

La quadratura del cercle i els polígons impossibles

Centre Cívic Guinardó



Roberto Rubio
Universitat de Barcelona

Aula **141**



Opini3n

A close-up portrait of Fernando Alonso, a professional racing driver, looking slightly to the left with a serious expression. He is wearing a white racing suit with various sponsor logos.

Alonso y la cuadratura del c3rculo

OPINI3N



10/07/2020 | Act. el 11/07/2020 a las 17:17 CEST
Josep Llu3s Merlos
@JLIMerlos

RENAULT

McLaren



0

Opinión



La cuadratura del círculo de Setién

OPINIÓN

 01/02/2020 | Act. el 26/02/2020 a las 14:45 CET
Ernest Folch
@ErnestFolch

   | 20

ECONOMIA

El president Torra i la difícil quadratura del Cercle

Sánchez y la cuadratura del Cercle

JORNADES CERCLE D'ECONOMIA: CRÒNICA

La quadratura del Cercle d'Economia: Junqueras sí, però sense procés

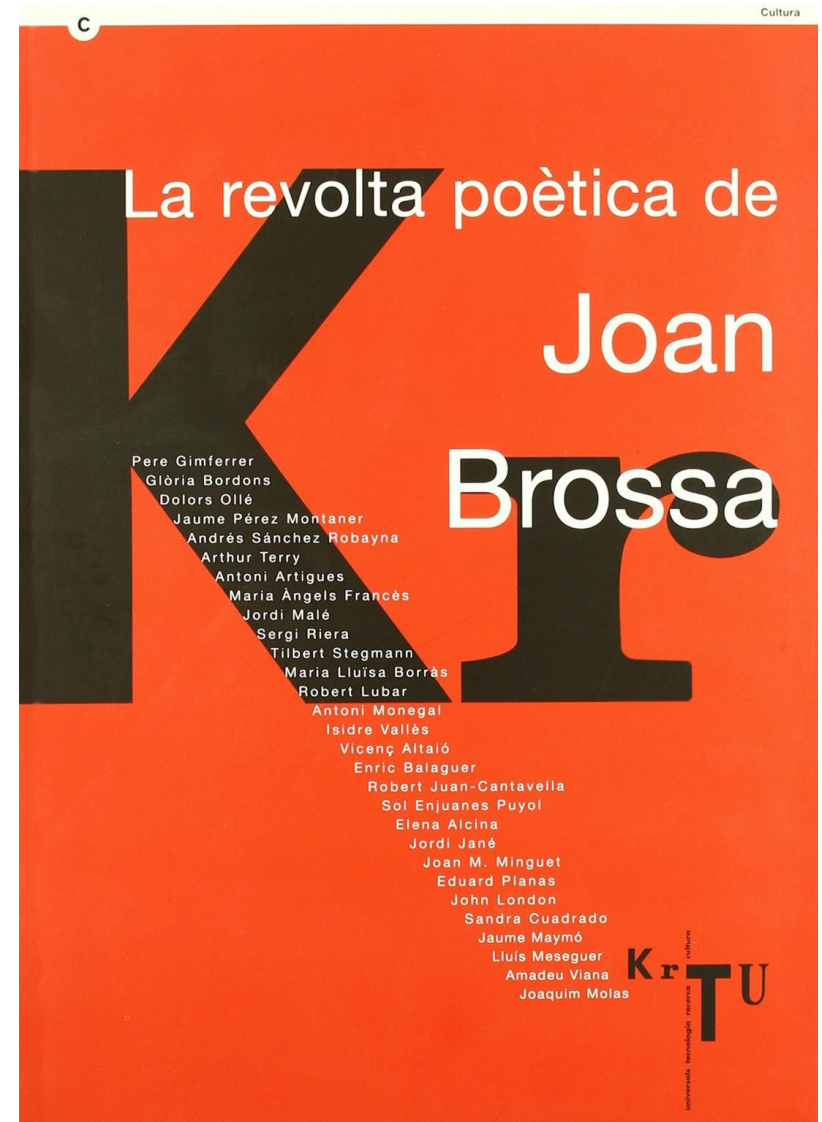
LA QUADRATURA ESPANYOLA DEL CERCLE
D'ECONOMIA

“La quadratura del cercle és una proposta de lògica matemàtica que apunta a la impossibilitat.”



“La quadratura del cercle és una proposta de lògica matemàtica que apunta a la impossibilitat.”

“El cercle mai no pot ser quadrat, així com tampoc el quadrat està capacitat per adoptar una forma rodona.”



Què?

La cuadratura del círculo

El problema geométrico conocido como «**la cuadratura del círculo**» es uno de los mayores **misterios sin resolver** de la matemática. La cuestión reside en hallar un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado.

Desde la Grecia clásica y con especial ímpetu en el siglo XIX se ha intentado resolver sin éxito, hasta nuestros días. De hecho, **el asunto ha sobrepasado la matemática para incorporarse a nuestro lenguaje** como una expresión muy habitual para referirse a un problema imposible o muy difícil de solucionar.

Igualmente de **irresolubles han sido** durante muchos años **otros problemas,**

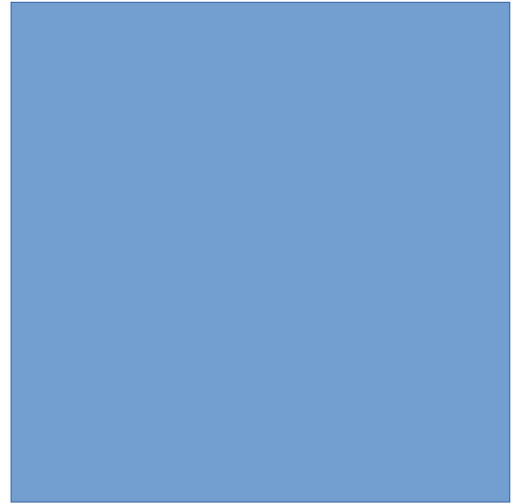
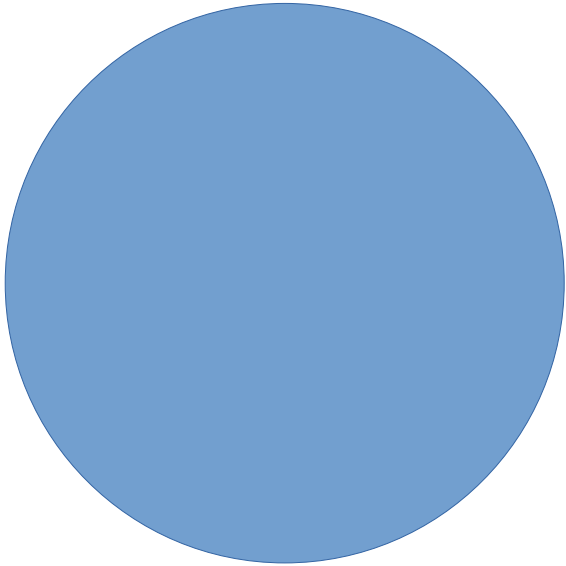
La cuadratura del círculo

El problema geométrico conocido como «**la cuadratura del círculo**» es uno de los mayores **misterios sin resolver** de la matemática. La cuestión reside en hallar un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado.

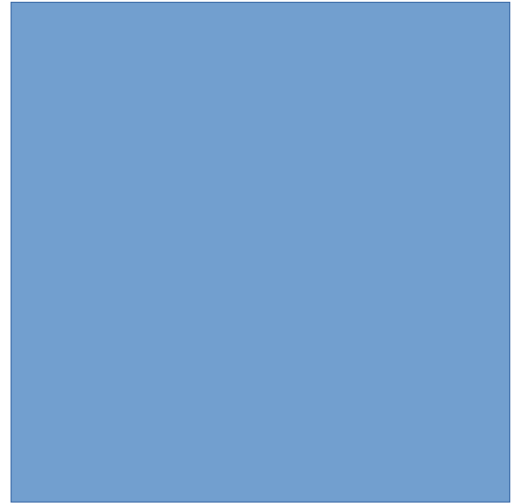
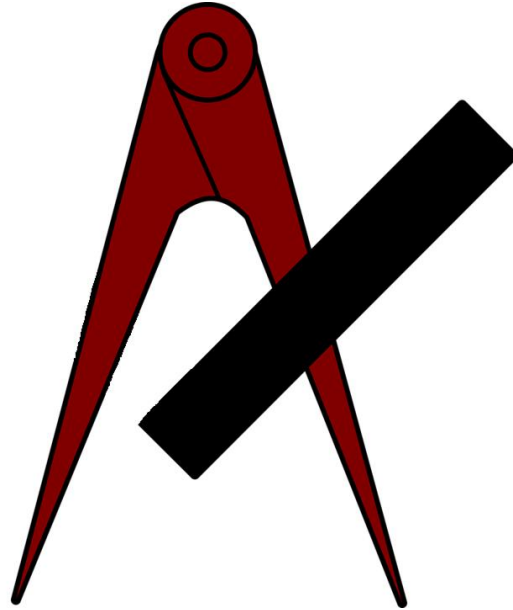
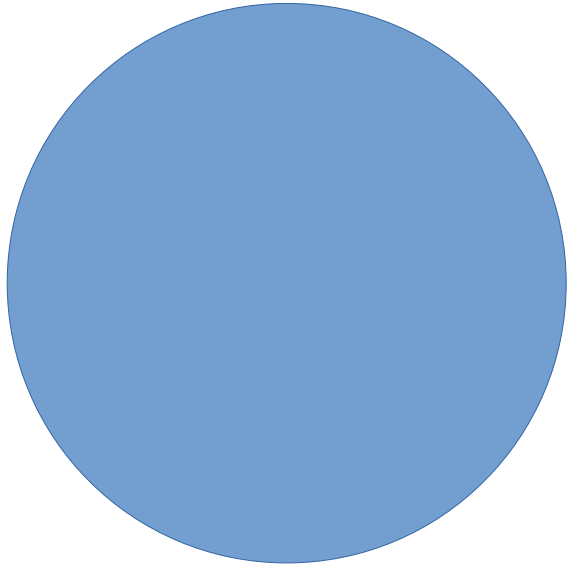
Desde la Grecia clásica y con especial ímpetu en el siglo XIX se ha intentado resolver sin éxito, hasta nuestros días. De hecho, **el asunto ha sobrepasado la matemática para incorporarse a nuestro lenguaje** como una expresión muy habitual para referirse a un problema imposible o muy difícil de solucionar.

Igualmente de **irresolubles han sido** durante muchos años **otros problemas**,

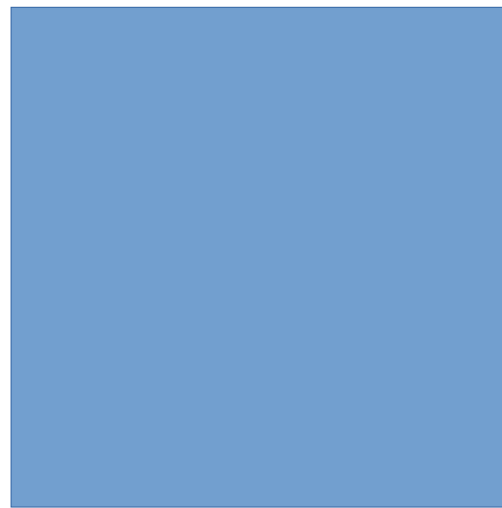
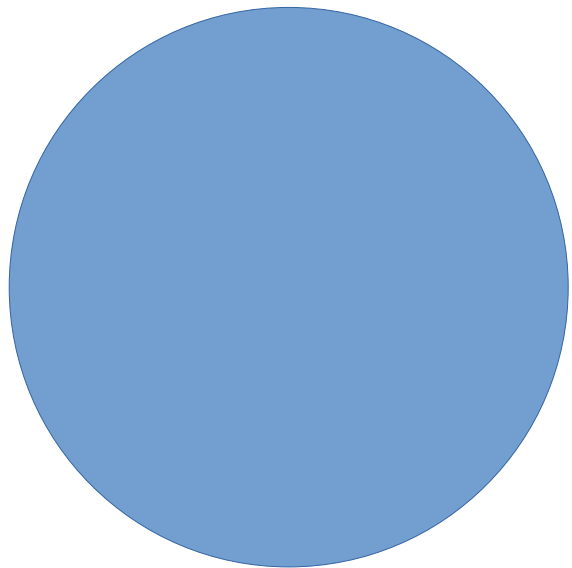
Un cercle i un quadrat de la mateixa àrea...



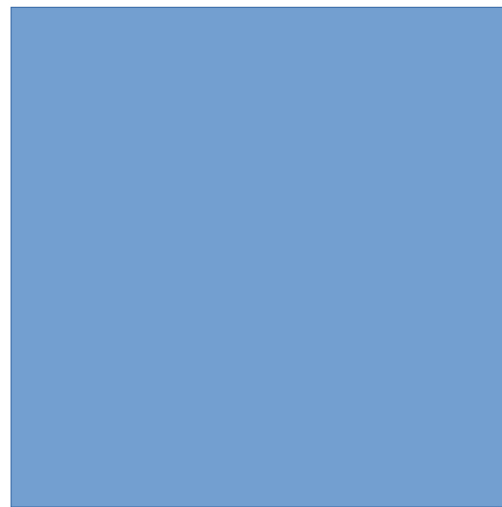
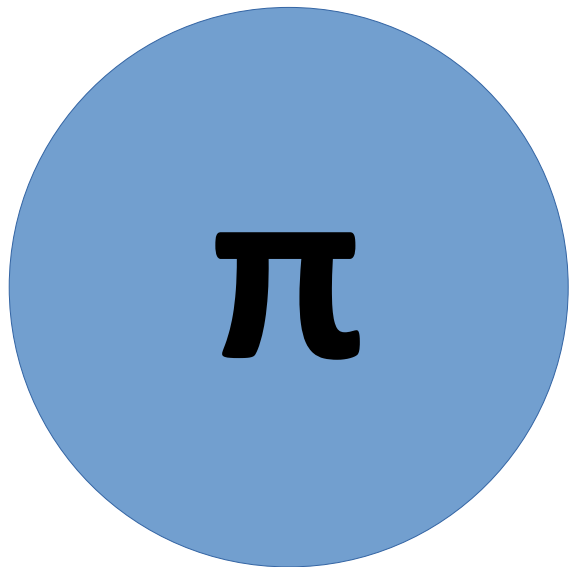
...però utilitzant només el regle i el compàs.



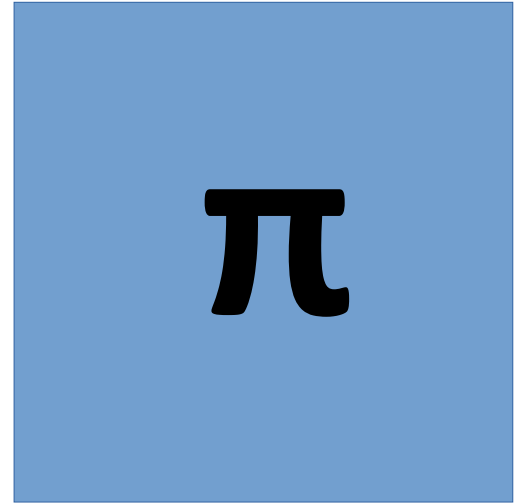
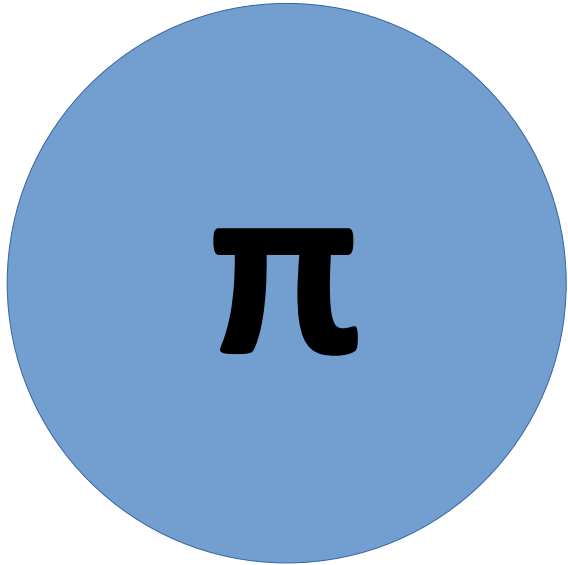
Si el cercle té radi 1,



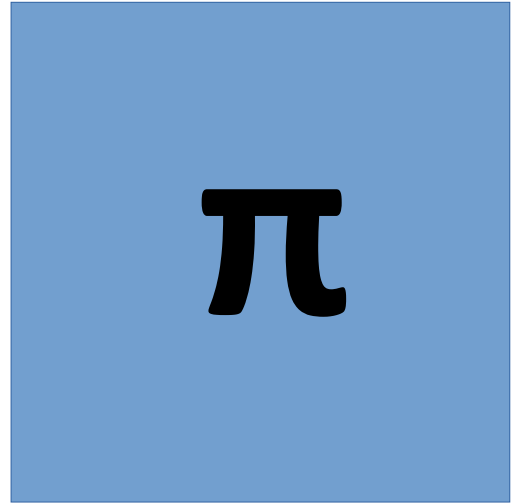
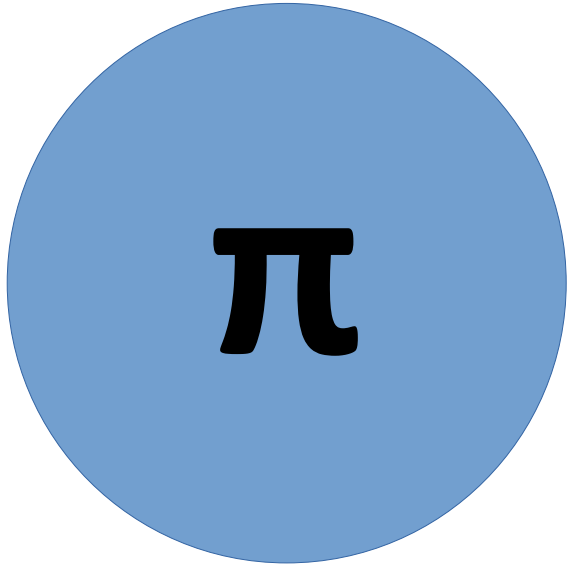
Si el cercle té radi 1,



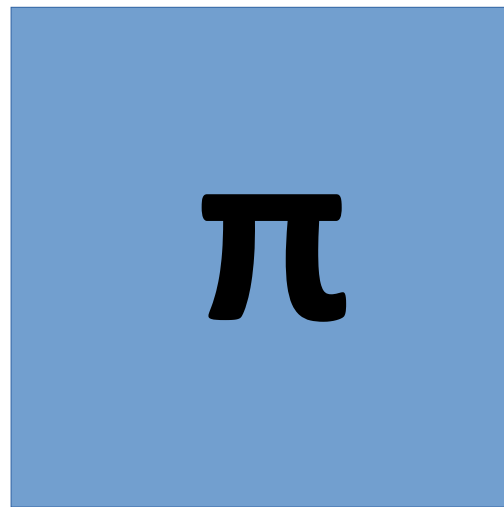
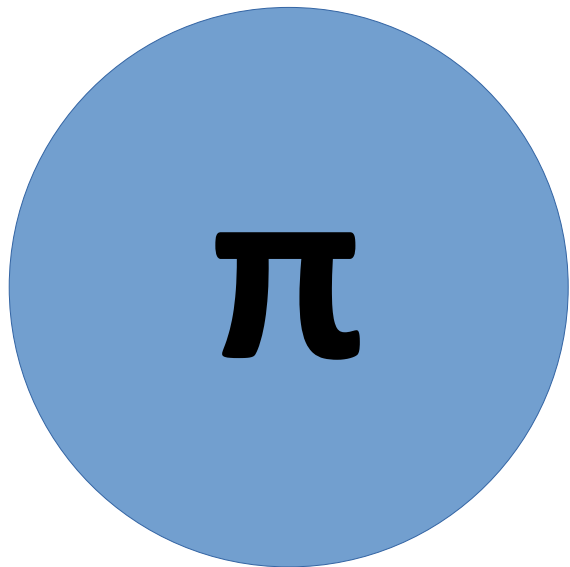
Si el cercle té radi 1,



Si el cercle té radi 1, el quadrat té costat $\sqrt{\pi}$...



