$

- Principi del màxim: $\min_M R$ is no-decreixent en t .

Curvatura escalar R

$$R = \sum R_{ii}$$

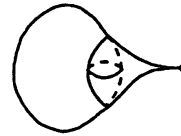
- Evolució de R pel flux de Ricci:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|(R_{ij})|^2$$

- Principi del màxim: $\min_M R$ is no-decreixent en t .
- Més treball: R controla les singularitats en dim 3:

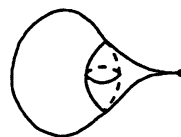
Quan ens acostem al temps límit, $R \rightarrow \infty$ en algun punt.

Singularitats



Les singularitats passen al **temps límit T** d'existència del flux.
Quan $t \rightarrow T$, $R \rightarrow \infty$ en algun punt

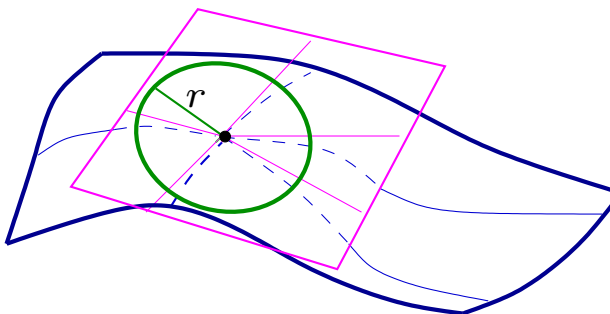
Singularitats



Les singularitats passen al **temps límit T** d'existència del flux.
Quan $t \rightarrow T$, $R \rightarrow \infty$ en algun punt

- Questió de Hamilton: com es pot controlar el radi d'injectivitat a prop de les singularitats?

$$\text{inj}(x) = \sup\{r \mid \exp_x : B(0, r) \subset T_x M \rightarrow B(x, r) \subset M \text{ és diffeo}\}$$



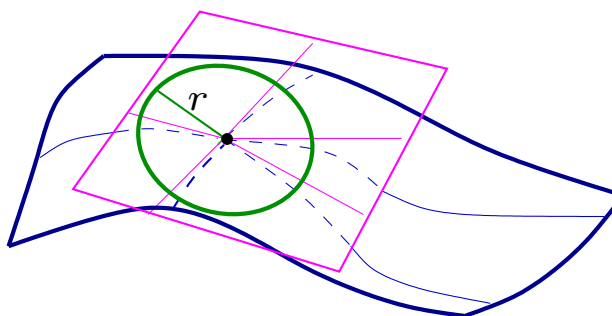
Singularitats

Les singularitats passen al **temps límit** T d'existència del flux.

Quan $t \rightarrow T$, $R \rightarrow \infty$ en algun punt

- Questió de Hamilton: com es pot controlar el radi d'injectivitat a prop de les singularitats?

$$\text{inj}(x) = \sup\{r \mid \exp_x : B(0, r) \subset T_x M \rightarrow B(x, r) \subset M \text{ és diffeo}\}$$



- Perelman 2002: Les solucions del flux de Ricci són localment no-col·lapsades (després de reescalar a $R = 1$).

Perelman 2002



G. Perelman (1966)

Teorema: κ -non col·lapsada

$$\begin{aligned} &\exists \kappa > 0 \text{ t.q. } \forall r > 0, \forall x \in M \text{ i } \forall t \in [1, T), \\ &\text{Si } \forall y \in B(x, t, r), |R(y, t)| \leq r^{-2} \Rightarrow \frac{\text{vol}(B(x, t, r))}{r^3} \geq \kappa \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Quan normalitzem a $|R(y, t)| = 1$, cota inferior del radi d'injectivitat.

