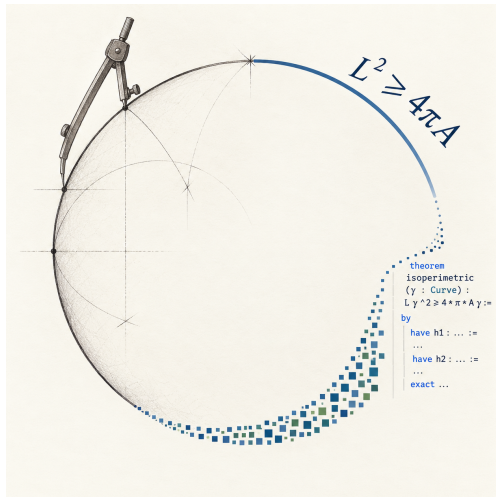


La desigualtat isoperimètrica: dues demostracions i algunes preguntes

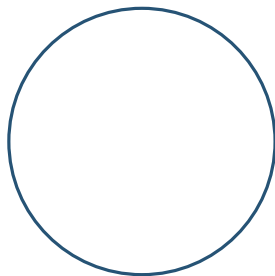
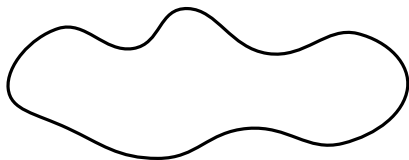
Lliçó inaugural de Matemàtiques,
Estadística Aplicada i MatCAD
UAB

Joan Porti



El problema isoperimètric

**Amb una corda de longitud fixa,
quina és l'àrea més gran que podem envoltar?**



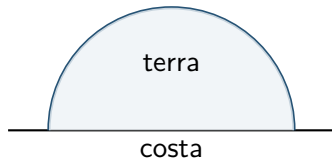
La reina Dido i el problema isoperimètric

A l'*Eneida*, Virgili explica que Dido comprà tanta terra com poguè envoltar amb una pell de bou.

*mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.*

Eneida, I, 367–368

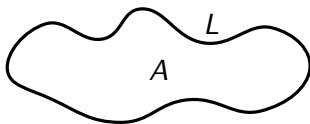
La llegenda diu que tallà la pell en tirs i traçà una semi-circumferència.



El problema de Dido

Amb una costa recta i una corda de longitud fixa, quina forma tanca l'àrea més gran?

La desigualtat isoperimètrica

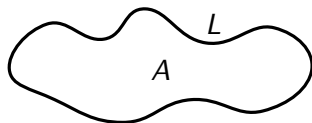


Per a una corba plana, simple i tancada, de longitud L , que envolta una àrea A ,

$$L^2 \geq 4\pi A$$

amb igualtat si, i només si, la corba és una circumferència.

La desigualtat isoperimètrica



Per a una corba plana, simple i tancada, de longitud L , que envolta una àrea A ,

$$L^2 \geq 4\pi A$$

amb igualtat si, i només si, la corba és una circumferència.

Per a una circumferència de radi r :

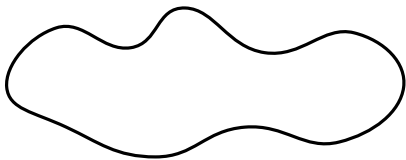
$$L = 2\pi r, \quad A = \pi r^2, \quad L^2 = 4\pi A.$$

Primera demostració: Steiner (1838)

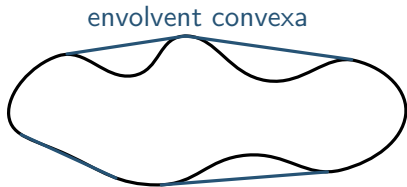
Si hi ha una figura òptima, quina forma ha de tenir?

Primer: ens reduïm cas convex

una corba no convexa,



Primer: ens reduïm cas convex



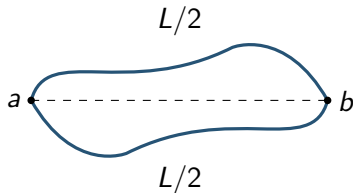
Per a una corba no convexa,
l'envolvent convexa:

- ▶ envolta més àrea i
- ▶ és més curta.

Per buscar un extremal, podem
concentrar-nos en corbes convexes.

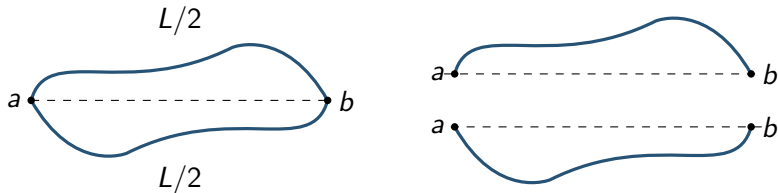
Del problema tancat al problema de Dido

Triem dos punts a, b que divideixen la corba en dos arcs de la mateixa longitud.