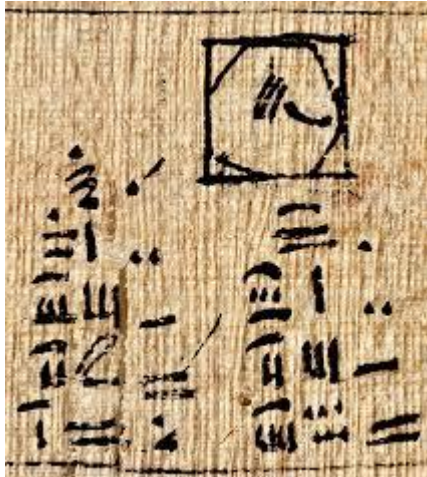
Si el cercle té radi 1, el quadrat té costat $\sqrt{\pi}$...



Podem “dibuixar $\sqrt{\pi}$ ” amb regla i compàs?

Quan?

NO en el papir de Rhind (~1650 A.C.)



Grècia clàssica



Anaxàgoras

(499 – 428 A.C.)

Grècia clàssica



Anaxàgoras

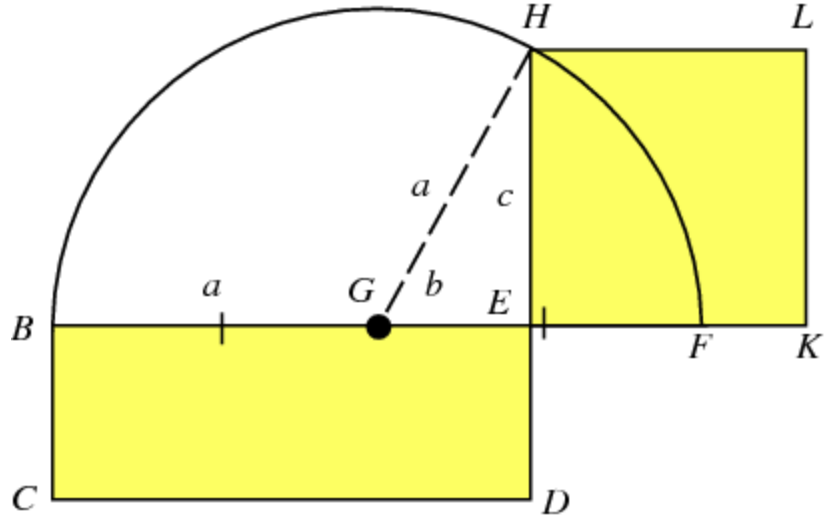
(499 – 428 A.C.)

«a un home, cap lloc no pot treure la felicitat, ja que cap no pot treure la virtut ni la saviesa; Anaxàgoras a la presó estava ocupat quadrant el cercle»

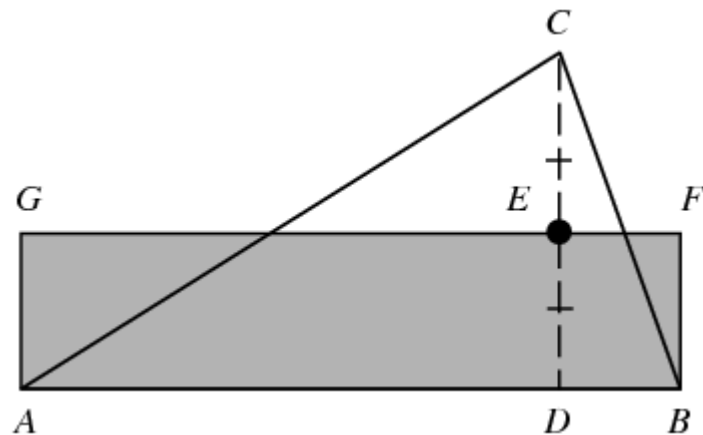
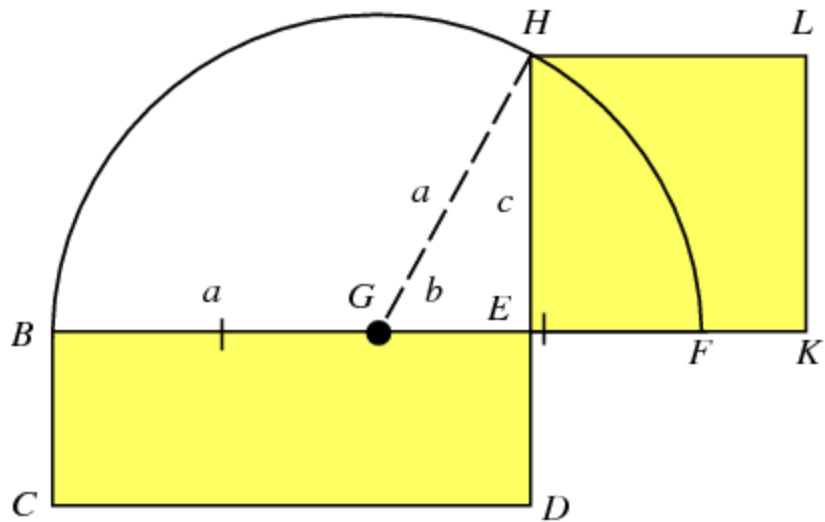
(Plutarc, Moralia, c.100 D.C.)



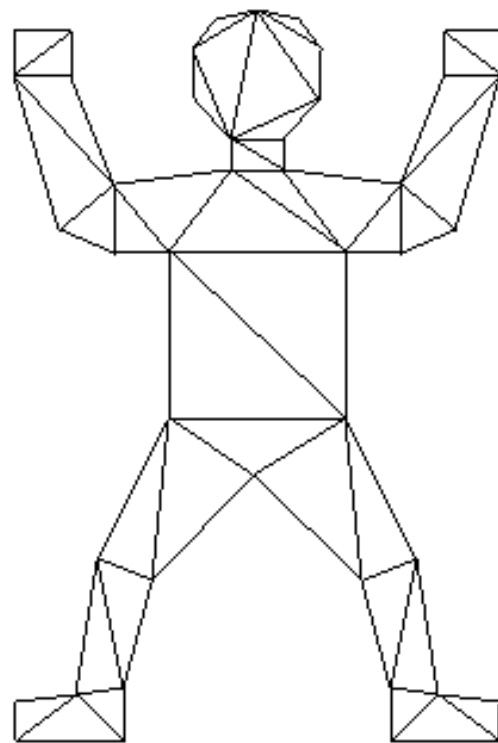
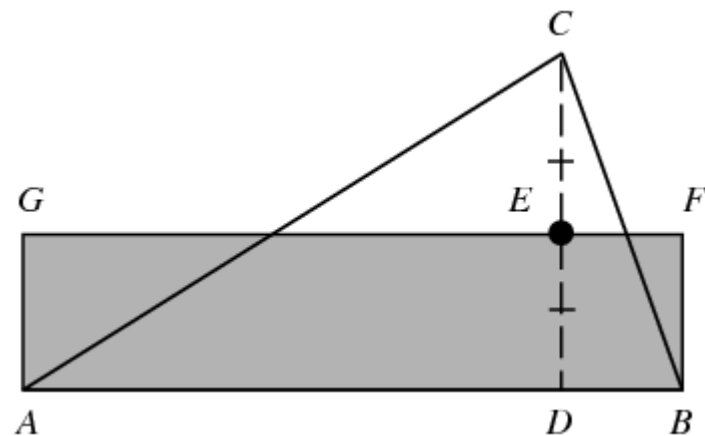
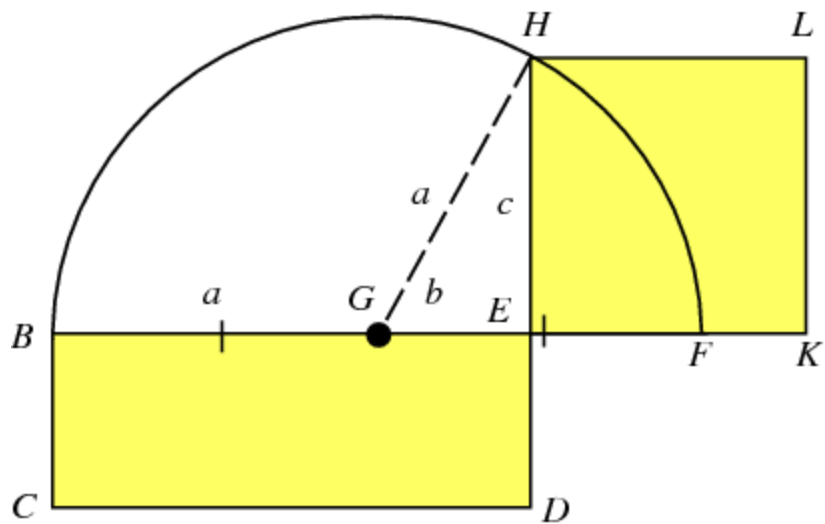
Grècia clàssica



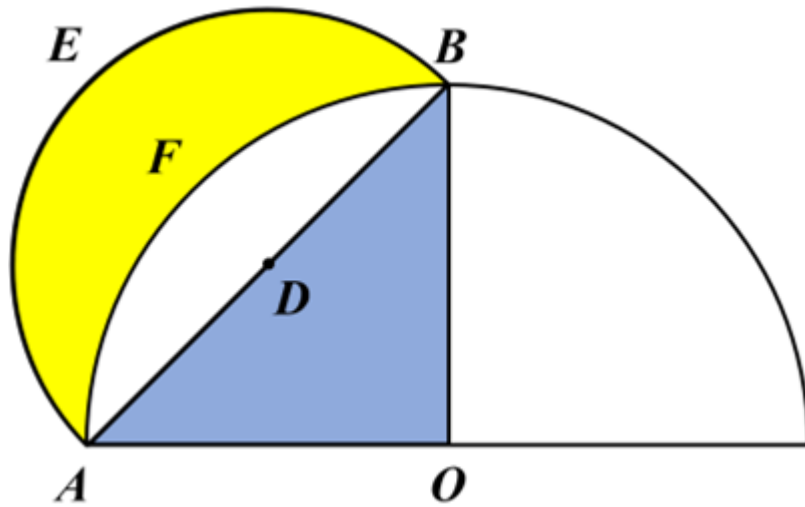
Grècia clàssica



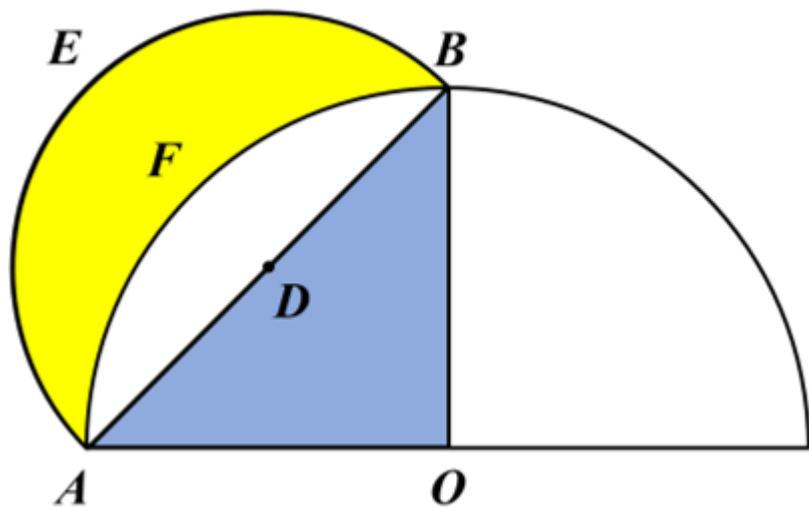
Grècia clàssica



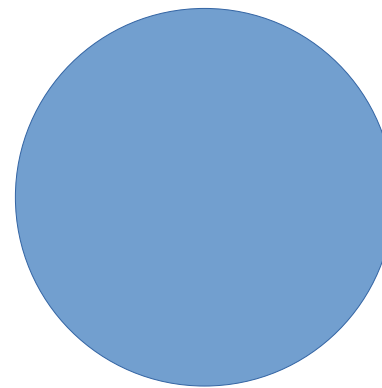
Grècia clàssica



Grècia clàssica

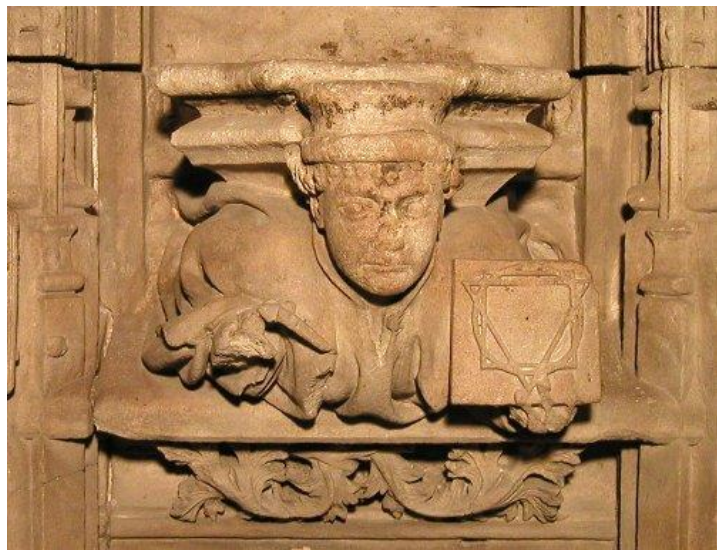


Per què no el cercle?

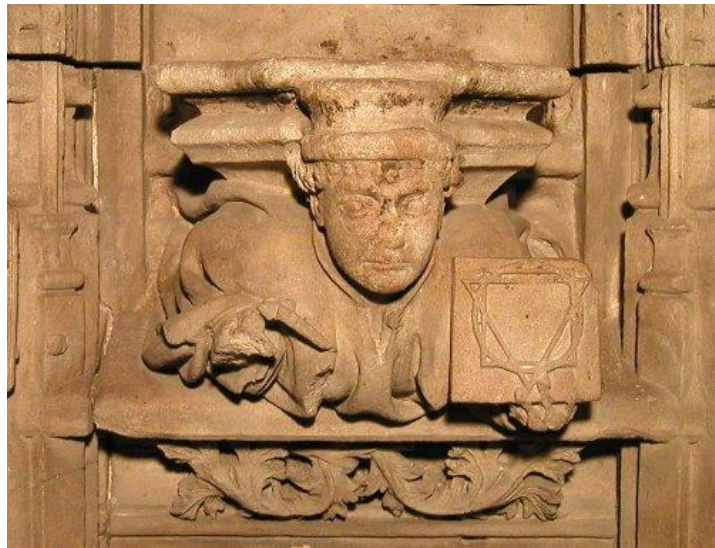


Qui?





Basílica de Sant Francesc, Palma de Mallorca.
Sepulcre de Ramon Llull, Ramon Sagra (1478).



Basílica de Sant Francesc, Palma de Mallorca.
Sepulchre de Ramon Llull, Ramon Sagrera (1478).



Liber de geometria nova et compendiosa (1299)
Biblioteca Pública de Palma, ms. 1036, f. 5v

El quadrat entre els quadrats inscrit i circumscrit és la «quadratura del cercle» de Llull.

Secundus liber huius habet partes. Prima pars est
de quadratura
quam faci-
mus de tri-
litate huius
sacrae. Secun-
da est de pu-
apud Geome-
trie et de an-
dromedus.
primus. Secun-
da. Tercia
pars est de
quadratura
et solucio-
bus eorum quas facimus de quibuslibet duobus
Geometrie



De prima parte huius libri.