Teorema: κ -non col·lapsada

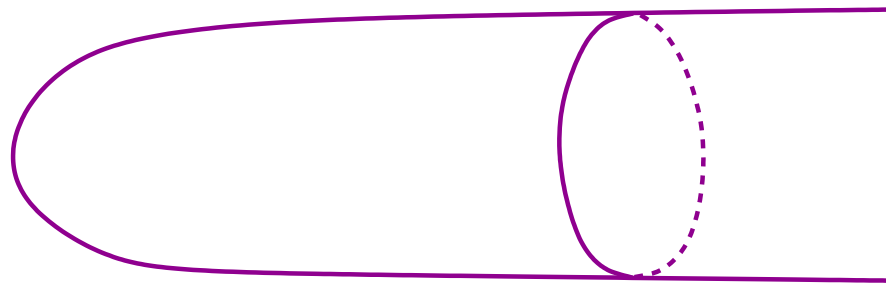
$$\begin{aligned} &\exists \kappa > 0 \text{ t.q. } \forall r > 0, \forall x \in M \text{ i } \forall t \in [1, T), \\ &\text{Si } \forall y \in B(x, t, r), |R(y, t)| \leq r^{-2} \Rightarrow \frac{\text{vol}(B(x, t, r))}{r^3} \geq \kappa \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Quan normalitzem a $|R(y, t)| = 1$, cota inferior del radi d'injectivitat.

- Idea: flux de Ricci com a flux gradient per cert funcional.
- Això exclou el solitó del cigar com a model local per les singularitats
Volem cilindres $S^2 \times \mathbf{R}$ com a model locals per les singularitats.

El solitó cigar és κ -col·lapsat

$$g_{cigar} = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2} = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2 \quad \text{a } \mathbf{R}^2$$



Considerem $g_{cigar} + dz^2$ a $\mathbf{R}^2 \times S^1$.

Com que $K = \frac{2}{\cosh^2 \rho} \rightarrow 0$ i $inj \rightarrow 1$ quan $\rho \rightarrow \infty$,
S'exclou com a model local per singularitats (pel κ -no col·lapse)

(κ -no col·lapse: quan reescalem a $|R| = 1$, $inj > c(\kappa) > 0$)

Teorema: κ -no collapse

$\exists \kappa > 0$ s.t. $\forall r > 0, \forall x \in M$ i $\forall t \in [1, T)$,

Si $\forall y \in B(x, t, r), |R(y, t)| \leq r^{-2} \Rightarrow \frac{\text{vol}(B(x, t, r))}{r^3} \geq \kappa$

$\Rightarrow$ quan normalitzem a $|R(y, t)| = 1$, cota inferior del radi d'injectivitat.

Teorema: κ -no collapse

$\exists \kappa > 0$ s.t. $\forall r > 0, \forall x \in M$ i $\forall t \in [1, T)$,

Si $\forall y \in B(x, t, r), |R(y, t)| \leq r^{-2} \Rightarrow \frac{\text{vol}(B(x, t, r))}{r^3} \geq \kappa$

$\Rightarrow$ quan normalitzem a $|R(y, t)| = 1$, cota inferior del radi d'injectivitat.

Teorema: entorn canònic

$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0$, t.q. $\forall x \in M$ i $\forall t \in [1, T)$,

Si $R(x, t) \geq r^{-2} \Rightarrow x \in (M, g(t))$ pertany a un ϵ -entorn canònic.

ϵ -entorn
canònic:

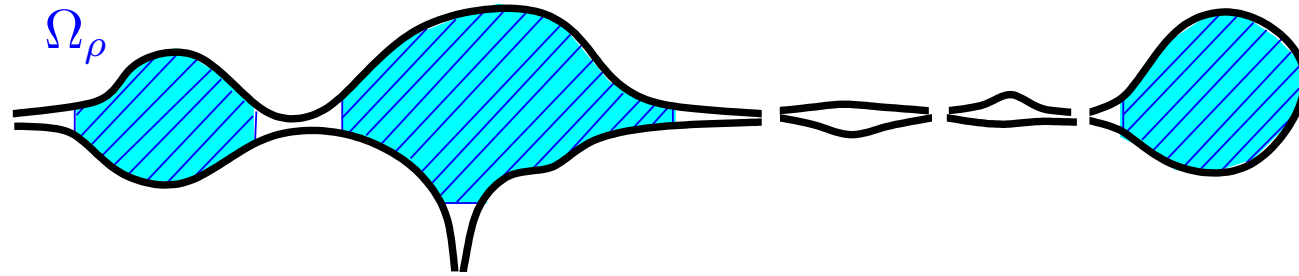
- ϵ -a prop d'un cilindre $S^2 \times (0, l)$
- ϵ -a prop de B^3 oberta amb final cilíndric
- varietat amb $K > 0$.