Del problema tancat al problema de Dido

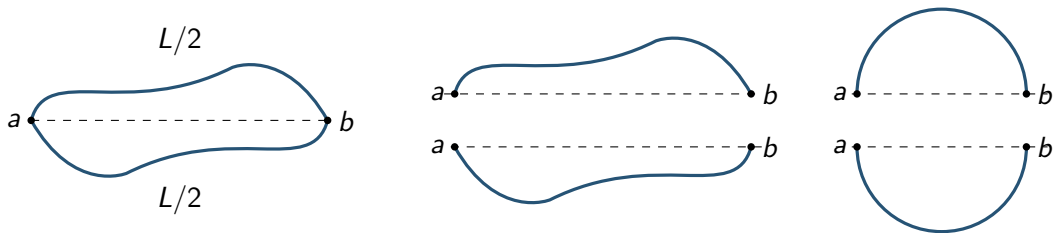
Triem dos punts a, b que divideixen la corba en dos arcs de la mateixa longitud.



En un maximitzador, cadascun dels dos arcs ha de resoldre el problema corresponent amb la corda ab .

Del problema tancat al problema de Dido

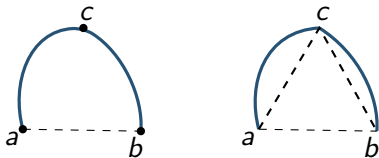
Triem dos punts a, b que divideixen la corba en dos arcs de la mateixa longitud.



En un maximitzador, cadascun dels dos arcs ha de resoldre el problema corresponent amb la corda ab .

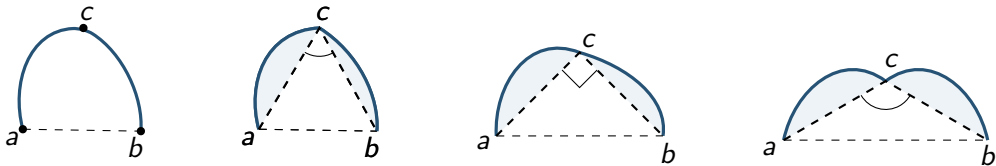
El moviment de Steiner

Fixem un punt c de l'arc i tallem la regió per les de les cordes ca i cb .



El moviment de Steiner

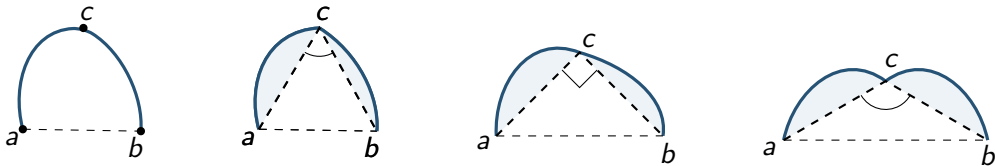
Fixem un punt c de l'arc i tallem la regió per les de les cordes ca i cb . Les dues peces ombrejades es mantenen **rígides**: només en variem l'angle interior.



La longitud de la vora i l'àrea de les peces ombrejades no canvien. Només canvia l'àrea del triangle acb .

El moviment de Steiner

Fixem un punt c de l'arc i tallem la regió per les cordes ca i cb . Les dues peces ombrejades es mantenen **rígides**: només en variem l'angle interior.



La longitud de la vora i l'àrea de les peces ombrejades no canvien. Només canvia l'àrea del triangle acb .

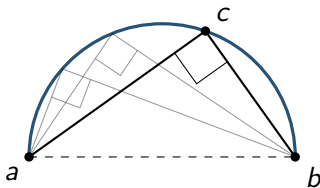
L'àrea màxima del triangle s'assoleix a l'angle recte.

Si una corda bc és la base del triangle, l'altura és màxima quan l'angle és recte

Tales acaba l'argument

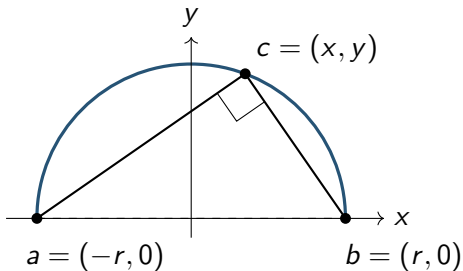
(El recíproc d'un) Teorema de Tales

Si per a cada punt c de l'arc, l'angle $\angle acb$ és recte, aleshores tots aquests punts pertanyen a la circumferència de diàmetre ab .



L'arc de a a b és la semi-circumferència. Repetint l'argument per l'altra meitat, la corba extremal és una circumferència.