Ista pars in tres partes dividitur. Prima
pars est de quadratura
de quadratura Circuli et de eius triangulatura
ac etiam de triangulatura quadranguli. Unde
primo de prima parte dicemus. In hac arte op-
portet ponere bonas figuras que vocantur figura
magistralis et vocatur figura magistralis quo-
magis p ipso in multis cubus veritate alia
figura. q. composita est de tribus quadrangulis

Com?

El quadrat entre els quadrats inscrit i circumscrit és la «quadratura del cercle» de Llull.

Açò equival, formalment, al valor de pi:

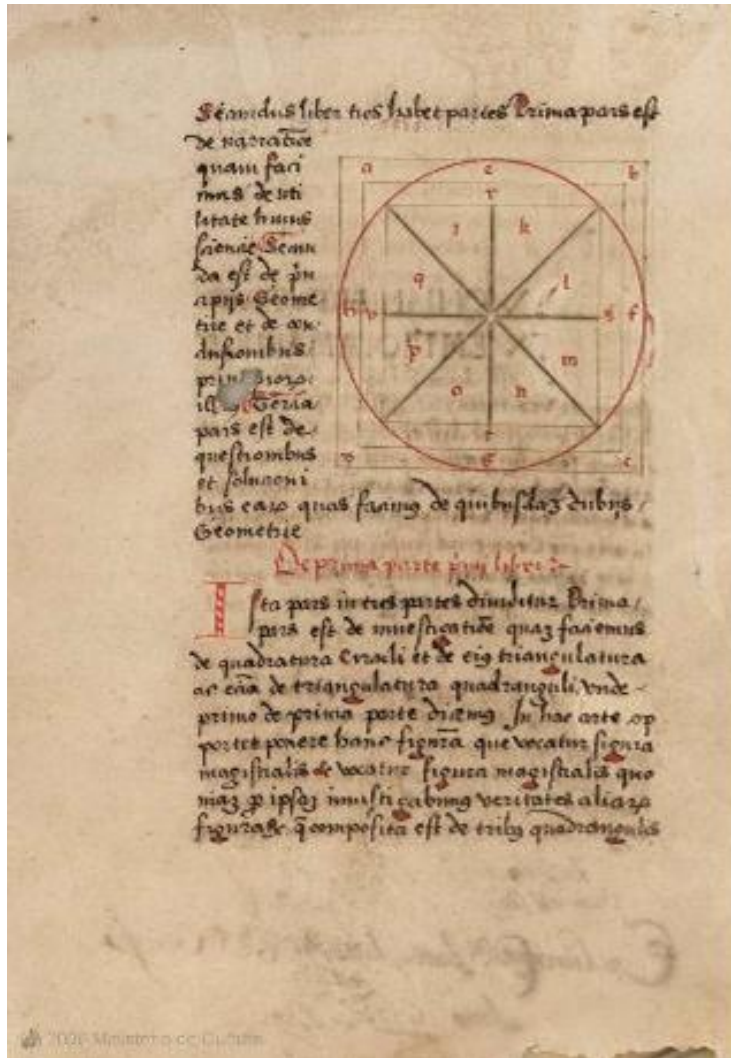
$$\pi=2.9142$$

Secundus liber huius habet partes. Prima pars est
de quadratura
quam faci-
mus de tri-
litate huius
sacrae. Secun-
da est de in-
scripta Geome-
trie et de an-
dromedus.
primus. Secun-
da. Tercia
pars est de
quadratura
et solucio-
bus eorum quas facimus de quibuslibet duobus
Geometrie



De prima parte huius libri

Ista pars in tres partes dividitur. Prima
pars est de quadratura
de quadratura Circuli et de eius triangulatione
ac etiam de triangulatione quadranguli. Unde
primo de prima parte dicemus. In hac arte op-
portet ponere bonam figuram que vocatur figura
magistralis et vocatur figura magistralis quo-
magis p ipso in multis cubus veritate alia
figura. q. composita est de tribus quadrangulis



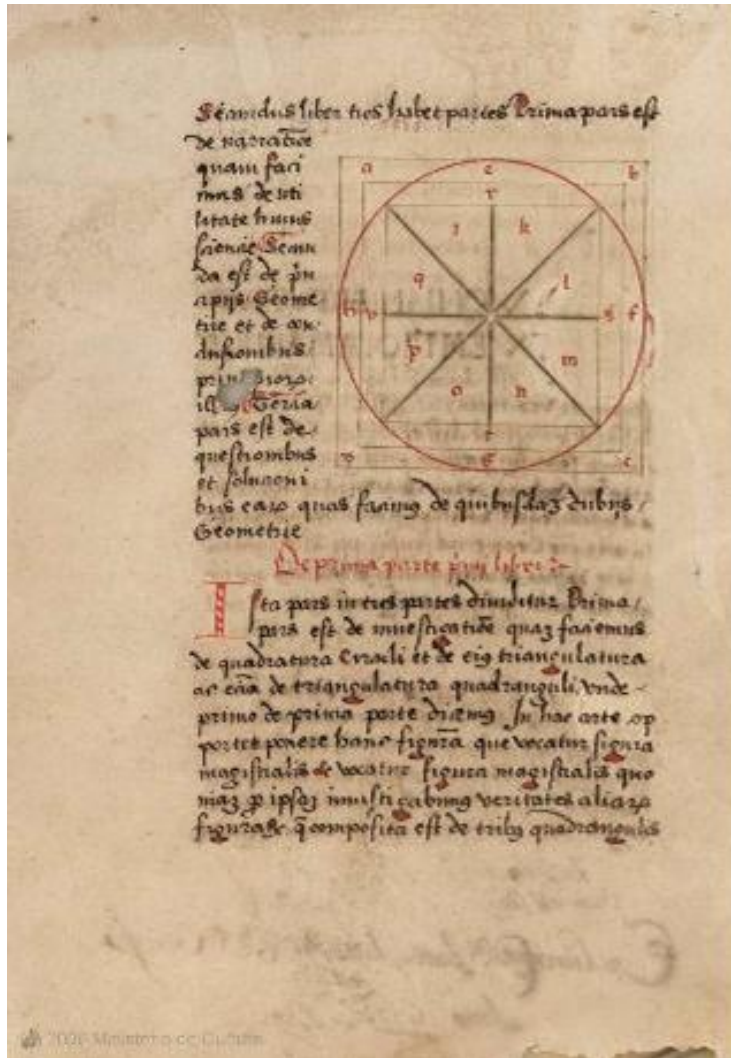
El quadrat entre els quadrats inscrit i circumscrit és la «quadratura del cercle» de Llull.

Açò equival, formalment, al valor de pi:

$$\pi=2.9142$$

«Després va fer l'anomenat mar de bronze, un dipòsit rodó de bronze fos. Feia deu colzades de diàmetre, trenta de perímetre i cinc de profunditat.» (Primer Llibre dels Reis, 7:23)

$$\pi=3$$



El quadrat entre els quadrats inscrit i circumscrit és la «quadratura del cercle» de Llull.

Açò equival, formalment, al valor de pi:

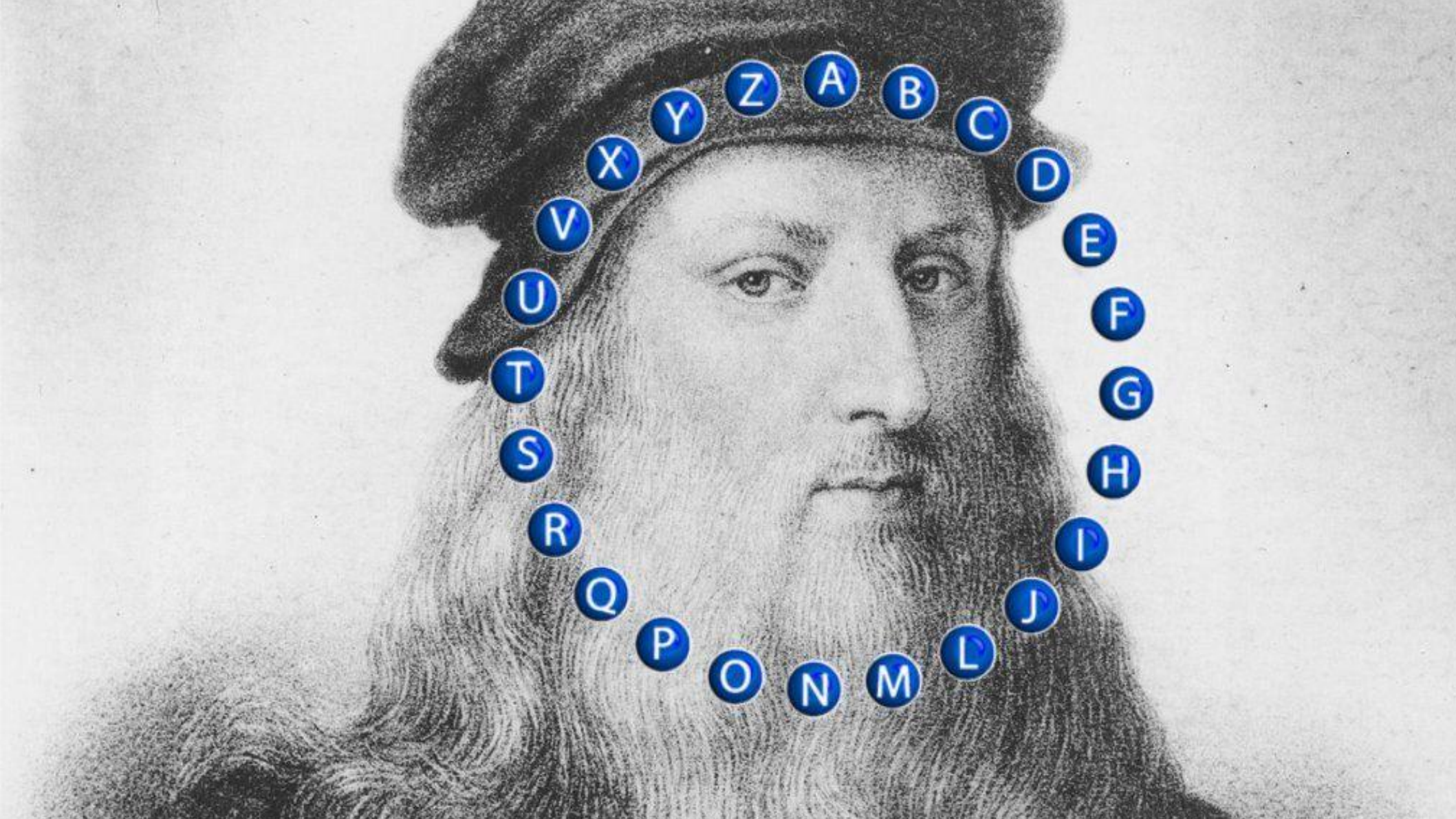
$$\pi=2.9142$$

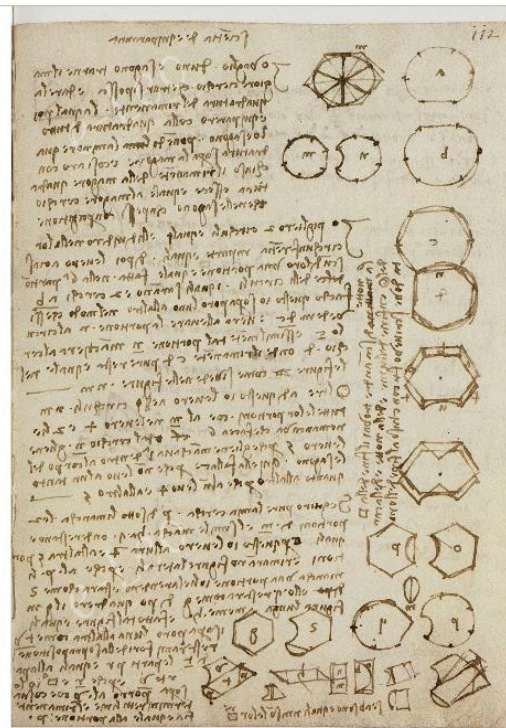
«Després va fer l'anomenat mar de bronze, un dipòsit rodó de bronze fos. Feia deu colzades de diàmetre, trenta de perímetre i cinc de profunditat.» (Primer Llibre dels Reis, 7:23)

$$\pi=3$$

«Llull vol fer una geometria més fàcil i més popular, distinta de la geometria clàssica i euclidiana.» (Millàs Vallicrosa)

Qui?





(in alto a destra, figure con lettere:)

a, m, b, n, m

(a sinistra delle figure:)

Scientia de equiparantia.

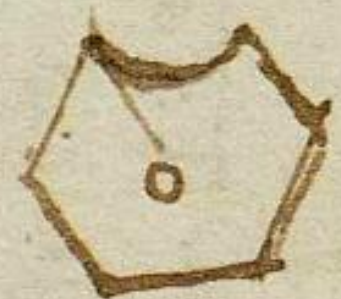
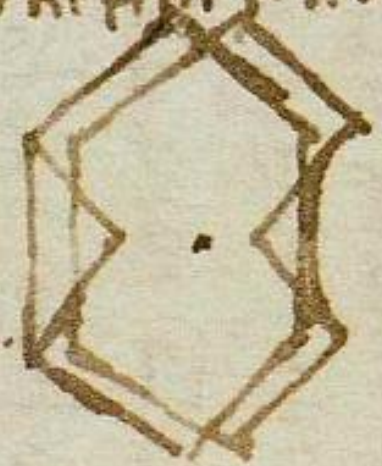
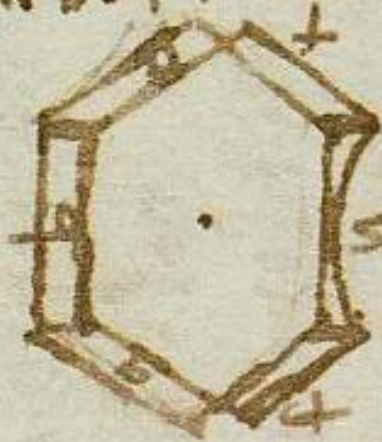
Io voglio d'uno esagono trarne il maggiore
cierchio che trar si possa e dare la quadratura
del rimanente. La qual poi equiparerò colla
quadratura di tutto lo esagono, ponendo¹⁵¹
la minore quadratura sopra la maggiore, e così
arò conchiuso il rimanente della maggiore
quadratura essere eguale al maggiore cerchio
che nell'esagono capessi con precisione¹⁵².

(a destra, sotto le precedenti, figure con
lettere:)

c, n, d

a, b, c, f, d, e

1 notte
 La ~~matte~~ ~~ma~~ ~~di~~ ~~son~~ ~~an~~ ~~to~~ ~~tro~~ ~~ba~~ ~~il~~ ~~fin~~ ~~ella~~ ~~di~~
 solo ~~en~~ ~~fin~~ ~~ella~~ ~~ma~~ ~~ella~~ ~~no~~ ~~ella~~ ~~con~~
 in ~~di~~ ~~ser~~ ~~in~~ ~~do~~ ~~fu~~ ~~con~~ ~~ch~~ ~~uso~~ ~~al~~ ~~fin~~ ~~ella~~ ~~no~~



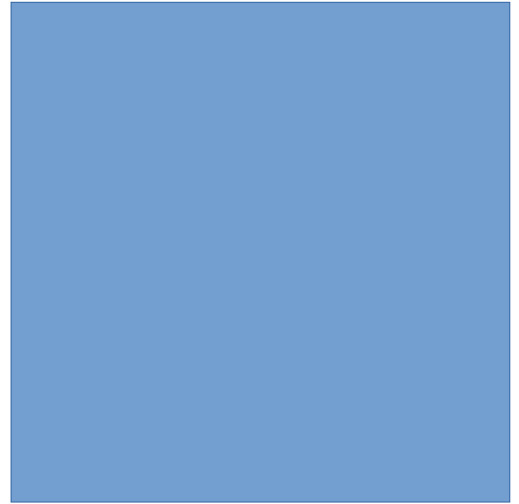
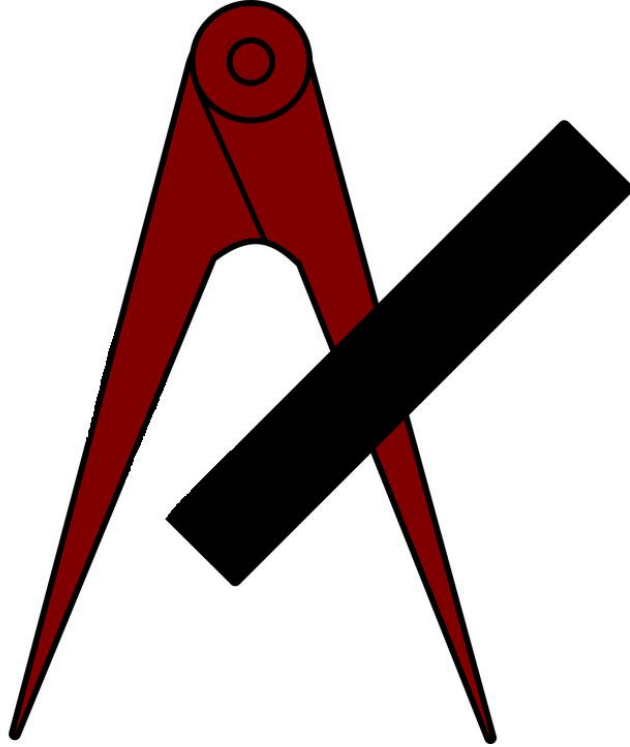
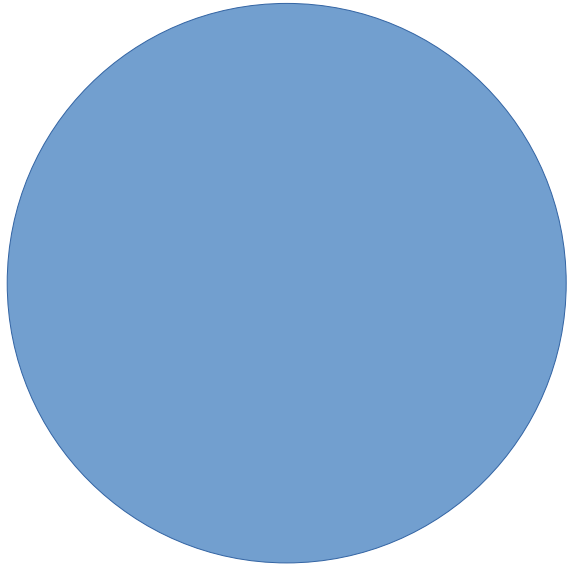


La nit de Sant Andrés vaig trobar el final de la quadratura del cercle; s'acabava l'espelma, la nit i el paper on escrivia, quan, a l'hora complida, vaig arribar a la conclusió.