Flux de Ricci amb δ -cirurgia

$(M^3, g(t))$ flux de Ricci, $t \in [0, T)$.

$\Omega_\rho = \{x \in M \mid R(x, t) \leq \rho^{-2}, t \rightarrow T\}$ compacte.

$\Omega = \bigcup_{\rho > 0} \Omega_\rho$ obert. g_∞ = mètrica límit a Ω .

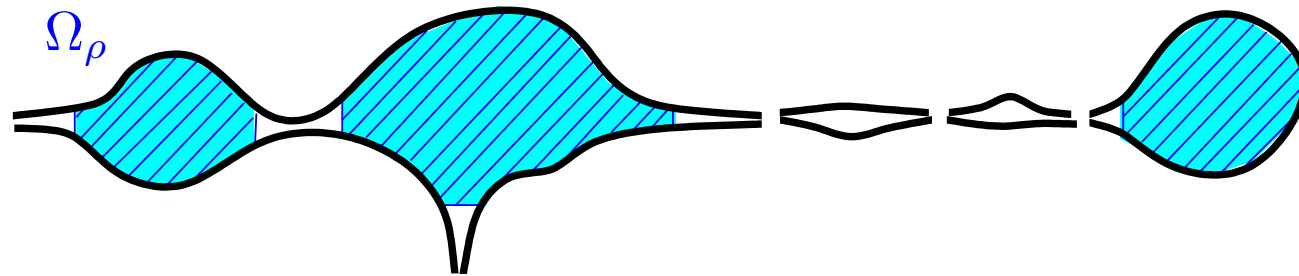


Flux de Ricci amb δ -cirurgia

$(M^3, g(t))$ flux de Ricci, $t \in [0, T)$.

$\Omega_\rho = \{x \in M \mid R(x, t) \leq \rho^{-2}, t \rightarrow T\}$ compacte.

$\Omega = \bigcup_{\rho > 0} \Omega_\rho$ obert. g_∞ = mètrica límit a Ω .



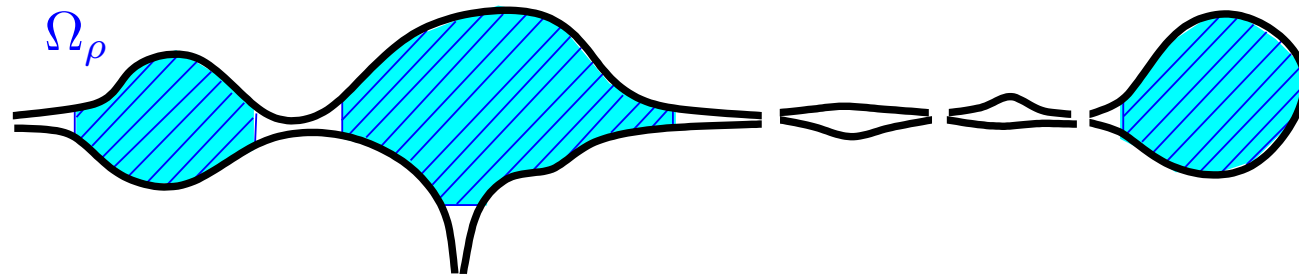
Si $t \lesssim T \Rightarrow (M^3 - \Omega_r, g(t)) =$ unió de ε -entorns canònics.