Una demostració amb coordenades de Tales



L'angle és recte exactament quan

$$(a - c) \cdot (b - c) = 0.$$

Equivalentment:

$$(-r - x)(r - x) + y^2 = 0,$$

és a dir

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Per tant c pertany a la circumferència de centre $(0,0)$ i radi r .

Aquest argument resol el problema isoperimètric?

Aquest argument resol el problema isoperimètric?

No.

L'argument és incomplet

L'argument de Steiner prova:

Si existeix un maximitzador de l'àrea, ha de ser una circumferència.

Però nosaltres volíem provar:

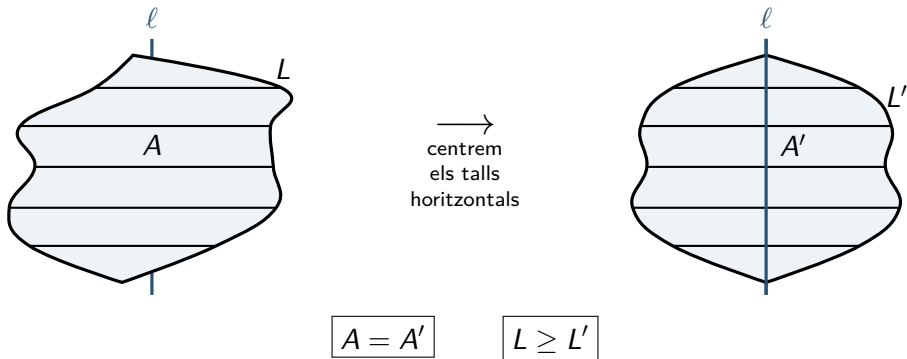
La circumferència és un maximitzador de l'àrea.

Falta demostrar que *hi ha algun maximitzador* de l'àrea.

Observació important

Caracteritzar un objecte extremal no implica que aquest objecte extremal existeixi.

Una altra idea de Steiner: simetrització



Amb la simetrització, Steiner va donar una altra demostració de la desigualtat isoperimètrica amb el mateix problema d'incompletitud.

La idea de simetrització, en canvi, va tenir una llarga vida.

Segona demostració: Hurwitz (1902)

No busquem cap maximitzador.

Demostrem directament una desigualtat que val per a totes les corbes.

Parametritzem una corba per longitud d'arc

Sigui

$$t \mapsto (x(t), y(t)), \quad 0 \leq t \leq L,$$

una parametrització per **longitud d'arc** d'una **corba simple tancada** C^1 .

Longitud d'arc: el vector tangent $(x'(t), y'(t))$ té norma 1:

$$\boxed{x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1.}$$

Després d'una translació podem suposar també que

$$\int_0^L x(t) dt = \int_0^L y(t) dt = 0.$$

La fórmula de Green i la desigualtat de Cauchy-Schwarz

Per una corba simple tancada i orientada positivament, el teorema de **Green** dona

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L (xy' - yx') dt.$$

El terme $(xy' - yx')$ és el producte escalar dels vectors (x, y) i $(y', -x')$

La fórmula de Green i la desigualtat de Cauchy-Schwarz

Per una corba simple tancada i orientada positivament, el teorema de **Green** dona

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L (xy' - yx') dt.$$

El terme $(xy' - yx')$ és el producte escalar dels vectors (x, y) i $(y', -x')$

Apliquem dues versions de **Cauchy-Schwarz**:

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{2} \int_0^L \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^L (x^2 + y^2) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^L ((x')^2 + (y')^2) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Com que la parametrització és per longitud d'arc, $\int_0^L ((x')^2 + (y')^2) dt = L$.

La desigualtat de Wirtinger

Si f és L -periòdica i té mitjana zero,

$$f(t+L) = f(t) \quad \text{per } t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \int_0^L f(t) dt = 0,$$

aleshores

$$\int_0^L f(t)^2 dt \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L f'(t)^2 dt.$$

Intuitivament

Una funció periòdica de mitjana zero no pot ser gran sense variar prou.

Anàlisi espectral o de Fourier

La constant ve del primer harmònic:

$$\lambda_1 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2.$$

La desigualtat de Wirtinger

Si f és L -periòdica i té mitjana zero,

$$f(t+L) = f(t) \quad \text{per } t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \int_0^L f(t) dt = 0,$$

aleshores

$$\int_0^L f(t)^2 dt \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L f'(t)^2 dt.$$

Intuitivament

Una funció periòdica de mitjana zero no pot ser gran sense variar prou.