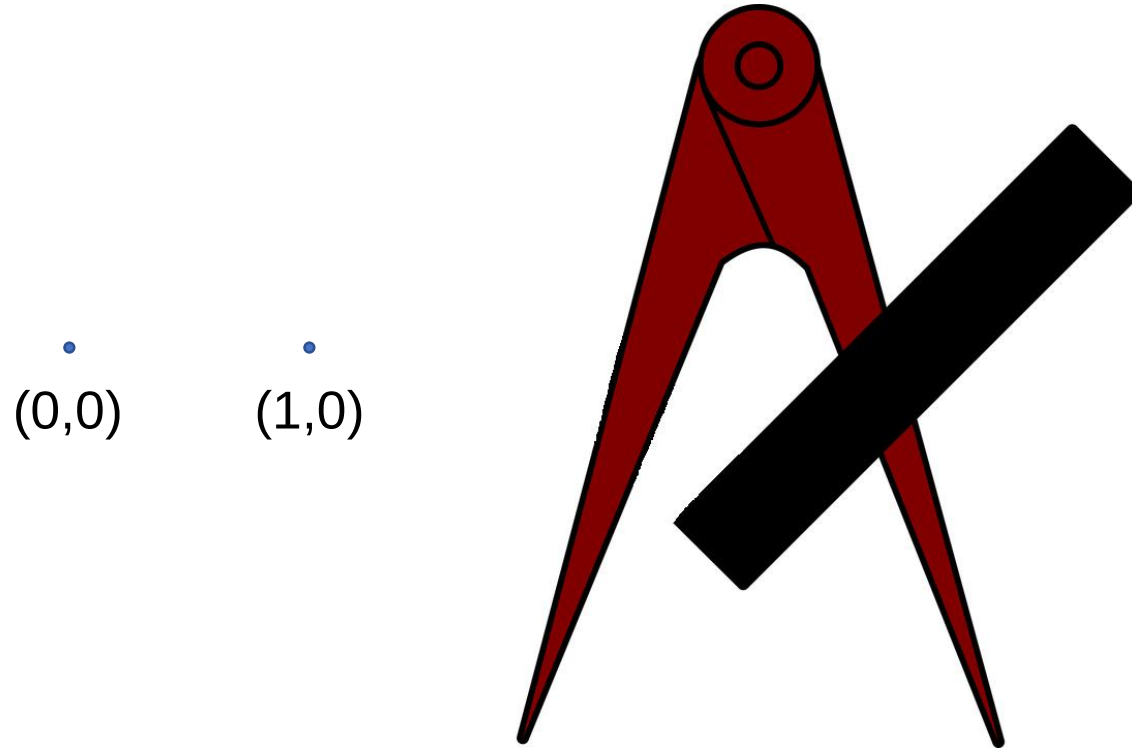


Mates!

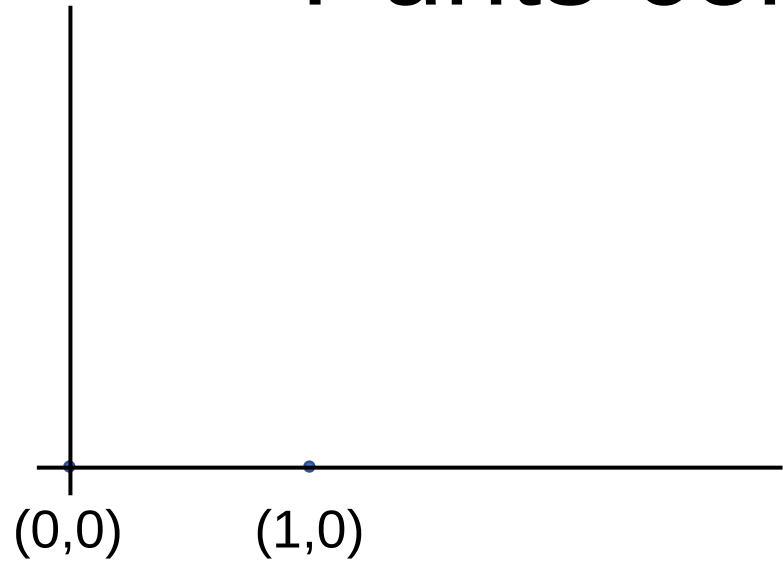
Quins punts podem construir
a partir d'un cercle de radi 1?



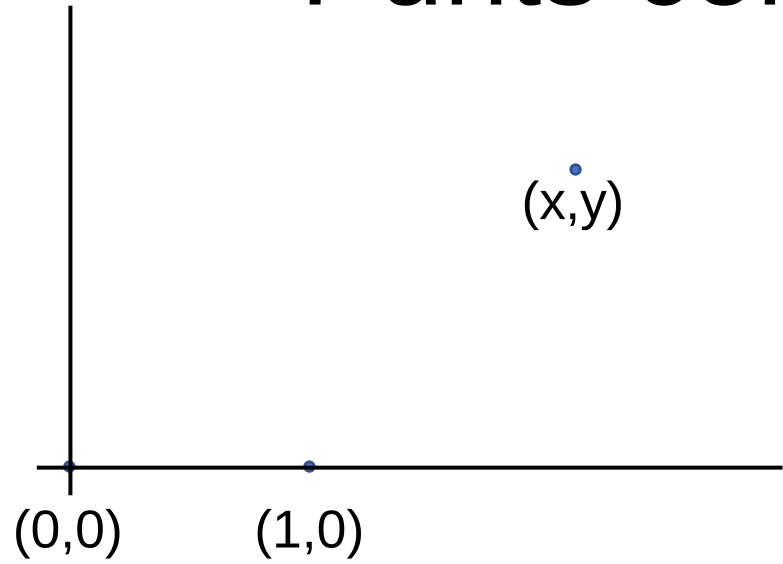
Punts construïbles



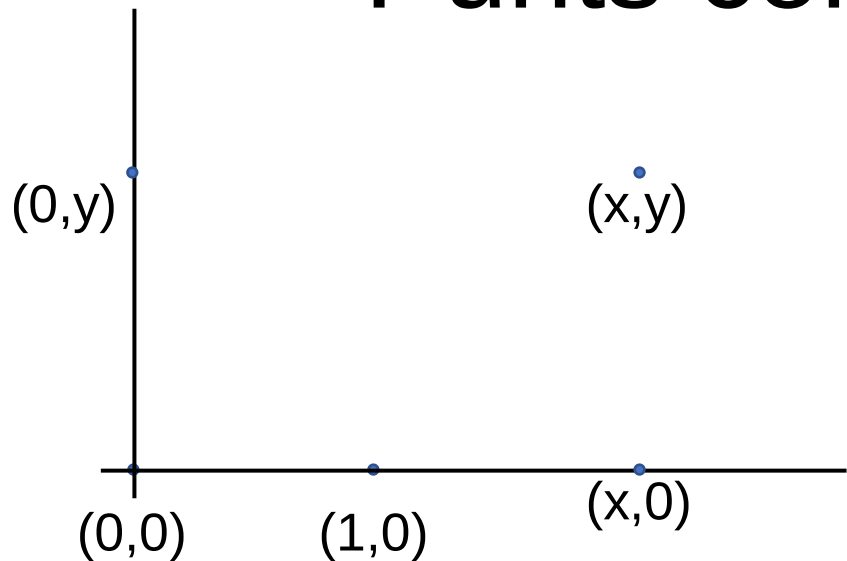
Punts construïbles



Punts construïbles

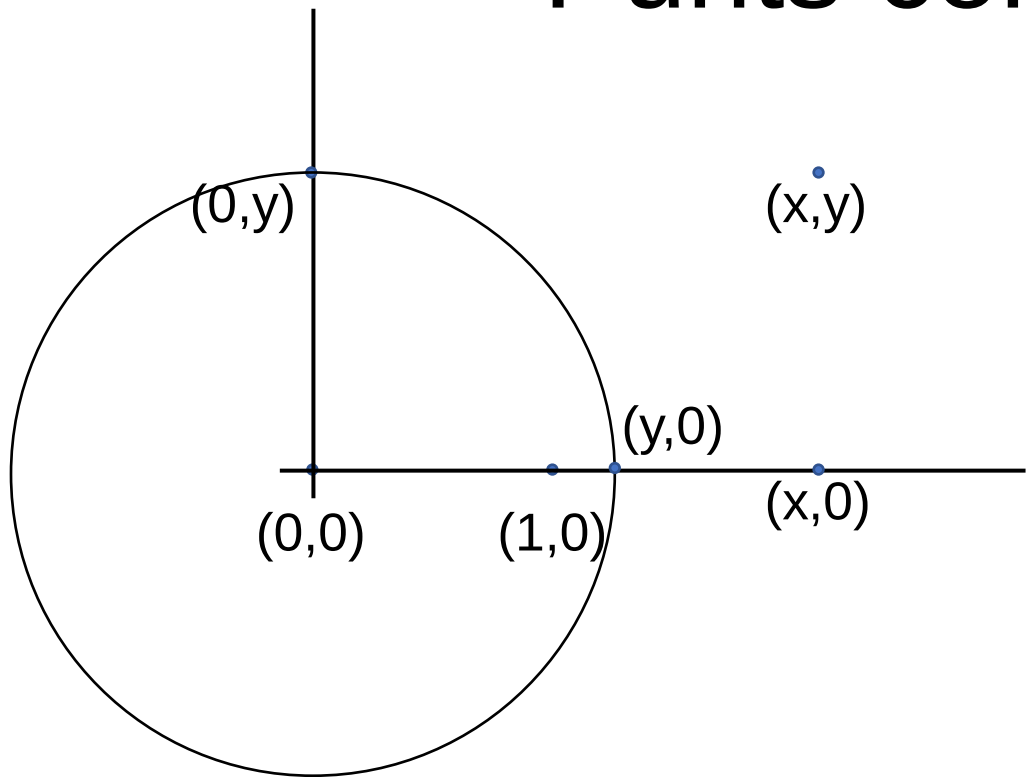


Punts construïbles



Per les perpendiculars,
 (x,y) construïble
equivale a
 $(x,0), (0,y)$ construïbles

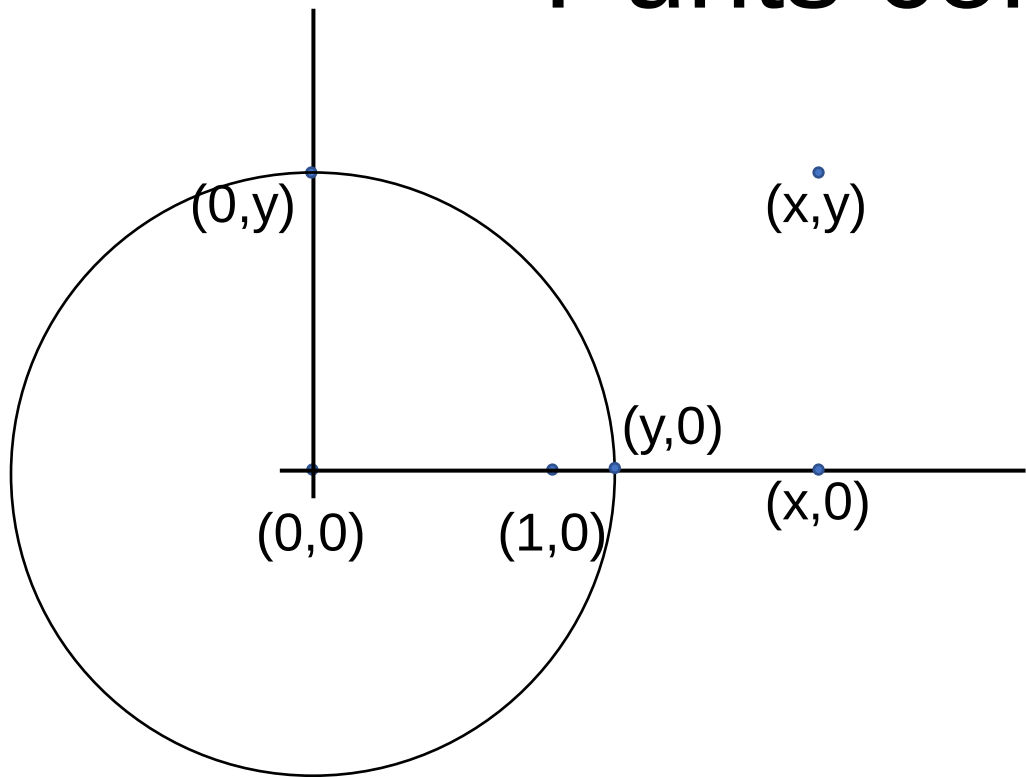
Punts construïbles



Per les perpendiculars,
 (x,y) construïble
equivale a
 $(x,0), (0,y)$ construïbles

Pel compàs,
 $(0,y)$ construïble
equivale a
 $(y,0)$ construïble

Punts construïbles

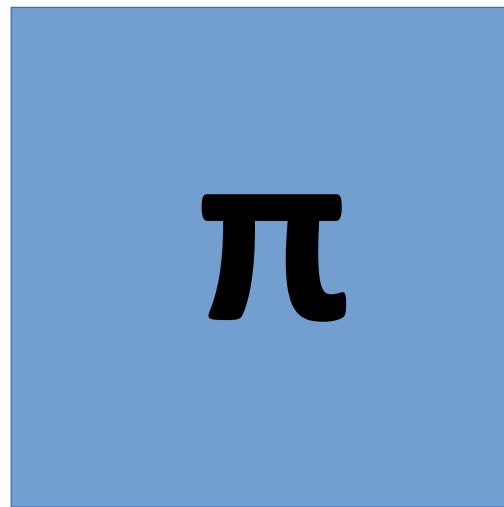
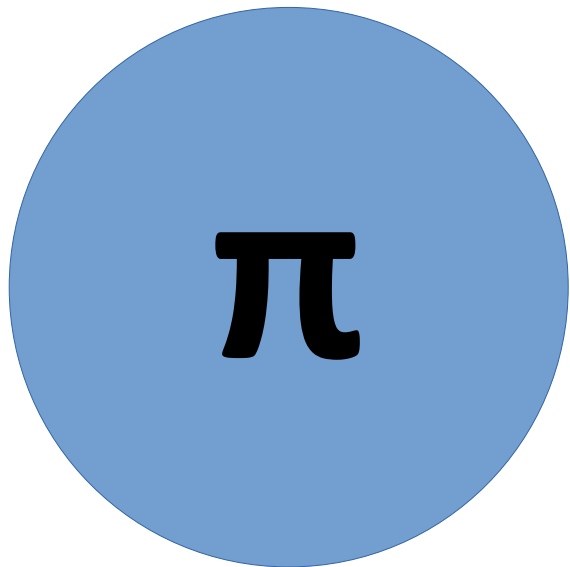


Per les perpendiculars,
 (x,y) construïble
equivale a
 $(x,0), (0,y)$ construïbles

Pel compàs,
 $(0,y)$ construïble
equivale a
 $(y,0)$ construïble

Definició: Direm que un nombre real x és construïble quan $(x,0)$ és construïble.

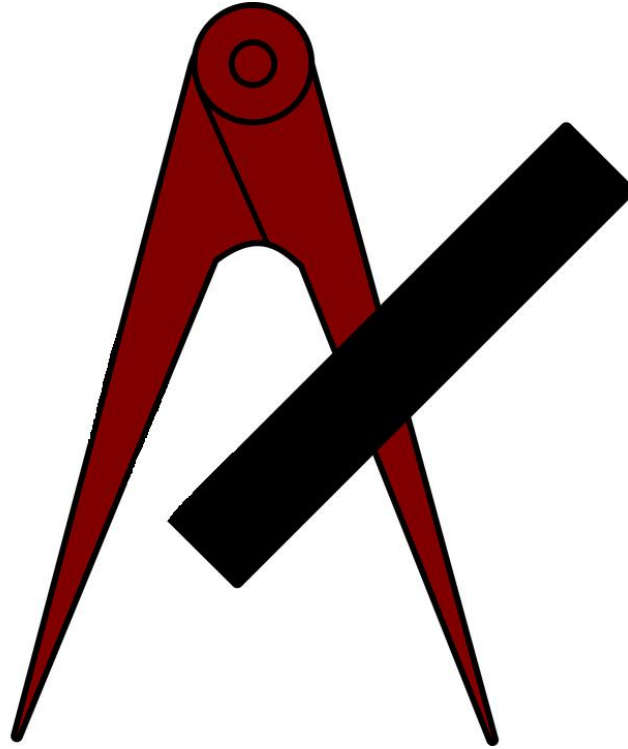
Si el cercle té radi 1, el quadrat té costat $\sqrt{\pi}$...



És $\sqrt{\pi}$, o simplement π , un nombre construïble?