Flux de Ricci amb δ -cirurgia

$(M^3, g(t))$ flux de Ricci, $t \in [0, T)$.

$\Omega_\rho = \{x \in M \mid R(x, t) \leq \rho^{-2}, t \rightarrow T\}$ compacte.

$\Omega = \bigcup_{\rho > 0} \Omega_\rho$ obert. g_∞ = mètrica límit a Ω .



Si $t \lesssim T \Rightarrow (M^3 - \Omega_r, g(t)) =$ unió de ε -entorns canònics.

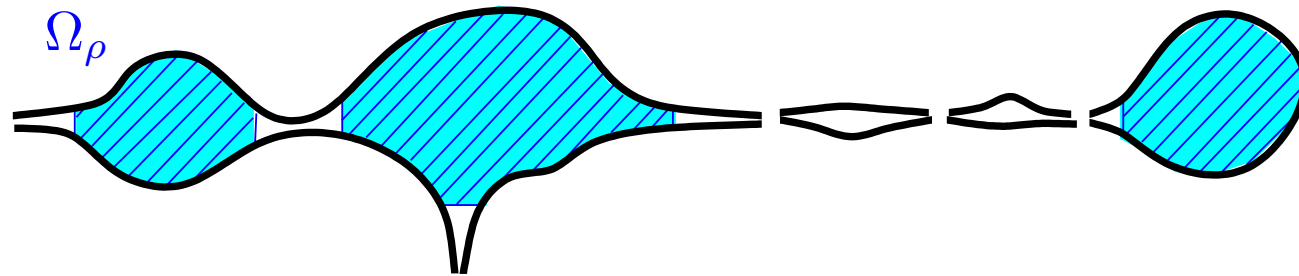
$\exists 0 < \delta < 1$ tal que si $\rho = \delta r$, aleshores les components de $M^3 - \Omega_\rho$ són $S^2 \times [0, 1]$, B^3 o varietats amb $K > 0$.

Flux de Ricci amb δ -cirurgia

$(M^3, g(t))$ flux de Ricci, $t \in [0, T)$.

$\Omega_\rho = \{x \in M \mid R(x, t) \leq \rho^{-2}, t \rightarrow T\}$ compacte.

$\Omega = \bigcup_{\rho>0} \Omega_\rho$ obert. g_∞ = mètrica límit a Ω .



Si $t \lesssim T \Rightarrow (M^3 - \Omega_r, g(t)) =$ unió de ε -entorns canònics.

$\exists 0 < \delta < 1$ tal que si $\rho = \delta r$, aleshores les components de $M^3 - \Omega_\rho$ són $S^2 \times [0, 1], B^3$ o varietats amb $K > 0$.

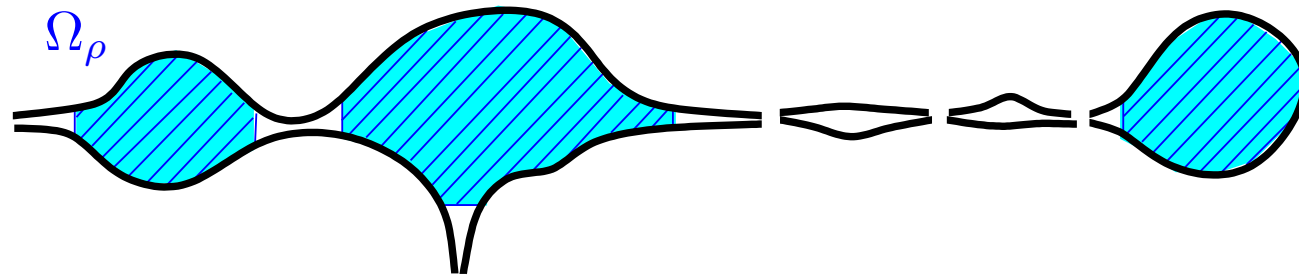
- δ -cirurgia: Enganxem semiesferes a la vora de (Ω_ρ, g_∞) , allisem i continuem el flux.