Anàlisi espectral o de Fourier

La constant ve del primer harmònic:

$$\lambda_1 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2.$$

$$\int (f')^2 = - \int f f'' = \int f \Delta f \geq \lambda_1 \int f^2.$$

Apliquem Wirtinger a les coordenades

Com que hem triat l'origen de manera que x i y tenen mitjana zero, Wirtinger dona

$$\int_0^L (x^2 + y^2) dt \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L ((x')^2 + (y')^2) dt.$$

Veníem de Cauchy-Schwarz

$$A \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^L (x^2 + y^2) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^L ((x')^2 + (y')^2) dt \right)^{1/2}$$

Per tant:

$$A \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2\pi} \int_0^L ((x')^2 + (y')^2) dt = \frac{L^2}{4\pi},$$

perquè $(x')^2 + (y')^2 = 1$. És a dir,

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

I la igualtat?

Tenim igualta a Cauchy-Schwarz quan les funcions de t

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

són múltiples l'una de l'altre per una constant.

Com que parametritzem per l'arc, $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1$, obtenim igualtat a C-S quan

$$x^2 + y^2 = C.$$

Que és l'equació d'una circumferència centrada en l'origen.

Dues demostracions, dues explicacions

Steiner

Variació geomètrica

Una figura que no sigui la circumferència pot millorar-se mitjançant moviments geomètrics.

Hurwitz

El primer harmònic

Wirtinger fa aparèixer els primers modes: $\cos(2\pi s/L)$ i $\sin(2\pi s/L)$.

Quina de les dues explica millor per què apareix la circumferència?

Què és una demostració?

La noció de demostració ha evolucionat històricament

El **rigor** actual es va establir sobretot als segles XIX i XX.

- ▶ Es van precisar formalment nocions que intuitivament poden semblar evidents. Per exemple les nocions de límit o continuïtat.
- ▶ Es va crear la teoria de conjunts i es va introduir l'axiomatització, tot i els límits de la lògica.

La noció de demostració ha evolucionat històricament

El **rigor** actual es va establir sobretot als segles XIX i XX.

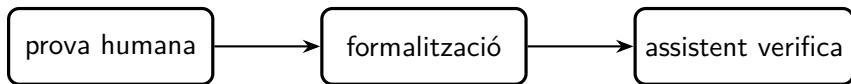
- ▶ Es van precisar formalment nocions que intuitivament poden semblar evidents. Per exemple les nocions de límit o continuïtat.
- ▶ Es va crear la teoria de conjunts i es va introduir l'axiomatització, tot i els límits de la lògica.

El rigor també consisteix a descobrir **quines afirmacions necessiten realment una justificació**. El problema de Steiner n'és un exemple:

caracteritzar un extremal $\neq$ demostrar que l'extremal existeix.

Actualment tenim **assistents de demostració** que verifiquen la correcció de demostracions formalitzades.

Formalitzar una demostració amb un *Proof Assistant*



- ▶ Una **prova humana** omet passos rutinaris, usa context i confia en el lector. Un argument porta implícita molta matemàtica compartida que autor i lector dona per sabuda.
- ▶ Una **formalització** ha de fer explícits els objectes, les hipòtesis i tots els ingredients de la demostració.
- ▶ Un cop formalitzada, l'**assistent de demostració** és un software/llenguatge de programació que verifica que sigui correcte.

LEAN és l'assistent més utilitzat en matemàtiques pures.

Hurwitz, 1902 → Lean, 2026

El març de 2026, Miraj Samarakkody va formalitzar en **Lean 4 + Mathlib** la desigualtat isoperimètrica seguint l'enfocament de Hurwitz.

La prova matemàtica

Corbes C^1 simples i tancades,
parametrització per longitud d'arc,
Green, Cauchy-Schwarz i Wirtinger fins
obtenir

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Verificació amb assistent

Cal formalitzar cada pas de l'argument
per a que un *assistent de demostració* ho
pugui verificar.

Mathlib és una biblioteca amb resultats
formalitzats en Lean.

La prova que acabem de veure s'ha verificat mecànicament.

Què esperem d'una demostració?

Convèncer i certificar

Establir que la conclusió es dedueix de les hipòtesis i permetre comprovar-ne la correcció.

Explicar

Fer visible la idea que hi ha darrere del resultat: *per què* és cert.

Descobrir

Introduir una idea, una tècnica o un punt de vista que permeti anar més enllà.

Connectar

Relacionar un problema amb altres parts de les matemàtiques.

Què esperem d'una demostració?

Convèncer i certificar

Establir que la conclusió es dedueix de les hipòtesis i permetre comprovar-ne la correcció.

Explicar

Fer visible la idea que hi ha darrere del resultat: *per què* és cert.

Descobrir

Introduir una idea, una tècnica o un punt de vista que permeti anar més enllà.

Connectar

Relacionar un problema amb altres parts de les matemàtiques.

Fins no fa gaire els humans feiem tot això tot sols (o amb altres humans).

Cada vegada hi ha més intervenció d'IA que progressa a tota velocitat. Com ens ajuda i com la farem servir en el futur?

Gràcies per la vostra paciència