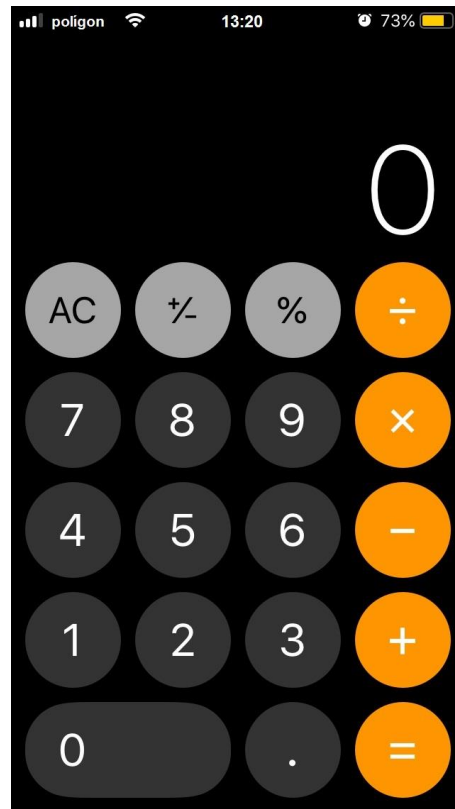
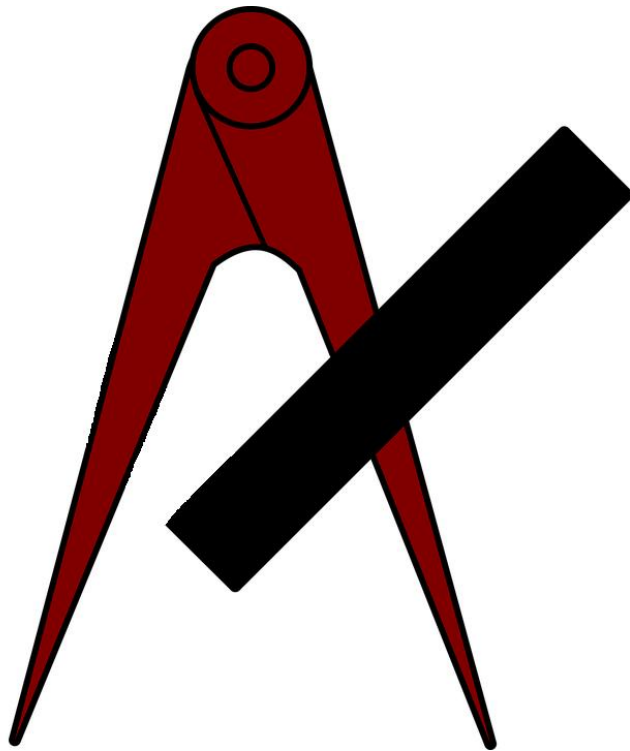
Nombres construïbles

$(0,0)$ $(1,0)$



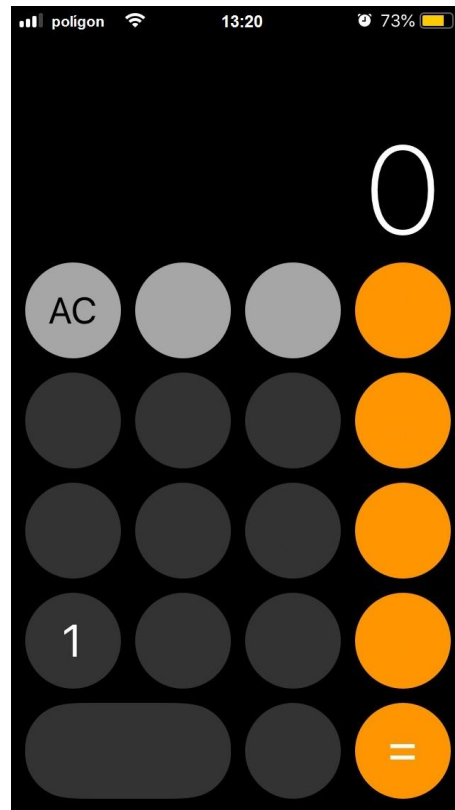
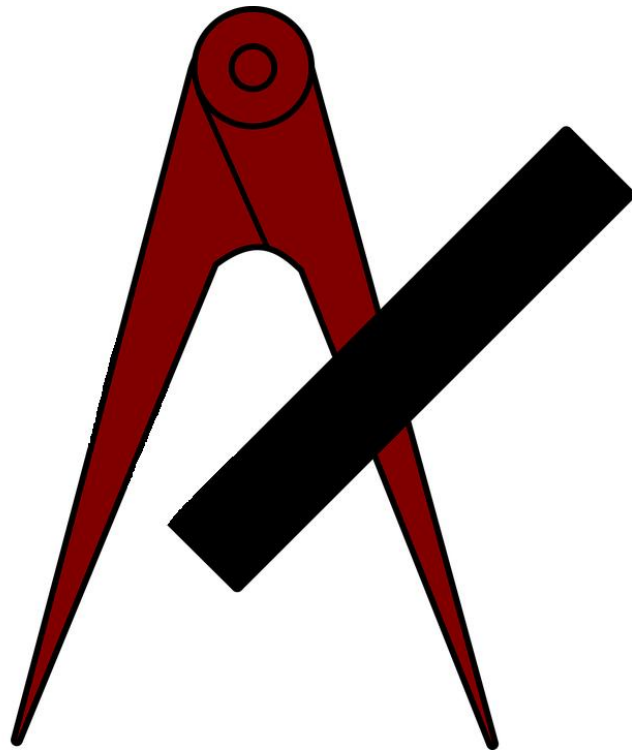
Nombres construïbles

$(0,0)$ $(1,0)$

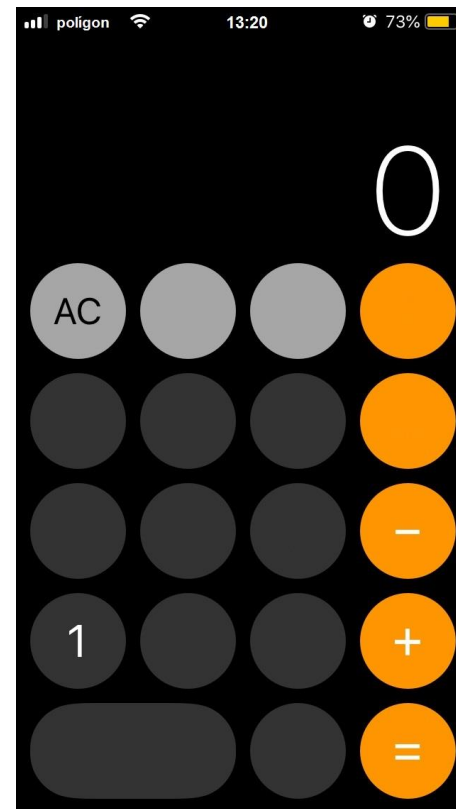
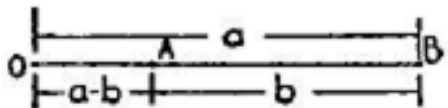
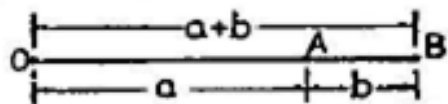


Nombres construïbles

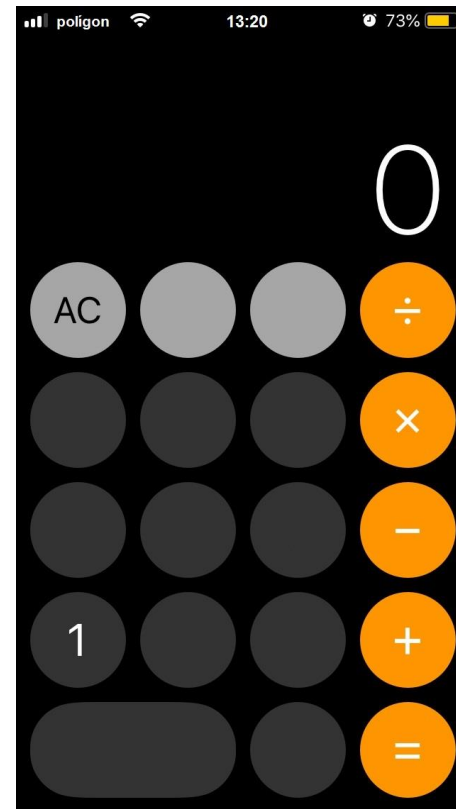
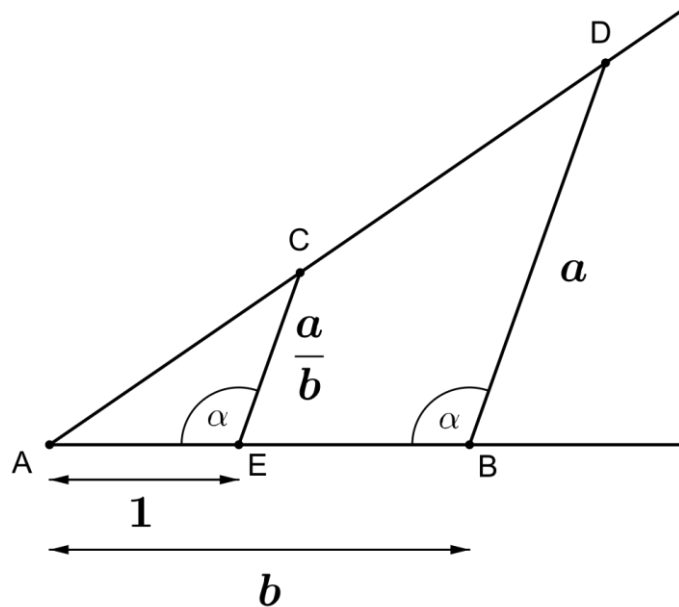
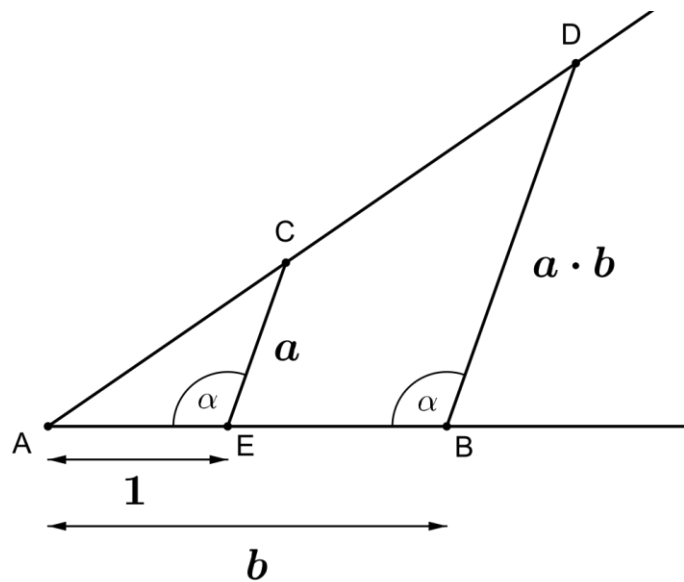
$(0,0)$ $(1,0)$



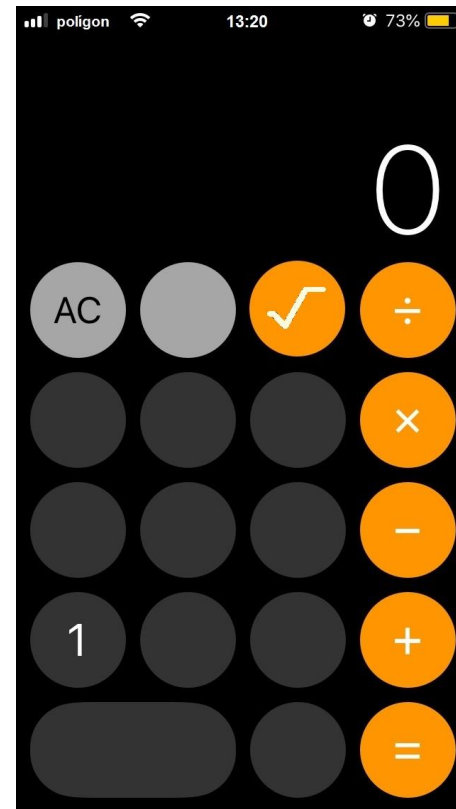
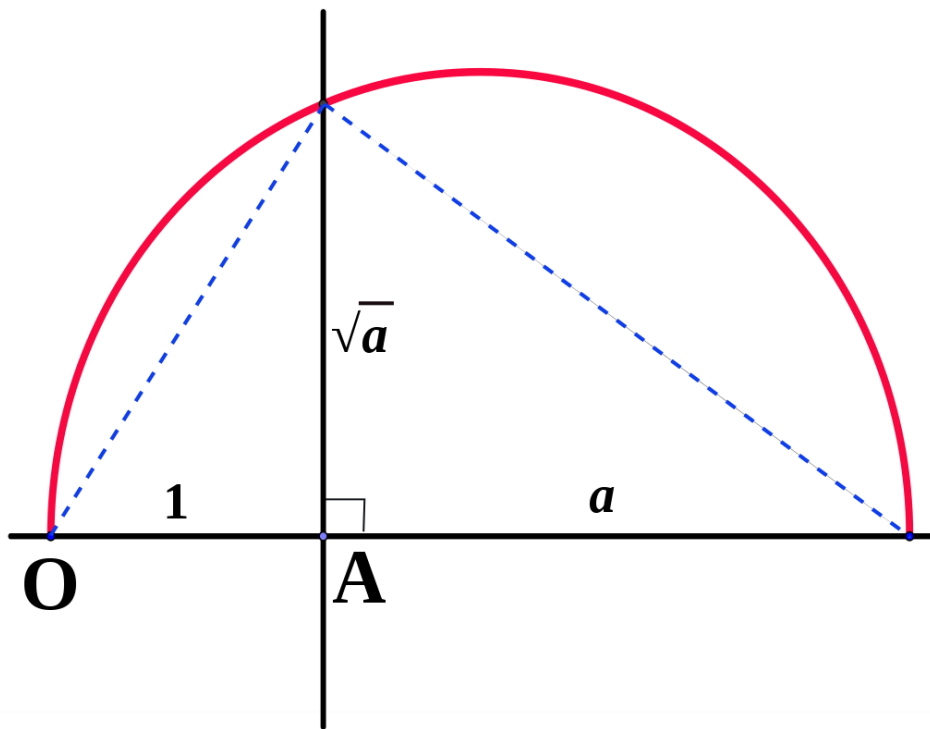
Nombres construïbles



Nombres construïbles

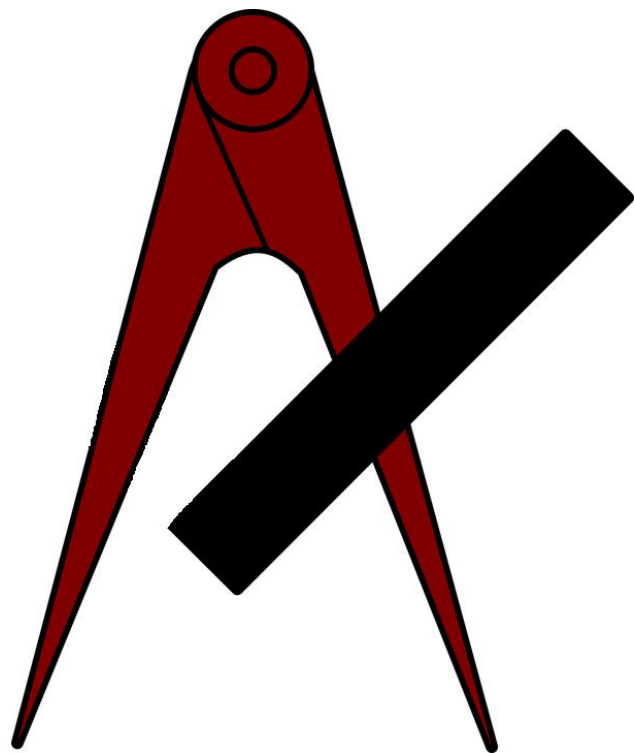


Nombres construïbles

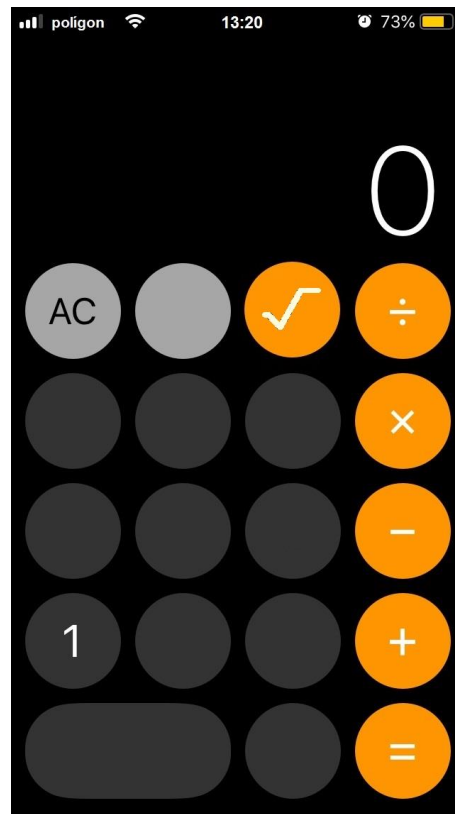


*Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de
Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ;*

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

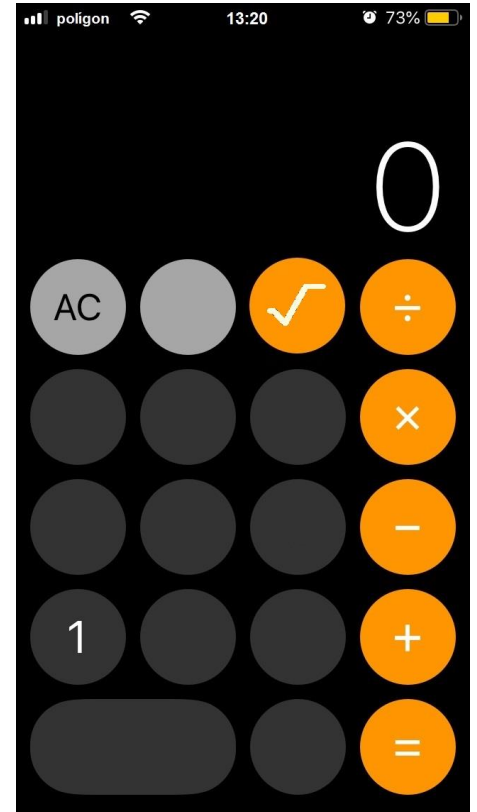


Tome II. — JANVIER 1837.