Flux de Ricci amb δ -cirurgia

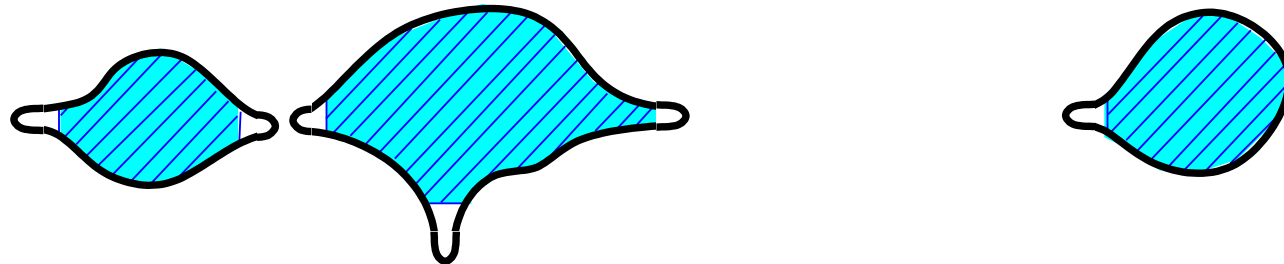
$(M^3, g(t))$ flux de Ricci, $t \in [0, T)$.

$\Omega_\rho = \{x \in M \mid R(x, t) \leq \rho^{-2}, t \rightarrow T\}$ compacte.

$\Omega = \bigcup_{\rho > 0} \Omega_\rho$ obert. g_∞ = mètrica límit a Ω .



$M^3 - \Omega_\rho =$ unió finita de $S^2 \times [0, 1], B^3$ o varietat amb $K > 0$



...i continuem el flux.

Evolució del flux de Ricci δ -cirurgia

1 Hi poden haver una infinitat de temps de cirurgia.

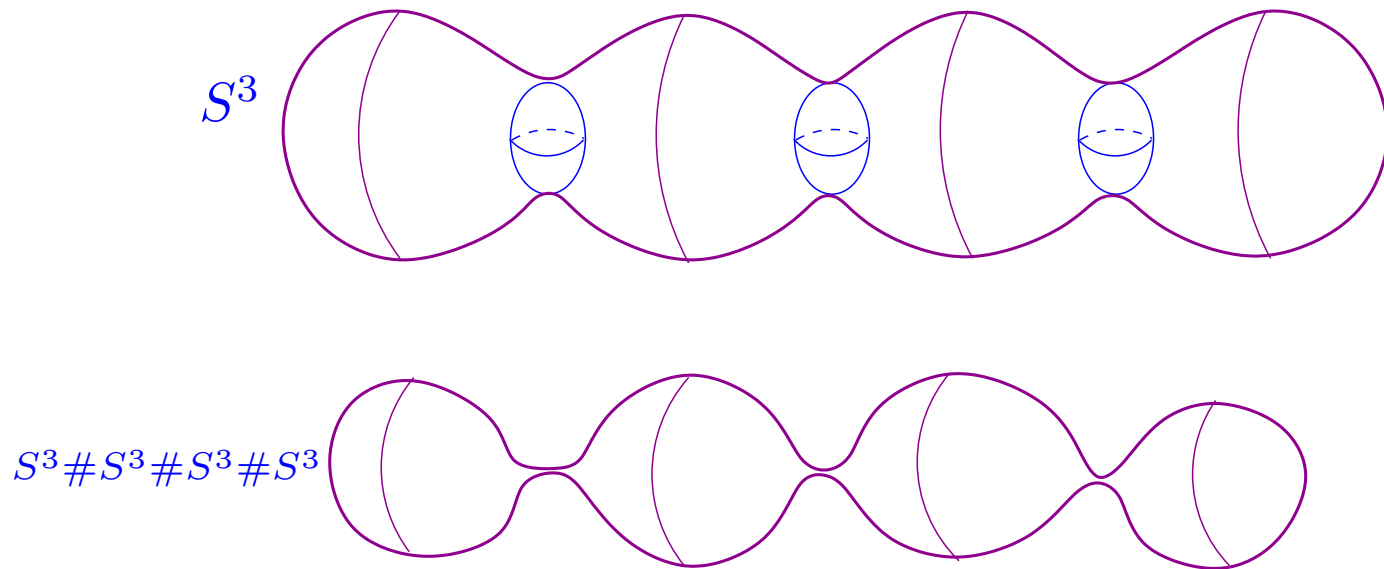
Els temps de cirurgia no s'acumulen (estimacions de volum).

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(M, g(t)) = - \int_M R \leq c t n t \quad (\min_M R \text{ no-decreixent})$$

i cada **cirugia decreix** una quantitat de volum minorada

Evolució del flux de Ricci δ -cirurgia

- 1 Hi poden haver una infinitat de temps de cirurgia.
Els temps de cirurgia no s'acumulen (estimacions de volum).
- 2 A cada cirurgia tenim una suma connexa, que pot ser topològicament trivial ($M \# S^3$).



Evolució del flux de Ricci δ -cirurgia

- 1 Hi poden haver una infinitat de temps de cirurgia.
Els temps de cirurgia no s'acumulen (estimacions de volum).
- 2 A cada cirurgia tenim una suma connexa, que pot ser topològicament trivial ($M \# S^3$).
- 3 δ i altres paràmetres canvien a cada cirurgia.
El flux depend de l'elecció δ : no hi ha unicitat!

Evolució del flux de Ricci δ -cirurgia

- 1 Hi poden haver una infinitat de temps de cirurgia.
Els temps de cirurgia no s'acumulen (estimacions de volum).
- 2 A cada cirurgia tenim una suma connexa, que pot ser topològicament trivial ($M \# S^3$).
- 3 δ i altres paràmetres canvien a cada cirurgia.
El flux depend de l'elecció δ : no hi ha unicitat!
- 4 Per 1: $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ o bé s'acaba (extingeix) en suma connexa de varietats} \\ \text{de curvatura constant } \equiv +1 \text{ i } S^2 \times S^1, \\ \bullet \text{ o bé continua fins a temps infinit.} \end{array} \right.$

Evolució a llarg termini

Per temps prou llarg, els M_t es divideix en:

$$M_t = M_t^{prima} \cup M_t^{grassa}$$

prima/grassa segons si el radi d'inject. és menor/major que $c(R, t, \delta)$.

Evolució a llarg termini

Per temps prou llarg, els M_t es divideix en:

$$M_t = M_t^{prima} \cup M_t^{grassa}$$

prima/grassa segons si el radi d'inject. és menor/major que $c(R, t, \delta)$.

Això correspon a la descomposició JSJ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_t^{grassa} & = \text{hiperbòlica} \\ M_t^{prima} & = \text{unió de fibrats de Seifert} \end{array} \right.$$

Drecera per la conjectura de Poincaré

Teorema (Perelman)

Si $\pi_3(M^3) \neq 0 \Rightarrow$ el flux s'extingeix en temps finit.

Per què implica la conjectura de Poincaré:

- $\pi_1(M^3) = 0 \Rightarrow \pi_3(M^3) \neq 0$
- Extingit a $T < \infty \Rightarrow M^3 = S^3/\Gamma \# \dots \# S^1 \times S^2$

Drecera per la conjectura de Poincaré

Teorema (Perelman)

Si $\pi_3(M^3) \neq 0 \Rightarrow$ el flux s'extingeix en temps finit.