π

?



Quin tipus de nombre és π ?

Lambert (1761): π no és racional (no és a/b).

Quin tipus de nombre és π ?

Lambert (1761): π no és racional (no és a/b).

Lindemann (1882): π és transcendent (no és arrel de cap polinomi amb coeficients enters), i en particular no es pot arribar a ell mitjançant arrels quadrades.

Més de 2250 anys després es va demostrar que la quadratura del cercle NO és possible...



FOROCOCHES.COM

INICIO

FORO

Buscar



Foro Coches > Zona ForoCoches > Motos



Cuadratura del círculo - ¿Cómo evitarla?

Usuario

Usuario

☒ ¿Recordarme?

Contraseña

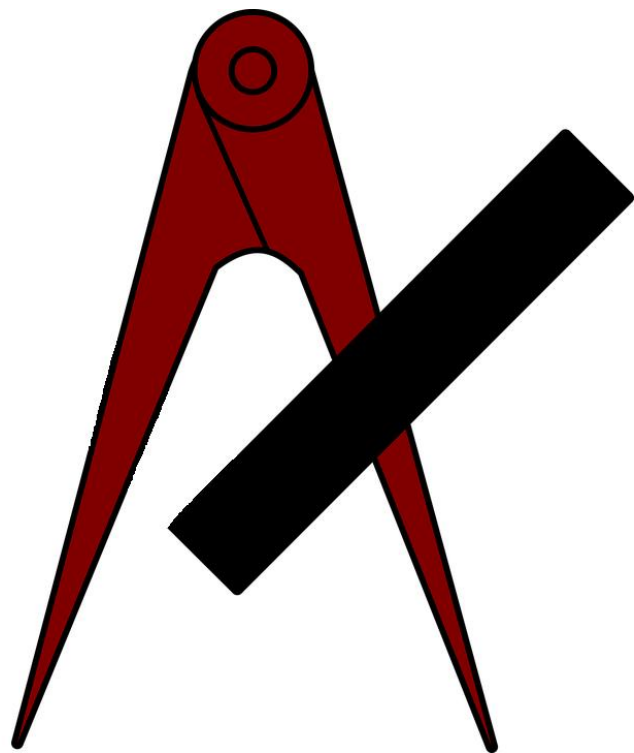
Acceder

Registro

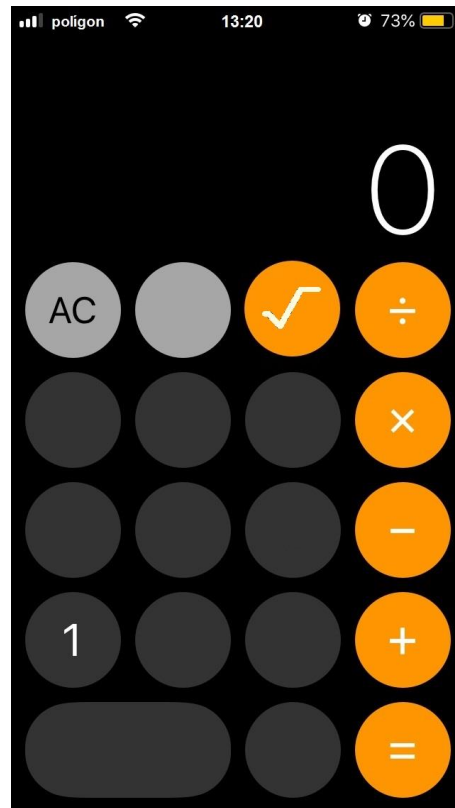
Cuadratura del círculo - ¿Cómo evitarla?

*Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de
Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ;*

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.



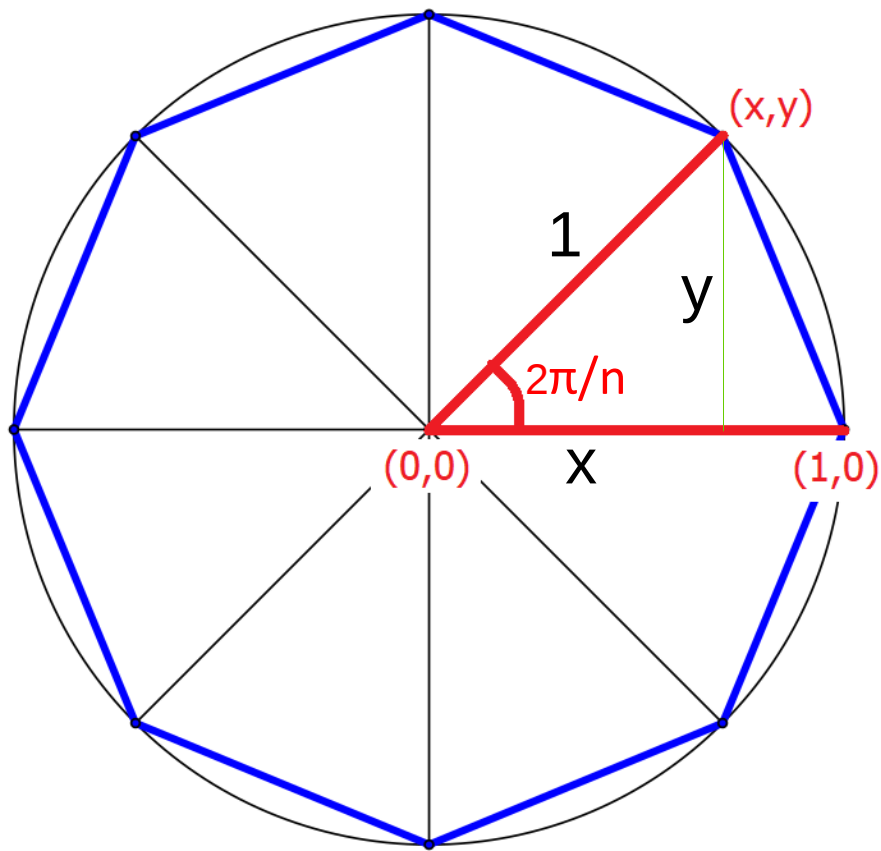
Tome II. — JANVIER 1837.



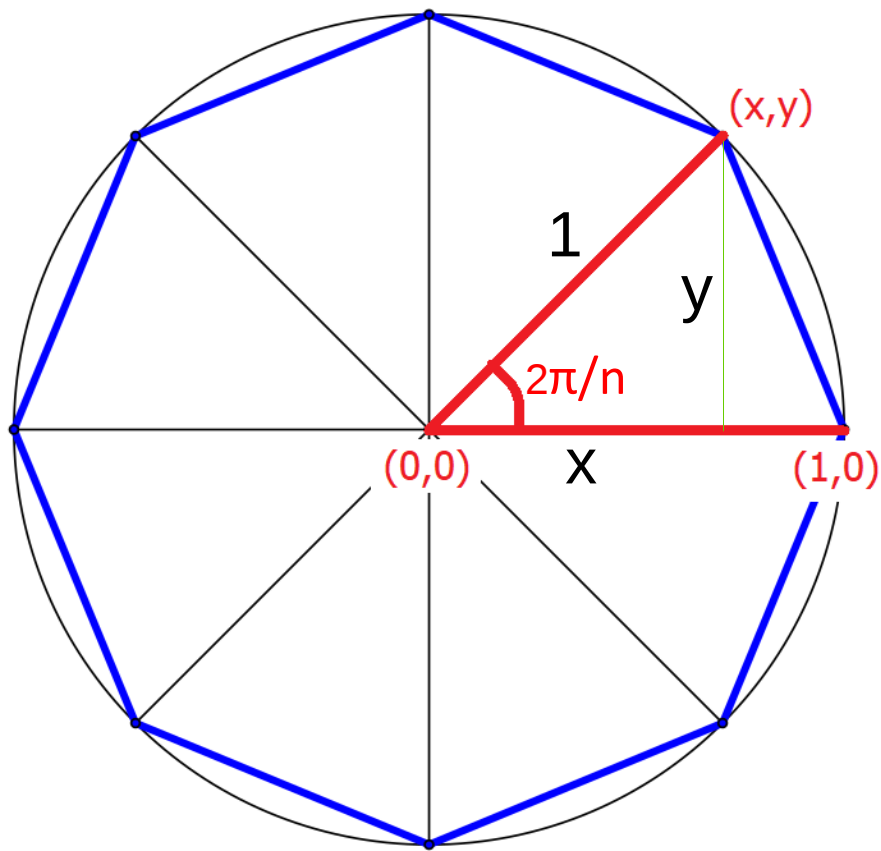
Quins polígons regulars podem construir?



Quins polígons regulars podem construir?



Quins polígons regulars podem construir?



$$\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin \frac{2\pi}{n} = \frac{y}{1} = y$$

Quins polígons regulars podem construir?

El primer vèrtex d'un polígon regular de n costats és:

$$\left(\cos \left(\frac{2\pi}{n} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)$$

És $\cos \left(\frac{2\pi}{n} \right)$ construïble?

Teorema de Gauss-Wantzel (1796-1837)

Es pot dibuixar amb regla i compàs un polígon de n costats si i només si n és el producte de una potència de 2 (1, 2, 4, 8, 16...) i un producte de nombres primers de Fermat distints.

Primers de Fermat

Els nombres de Fermat són els de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$



Primers de Fermat

Els nombres de Fermat són els de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Es sap que F_n per a $n=0,\dots,4$ és primer (3, 5, 17, 257, 65537).

Primers de Fermat

Els nombres de Fermat són els de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Es sap que F_n per a $n=0,\dots,4$ es primer (3, 5, 17, 257, 65537).

Es coneixen 307 nombres de Fermat que no són primers.

La probabilitat de trobar altre primer de Fermat s'estima $< \frac{1}{10^9}$.

Teorema de Gauss-Wantzel (1796-1837)

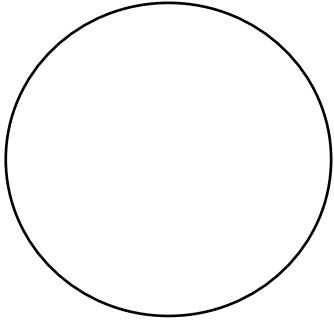
Polígons construïbles de menys de 1000 costats:

(1)	(2)	4	8	16	32	64	128	256	512
3	6	12	24	48	96	192	384	768	...
5	10	20	40	80	160	320	640	...	...
15	30	60	120	240	480	960	...	...	...
17	34	68	136	272	544	...	...	...	...
51	102	204	408	816	...	...	...	...	...
85	170	340	680	...	...	...	...	...	...
255	510	...	...	...	...	...	...	...	...
257	514	...	...	...	...	...	...	...	...
771	...	...	...	...	...	...	...	...	...

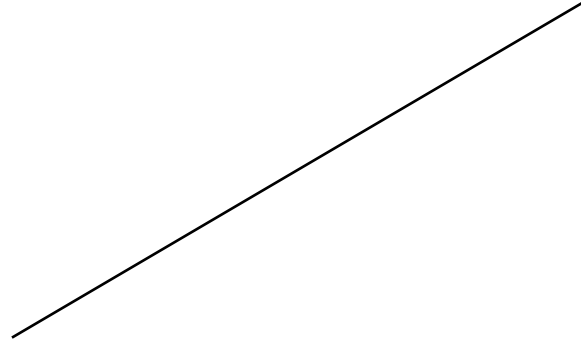
Aula **141**

El número 141 no està en la llista...

Amb regla i compàs:

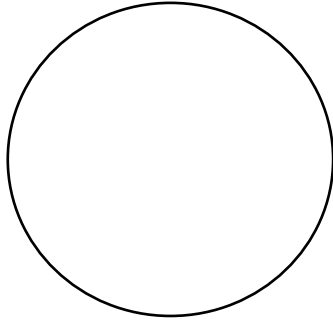


$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

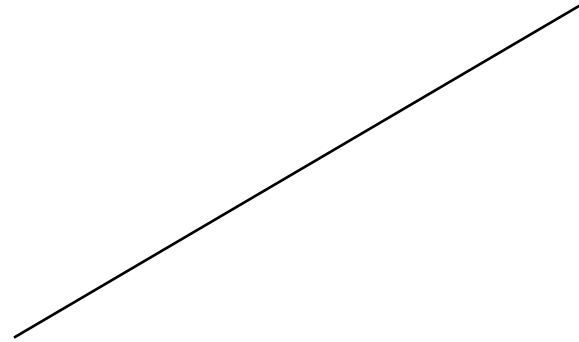


$$y = mx + n$$

Amb regla i compàs:



$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$



$$y = mx + n$$

Els punts d'intersecció seran solucions d'equacions de grau 1 o 2, les quals sabem resoldre amb la fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Amb regla i compàs:

Podem combinar aquests polinomis per arribar a graus 2, 4, 8, 16...

Per exemple, podem arribar a $\sqrt[8]{2}$, però no a $\sqrt[3]{2}$.

Amb regla i compàs:

Podem combinar aquests polinomis per arribar a graus 2, 4, 8, 16...

Per exemple, podem arribar a $\sqrt[8]{2}$, però no a $\sqrt[3]{2}$.

En la descomposició $n = 2^m p^a q^b \dots$ importen p^a per separat.

El grau de las equacions per a arribar a $\cos\left(\frac{2\pi}{p^a}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{p^a}\right)$ és $p^{a-1}(p-1)$

Amb regle i compàs:

Podem combinar aquests polinomis per arribar a graus 2, 4, 8, 16...

Per exemple, podem arribar a $\sqrt[8]{2}$, però no a $\sqrt[3]{2}$.

En la descomposició $n = 2^m p^a q^b \dots$ importen p^a per separat.

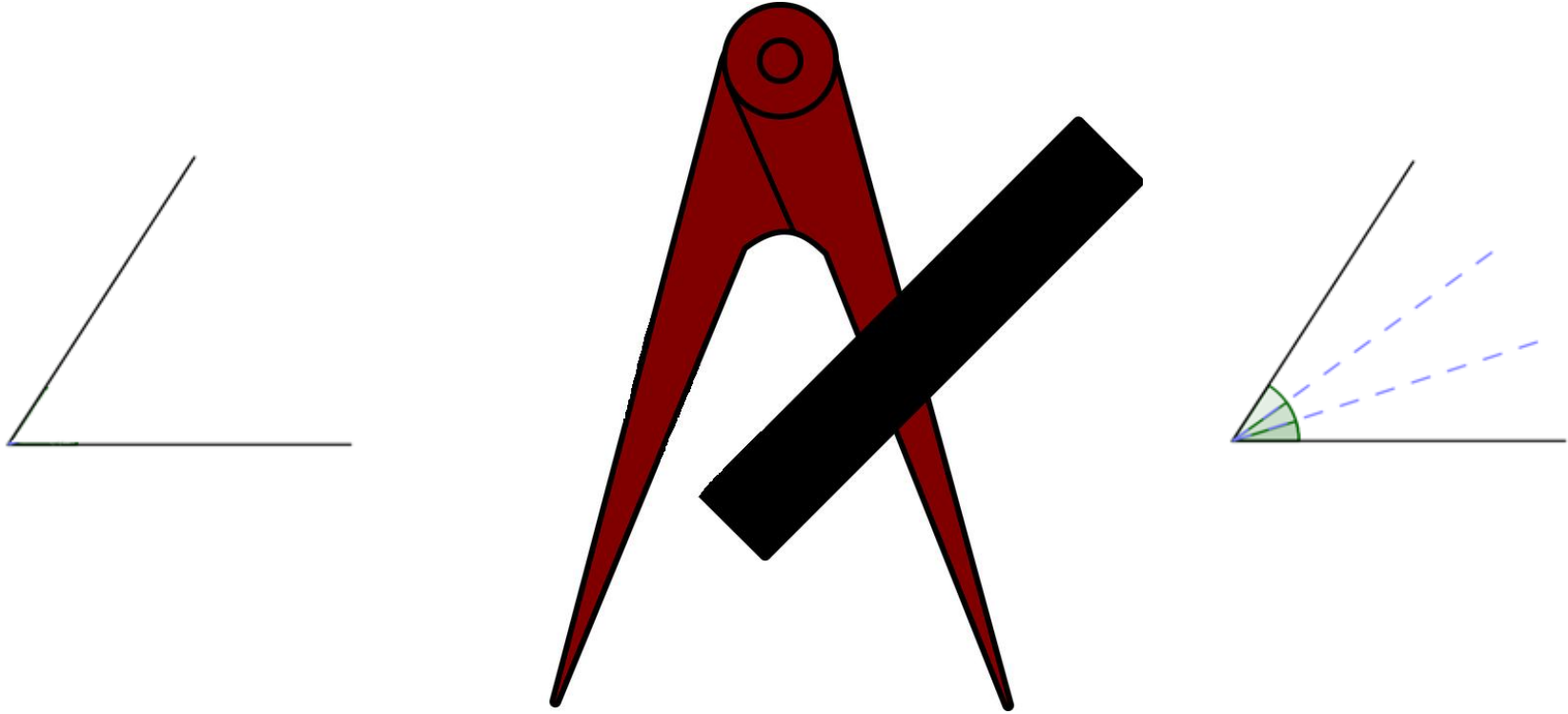
El grau de las equacions per a arribar a $\cos\left(\frac{2\pi}{p^a}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{p^a}\right)$ és $p^{a-1}(p-1)$

Per al regle i compàs, aquest grau ha de ser potència de 2, doncs $a = 1$.