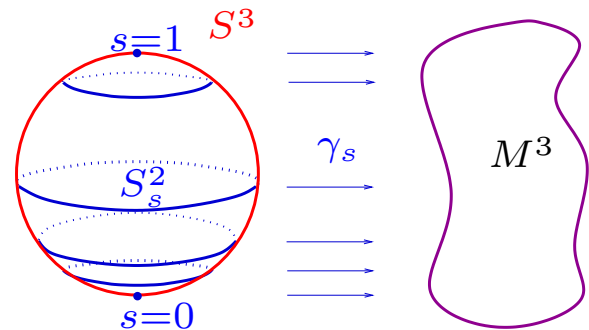
- $\pi_1(M^3) = 0 \Rightarrow \pi_3(M^3) \neq 0$
- Extingit a $T < \infty \Rightarrow M^3 = S^3/\Gamma \# \cdots \# S^1 \times S^2$

Dem. de Colding-Minicozzi (sketch):

- $\Theta \stackrel{def}{=} \{f : S^2 \rightarrow M^3\}$ certa regularitat,

$M^3 \subset \Theta$ com aplicacions constants

$\pi_1(\Theta, M^3) \neq 0$ per què $\pi_3(M^3) \neq 0$



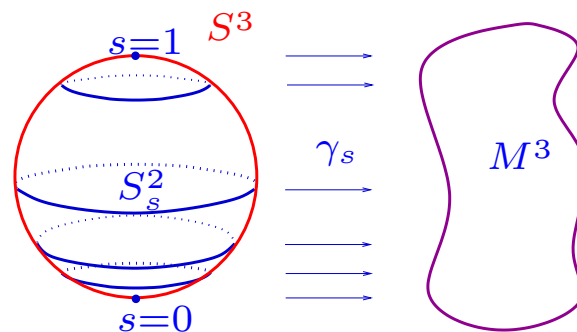
Drecera per la conjectura de Poincaré

Teorema (Perelman)

Si $\pi_3(M^3) \neq 0 \Rightarrow$ el flux s'extingeix en temps finit.

- $\Theta := \{f : S^2 \rightarrow M^3\}$ amb certa regularitat. Fixem $0 \neq \theta \in \pi_1(\Theta, M^3)$

$$W(g, \theta) = \min_{\gamma \in \theta} \max_{s \in [0,1]} E(\gamma_s) > 0 \quad E(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_{S^2} \|d\gamma_s\|^2 d\mu_{S^2}$$



Drecera per la conjectura de Poincaré

Teorema (Perelman)

Si $\pi_3(M^3) \neq 0 \Rightarrow$ el flux s'extingeix en temps finit.

- $\Theta := \{f : S^2 \rightarrow M^3\}$ amb certa regularitat. Fixem $0 \neq \theta \in \pi_1(\Theta, M^3)$

$$W(g, \theta) = \min_{\gamma \in \theta} \max_{s \in [0,1]} E(\gamma_s) > 0 \quad E(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_{S^2} \|d\gamma_s\|^2 d\mu_{S^2}$$

- $\frac{d}{dt} W(g(t), \theta) \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W(g(t), \theta)$ quan $W > 0$.

Drecera per la conjectura de Poincaré

Teorema (Perelman)

Si $\pi_3(M^3) \neq 0 \Rightarrow$ el flux s'extingeix en temps finit.

- $\Theta := \{f : S^2 \rightarrow M^3\}$ amb certa regularitat. Fixem $0 \neq \theta \in \pi_1(\Theta, M^3)$

$$W(g, \theta) = \min_{\gamma \in \theta} \max_{s \in [0,1]} E(\gamma_s) > 0 \quad E(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_{S^2} \|d\gamma_s\|^2 d\mu_{S^2}$$

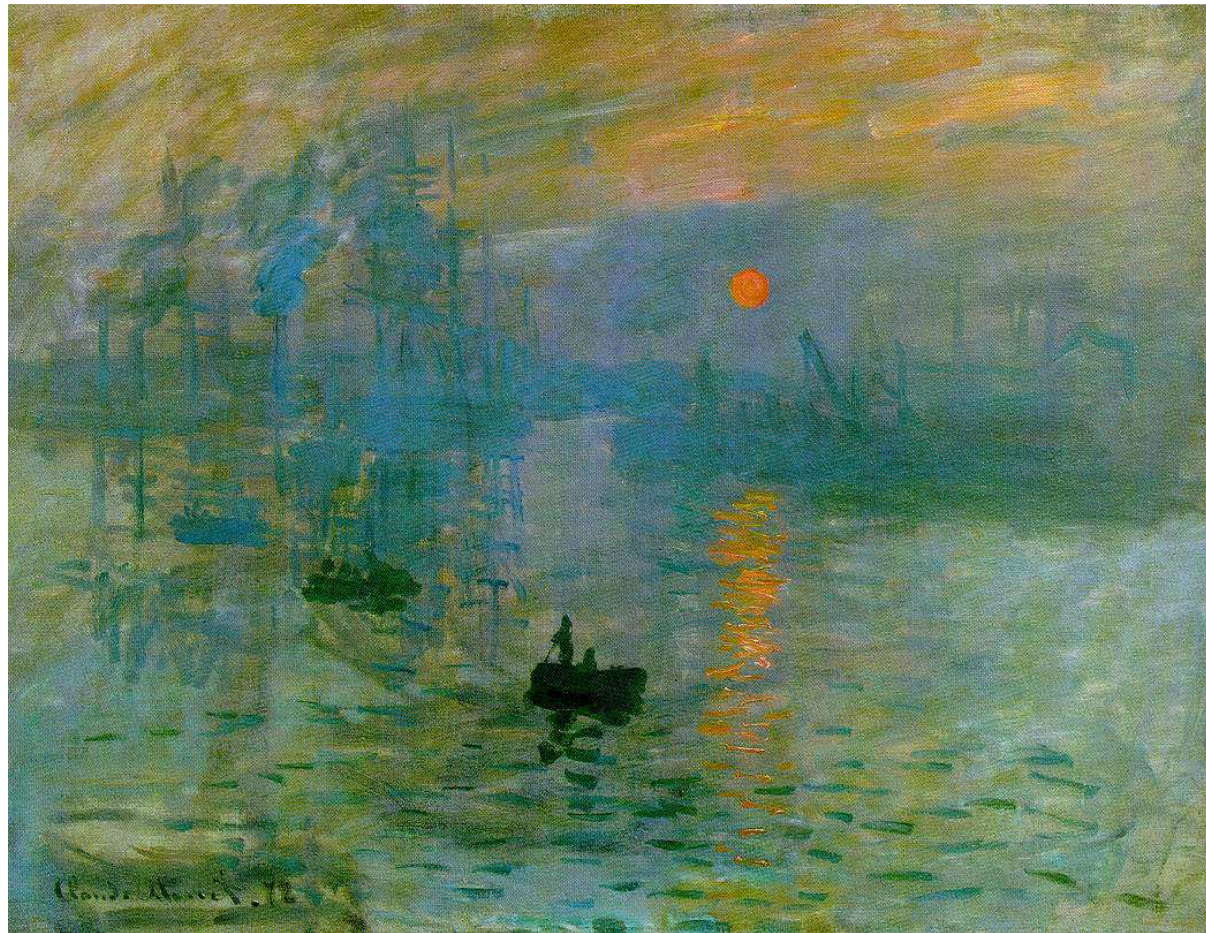
- $\frac{d}{dt} W(g(t), \theta) \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W(g(t), \theta)$ quan $W > 0$.

- $\frac{d}{dt} ((t+C)^{-\frac{3}{4}} W(g(t), \theta)) \leq -4\pi(t+C)^{-\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow \underline{W(g(T), \theta) = 0}$ per cert $T > 0 \Rightarrow$ extingit abans del temps T .

Monet. Impression, soleil levant

Els impressionistes aplicaven una mena de flux als colors?



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

Comportament del flux a llarg termini.



Monet. Impression, soleil levant