A més $p - 1 = 2^r$, és a dir, $p = 2^r + 1$, que és primer només quan $r = 2^s$.

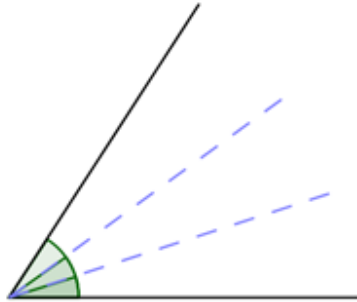
La trisecció de l'angle

La trisecció de l'angle



Per a l'angle de 60°

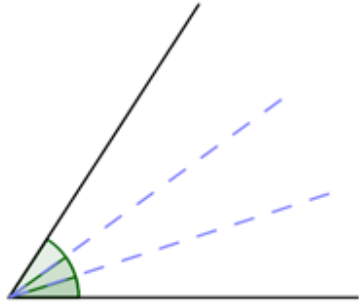
Trisecar-lo és calcular $\cos(20^\circ)$



Per a l'angle de 60°

Trisecar-lo és calcular $\cos(20^\circ)$

Com $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ i
 $\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x),$



Per a l'angle de 60°

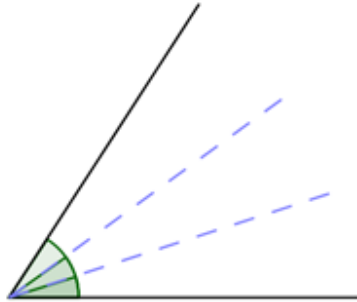
Trisecar-lo és calcular $\cos(20^\circ)$

Com $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ i

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x),$$

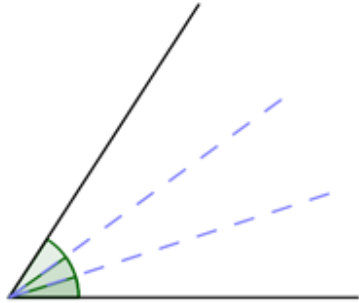
$\cos(20^\circ)$ és una arrel de

$$8x^3 - 6x - 1 = 0,$$



Per a l'angle de 60°

Trisecar-lo és calcular $\cos(20^\circ)$

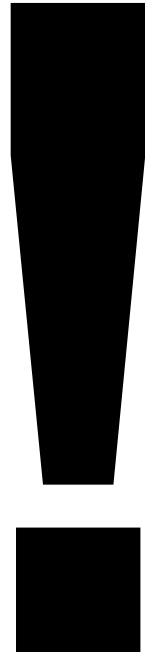


Com $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ i
 $\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x),$

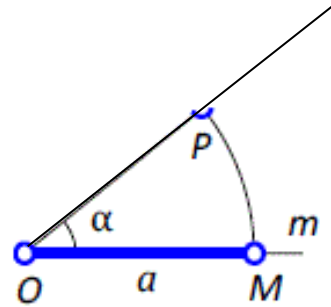
$\cos(20^\circ)$ és una arrel de
 $8x^3 - 6x - 1 = 0,$

irreductible sobre $\mathbb{Q}$!

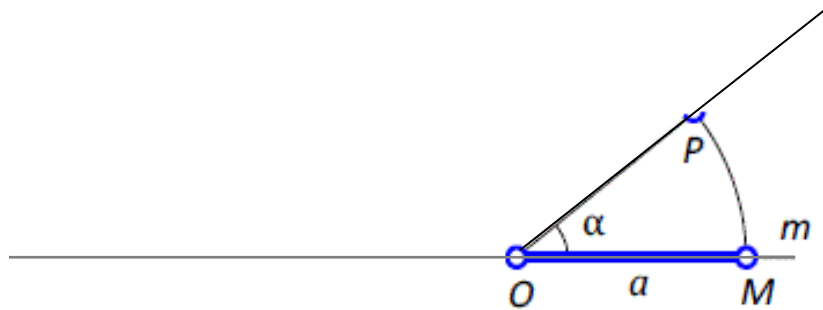
Però nosaltres anem
a trisecar un angle



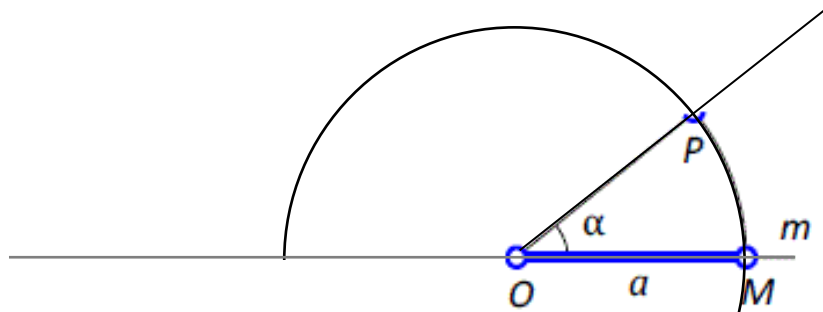
Trisecant un angle



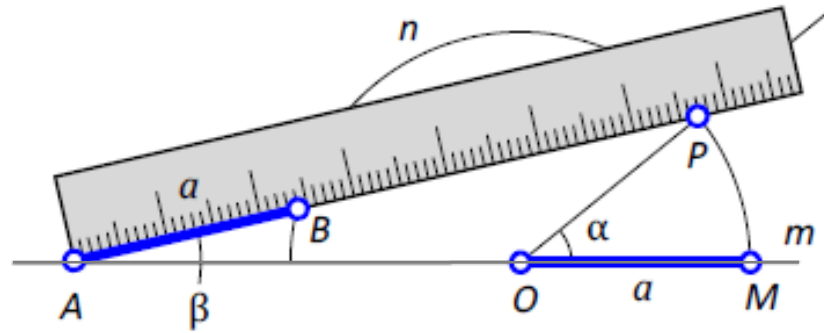
Trisecant un angle



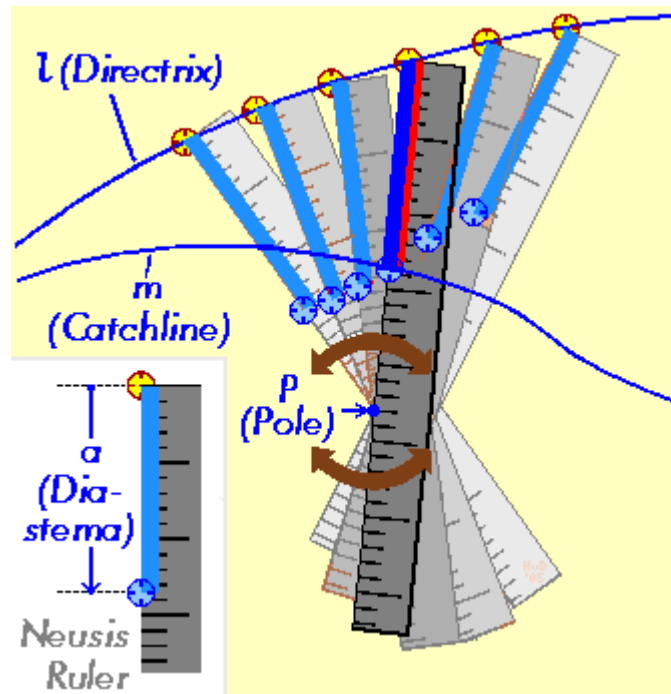
Trisecant un angle



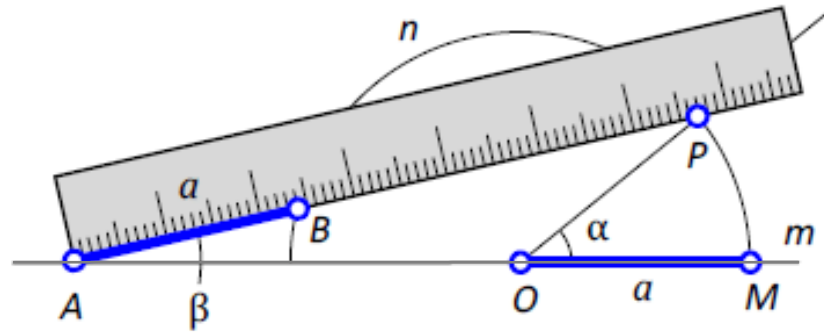
Trisecant un angle



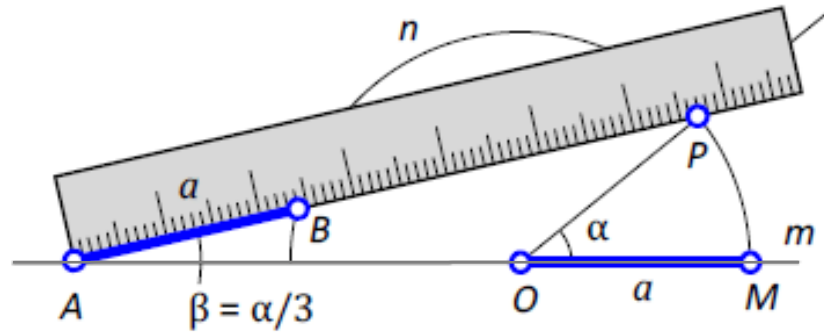
El regle marcat



Trisecant un angle

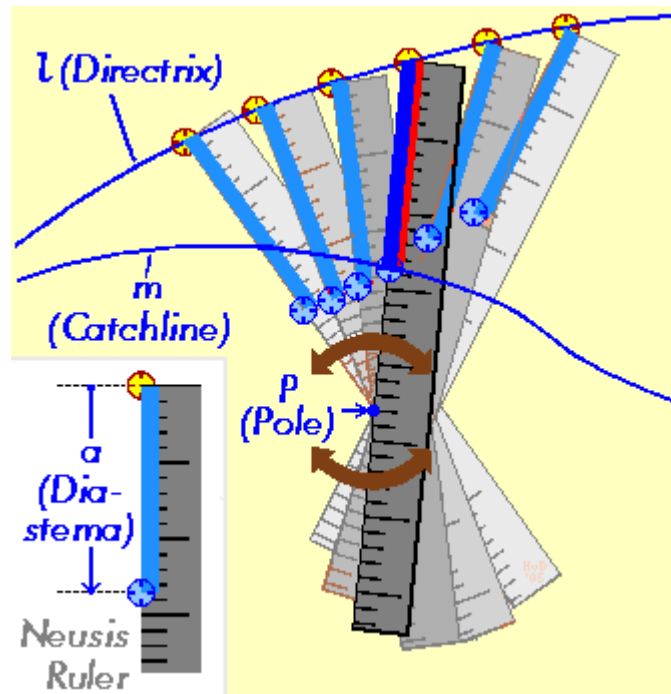


Trisecant un angle

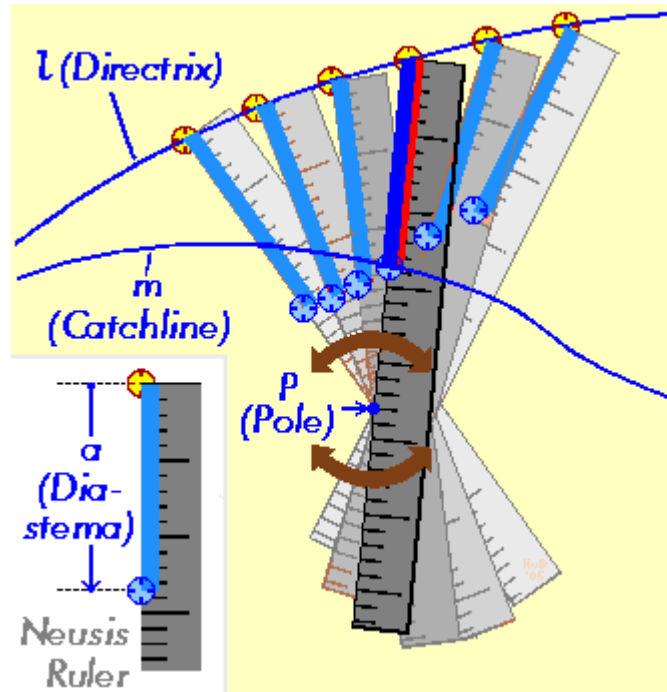


Arquímedes
(287-212 A.C.)

El regle marcat

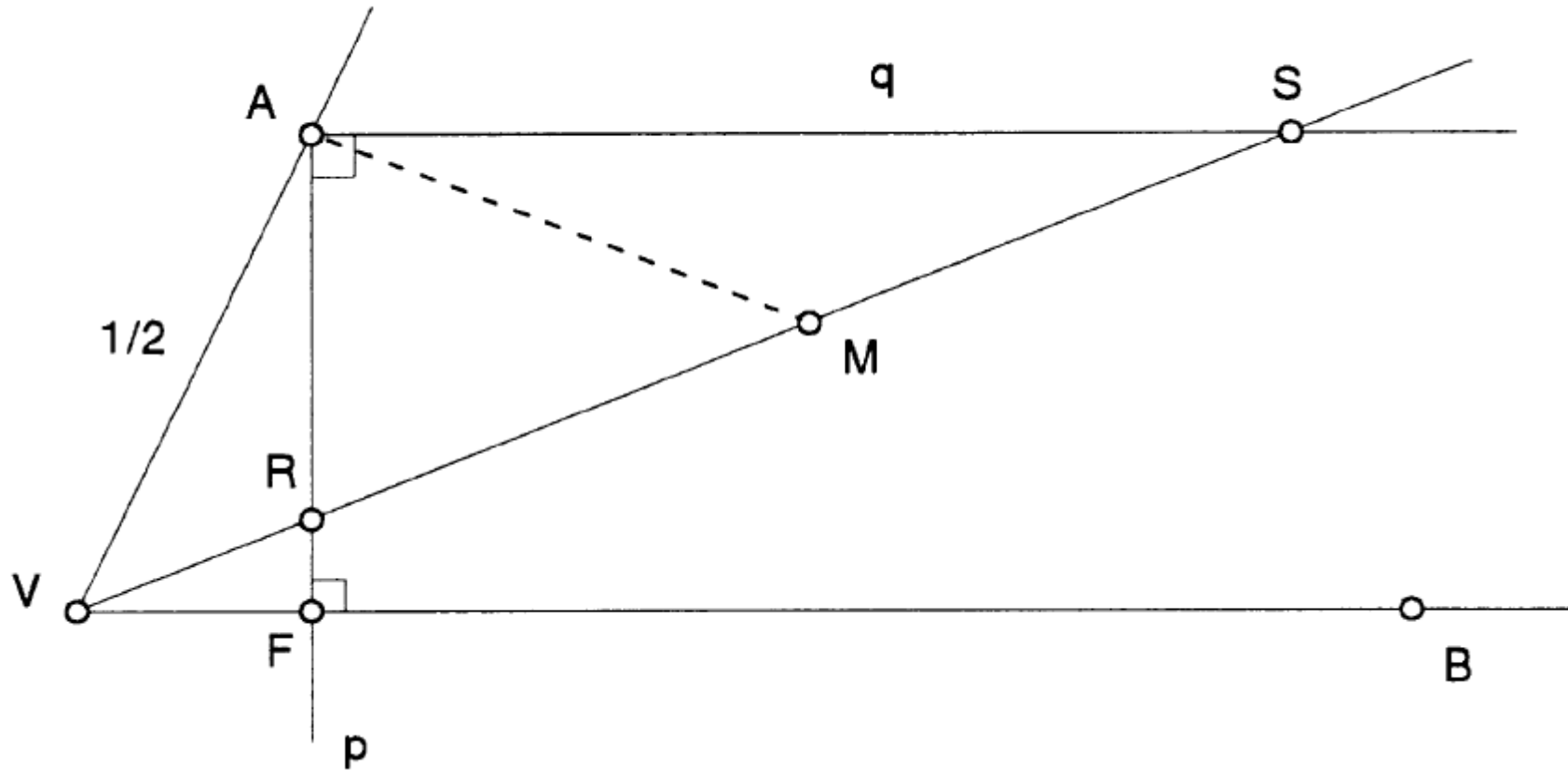


El regle marcat



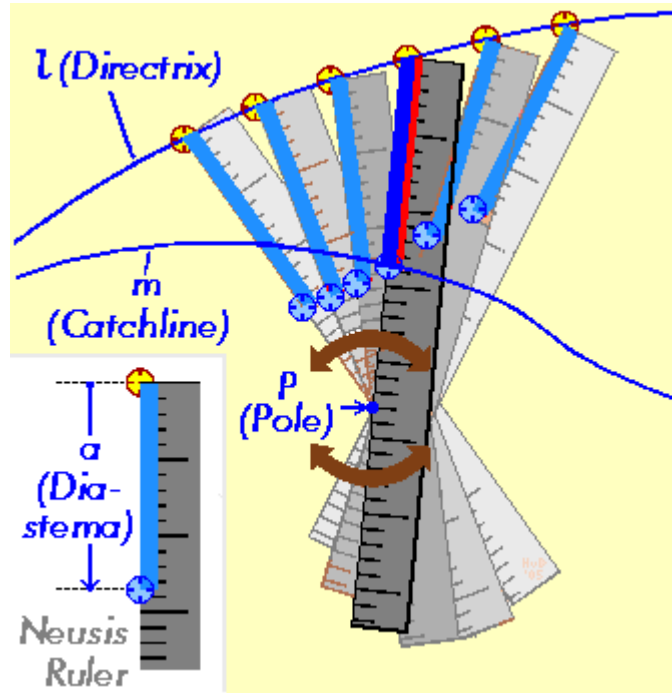
Qualsevol punt construïble amb regle i compàs
és construïble solament amb regle marcat.

La trisecció solament amb regle marcat

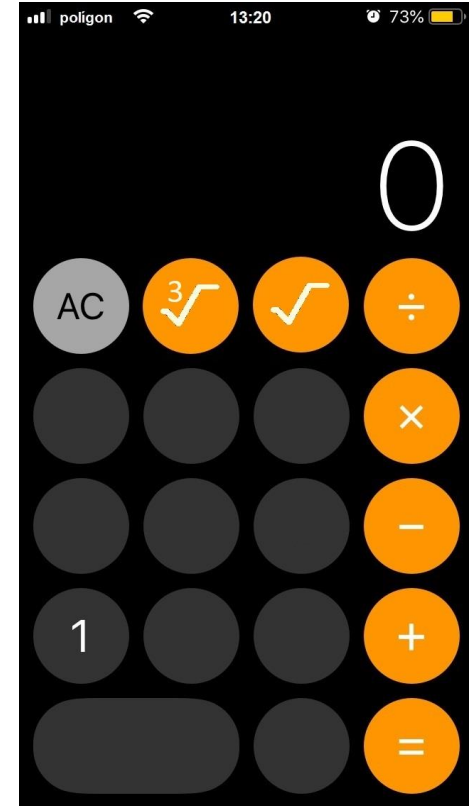


Ens permet el regle marcat
construir molts més punts?

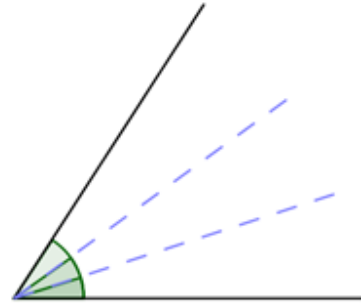
Teorema de Pierpont (1895)



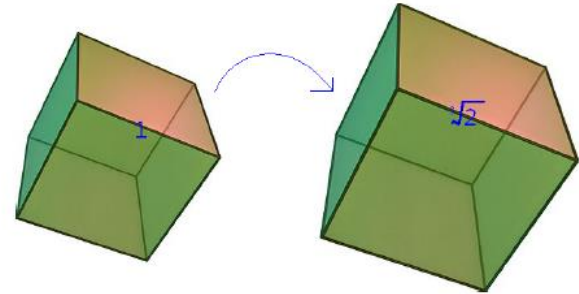
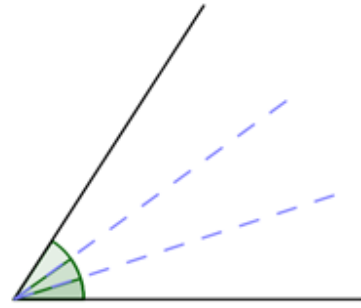
=



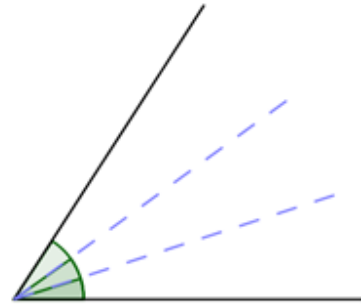
- Trisecar angles



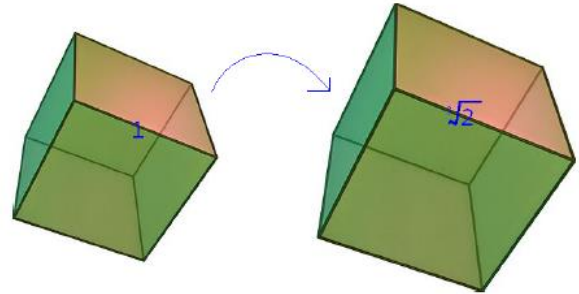
- Trisecar angles
- Duplicar el cub



- Trisecar angles



- Duplicar el cub



- Podem construir tots els polígons regulars?

Teorema de Pierpont (1895)

Es pot dibuixar amb regla marcat un polígon regular de n costats si i només si n és el producte d'una potència de 2 (1, 2, 4, 8...), una potència de 3 (1, 3, 9, 27...) i un producte de nombres primers de Pierpont distints.

Primers de Pierpont

Els primers de Pierpont són els de la forma

$$P_{u,v} = 2^u 3^v + 1$$

Primers de Pierpont

Els primers de Pierpont són els de la forma

$$P_{u,v} = 2^u 3^v + 1$$

Fins ara es coneixen: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97, 109, 163, 193, 257, 433, 487, 577, 769, 1153, 1297, 1459, 2593, 2917, 3457, 3889, 10369, 12289, 17497, 18433, 39367, 52489, 65537, 139969, 147457, 209953, 331777, 472393, 629857, 746497, 786433, 839809, 995329, 1179649, 1492993, 1769473, 1990657, pero no es sap si hi ha infinits.

Teorema de Pierpont (1895)

Es pot dibuixar amb regle marcat un polígon regular de n costats si i només si n és el producte d'una potència de 2 (1, 2, 4, 8...), una potència de 3 (1, 3, 9, 27...) i un producte de nombres primers de Pierpont distints.

$$P_{u,v} = 2^u 3^v + 1$$

Quins?

Construccions amb regla marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

oooooooooooo7 és primer

Construccions amb regle marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

oooooooooooo7 és primer i $7-1=6=2 \cdot 3$, primer de Pierpont!

Construccions amb regla marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

0000000000007 és primer i $7-1=6=2 \cdot 3$, primer de Pierpont!

Ara podem construir heptàgons regulars...
Arquímedes, Alhacén (Ibn al-Haytham) ~ s. X

Construccions amb regla marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

0000000000007 és primer i $7-1=6=2 \cdot 3$, primer de Pierpont!

Ara podem construir heptàgons regulars...
Arquímedes, Alhacén (Ibn al-Haytham) ~ s. X

Sabíem construir 8... $9=3^2$, el podem construir!

Construccions amb regla marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

oooooooooooo7 és primer i $7-1=6=2\cdot 3$, primer de Pierpont!

Ara podem construir heptàgons regulars...
Arquímedes, Alhacén (Ibn al-Haytham) ~ s. X

Sabíem construir 8... $9=3^2$, el podem construir!
Sabíem construir 10... i per a 11:

Construccions amb regla marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

0000000000007 és primer i $7-1=6=2\cdot 3$, primer de Pierpont!

Ara podem construir heptàgons regulars...
Arquímedes, Alhacén (Ibn al-Haytham) ~ s. X

Sabíem construir 8... $9=3^2$, el podem construir!
Sabíem construir 10... i per a 11:

11 és primer i $11-1=10=2\cdot 5$

Construccions amb regle marcat

Sabíem construir 3, 4, 5, 6...

0000000000007 és primer i $7-1=6=2\cdot 3$, primer de Pierpont!

Ara podem construir heptàgons regulars...
Arquímedes, Alhacén (Ibn al-Haytham) ~ s. X

Sabíem construir 8... $9=3^2$, el podem construir!
Sabíem construir 10... i per a 11:

11 és primer i $11-1=10=2\cdot 5$, no és primer de Pierpont!

La prova del cotó fluix

La prova del cotó fluix

List of trigonometric constants of $\frac{2\pi}{n}$ [\[edit \]](#)

For [cube roots](#) of non-real numbers that appear in this table, one has to take the [principal value](#), that is the cube root with the largest real part; this largest real part is always positive. Therefore, the sums of cube roots that appear in the table are all positive real numbers.

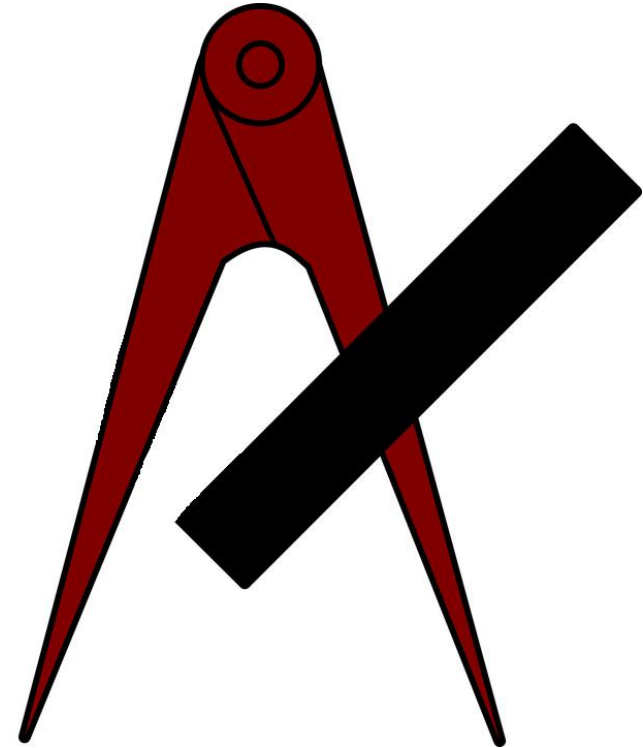
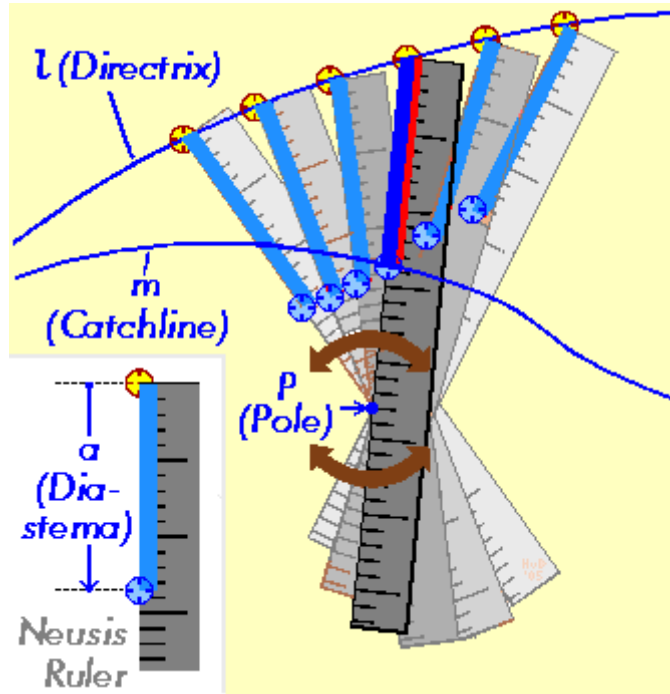
n	$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$	$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
1	0	1
2	0	-1
3	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
4	1	0
5	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$
6	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
7		$\frac{1}{6}\left(-1+\sqrt[3]{\frac{7+21\sqrt{-3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{7-21\sqrt{-3}}{2}}\right)$
8	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
9	$\frac{i}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}\right)$
10	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$
11		
12	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
13		$\frac{1}{12}\left(\sqrt[3]{104-20\sqrt{13}+12\sqrt{-39}}+\sqrt[3]{104-20\sqrt{13}-12\sqrt{-39}}+\sqrt{13}-1\right)$
14	$\frac{1}{24}\sqrt{3\left(112-\sqrt[3]{14336+\sqrt{-5549064192}}-\sqrt[3]{14336-\sqrt{-5549064192}}\right)}$	$\frac{1}{24}\sqrt{3\left(80+\sqrt[3]{14336+\sqrt{-5549064192}}+\sqrt[3]{14336-\sqrt{-5549064192}}\right)}$
15	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$
16	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)$

17	$\frac{1}{4} \sqrt{8 - \sqrt{2 \left(15 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}} \right)}}$	$\frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)$
18	$\frac{i}{4} \left(\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{-3}} - \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{-3}} \right)$	$\frac{1}{4} \left(\sqrt[3]{4 + 4\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{-3}} \right)$
19		
20	$\frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)$	$\frac{1}{4} \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)$
21		
22		
23		
24	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

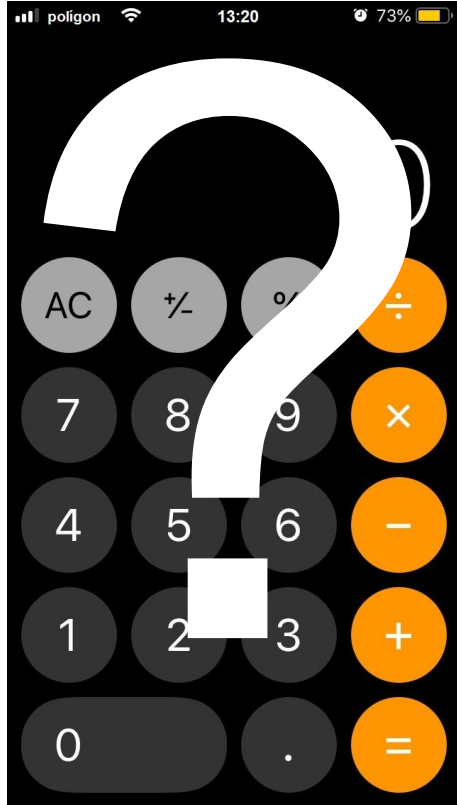
- Quan apareixen arrels quadrades podem construir amb regla i compàs.
- Quan apareixen arrels cúbiques podem construir amb regla marcat.

Però...

I amb regle marcat i compàs?



Nombres construïbles amb regle marcat i compàs



Nombres construïbles amb regle marcat i compàs

IDEA:

- Regle (grau 1) + compàs (grau 2):
solucions a equaciones de grau 2
(arrels cuadradas)



Nombres construïbles amb regle marcat i compàs



IDEA:

- Regle (grau 1) + compàs (grau 2):
solucions a equaciones de grau 2
(arrels cuadradas)
- Amb el regle marcat arribem a
solucions a equaciones de grau 3 (i 4)
(arrels cúbiques)

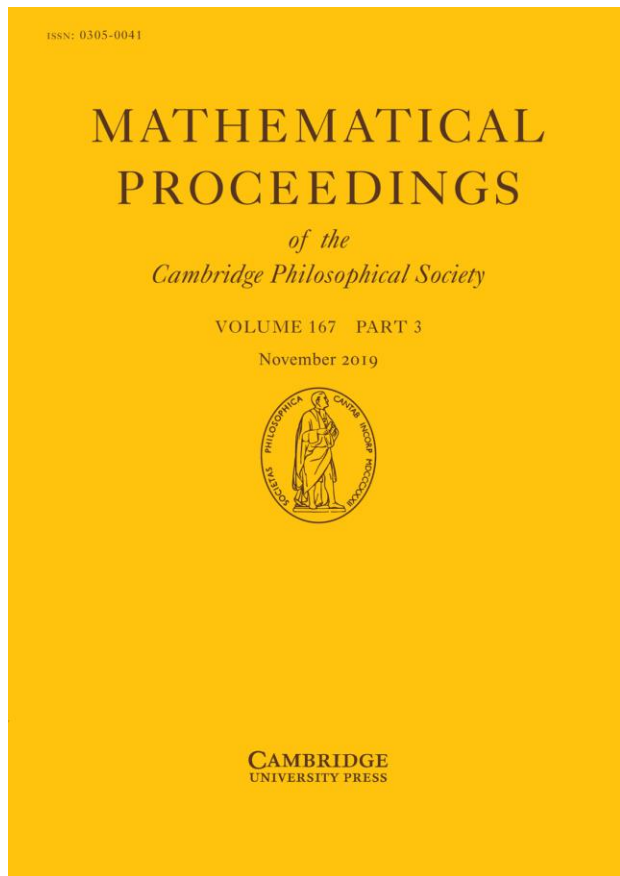
Nombres construïbles amb regle marcat i compàs



IDEA:

- Regle (grau 1) + compàs (grau 2):
solucions a equaciones de grau 2
(arrels cuadradas)
- Amb el regle marcat arribem a
solucions a equaciones de grau 3 (i 4)
(arrels cúbiques)
- Amb el regle marcat i el compàs:
solucions a equaciones fins a grau 6
(NO SÓN RESOLUBLES PER RADICALS)

En 2014, polígon d'11 costats...



Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2014), **156**, 409–424 © Cambridge Philosophical Society 2014

doi:10.1017/S0305004113000753

First published online 24 January 2014

409

On the construction of the regular hendecagon by marked ruler and compass

BY ELLIOT BENJAMIN

Mathematics Department, CALCampus, N.H. 03461, U.S.A.

e-mail: ben496@prexar.com

AND C. SNYDER

Department of Mathematics and Statistics, UMaine, Orono, ME 04469, U.S.A.

e-mail: snyder@math.umaine.edu

(Received 13 September 2013)

In Memory of Ali Erhan Özlük, 1952–2012

Abstract

We prove that the regular hendecagon (11-gon) is constructible by marked ruler and compass.

I un de 141 costats?

Aula **141**

$$141 = 3 \cdot 47$$

$47 - 1 = 46 = 2 \cdot 23$, no amb regla i compàs,
no amb regla marcat.

I un de 141 costats?

Aula **141**

$$141 = 3 \cdot 47$$

$47 - 1 = 46 = 2 \cdot 23$, no amb regla i compàs,
no amb regla marcat.

Teorema (Baragar, 2002): Si un polígon regular de p costats és construïble amb regla marcat i compàs, els únics factors primers de $p-1$ han de ser 2, 3 i 5.

I un de 141 costats?

Aula 141

NO!

$$141 = 3 \cdot 47$$

$47 - 1 = 46 = 2 \cdot 23$, no amb regla i compàs,
no amb regla marcat.

Teorema (Baragar, 2002): Si un polígon regular de p costats és construïble amb regla marcat i compàs, els únics factors primers de $p-1$ han de ser 2, 3 i 5.

Per exemple, 23, 29, 43, 47, 49, 53, 59,
67, 71, 79, 83, 89 no són construïbles
amb regle marcat i compàs.

Per exemple, 23, 29, 43, 47, 49, 53, 59, 67, 71, 79, 83, 89 no són construïbles amb regla marcat i compàs.

Però encara no sabem si els polígons regulars de 25, 31, 41, 61... costats són construïbles amb regla marcat i compàs.

ÉS UN PROBLEMA OBERT

Gràcies per la vostra atenció

Roberto Rubio



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

www.ub.edu/geomap/rubio



beatriu
de pinós bp'