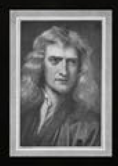
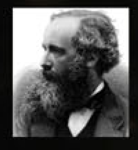
YANG-MILLS, INSTANTONES, MONOPOLOS Y FIBRADOS DE HIGGS.

Un póster de Roberto Rubio Núñez.
Departamento de Matemáticas.
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (CSIC).
c/ Serrano, 123 28006 MADRID
roberto@imaff.cfmac.csic.es

A mi hermano Raúl.



En 1687, Isaac Newton formula en sus *Philosophiae naturalis principae mathematicae* la ecuación de la gravedad. En el prefacio de su libro, escribe: "Me gustaría que pudiésemos explicar los demás fenómenos de la naturaleza mediante el mismo tipo de razonamiento que el empleado a partir de los principios mecánicos, pues muchas razones me inducen a pensar que todos ellos dependen de ciertas fuerzas".

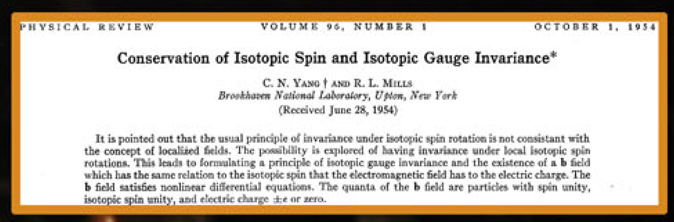


En 1864, James Clerk Maxwell presenta en la Royal Society las conocidas hoy día como "ecuaciones de Maxwell", que describen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético.

Entre 1907 y 1916, Albert Einstein publica los artículos que fundamentan su teoría de la relatividad general, en la que construye una teoría de gravitación sobre $\mathbb{R}^4$ (tres coordenadas espaciales y una temporal) con la métrica de Minkowski, con lo que el espacio-tiempo adquiere curvatura.

Las ecuaciones de Yang y Mills en 1954 son el cuarto paso para describir mediante ecuaciones la interacción de la materia. En esta ocasión querían describir la conocida como "fuerza fuerte", la que se creía encargada, en aquel momento, de unir los protones y los neutrones en el núcleo, y a la que actualmente se le atribuye la unión de los tres quarks que forman cada uno de los nucleones.

C.N. Yang en 1957.



PHYSICAL REVIEW VOLUME 96, NUMBER 1 OCTOBER 1, 1954

Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*

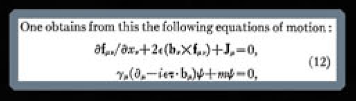
C. N. Yang † and R. L. Mills
Brookhaven National Laboratory, Upton, New York
(Received June 28, 1954)

It is pointed out that the usual principle of invariance under isotopic spin rotation is not consistant with the concept of localized fields. The possibility is explored of having invariance under local isotopic spin rotations. This leads to formulating a principle of isotopic gauge invariance and the existence of a **b** field which has the same relation to the isotopic spin that the electromagnetic field has to the electric charge. The **b** field satisfies nonlinear differential equations. The quanta of the **b** field are particles with spin unity, isotopic spin unity, and electric charge $\pm e$ or zero.

La ecuación de Yang-Mills ha unido eternamente los apellidos de Cheng Ning Yang y Robert Lawrence Mills, aunque si revisamos la historia, nos encontramos con algo muy distinto. En verano de 1953, Yang, de treinta y un años y profesor en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, realizaba una estancia en el laboratorio de Brookhaven, donde le hicieron un hueco en el despacho de Mills, de ventiséis años y recién llegado de Cambridge. Poco más de un año después, el 1 de octubre de 1954, se publicaba en el Physical Review el artículo "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance". A partir de ese momento, sus trayectorias se separan. Yang fue galardonado en 1957 con el premio Nobel de Física, compartido con Tsung Dao Lee, por "su profunda investigación de las llamadas leyes de paridad que han llevado a importantes descubrimientos respecto a las partículas elementales". Mills, en 1956, obtuvo una plaza en la Universidad del Estado de Ohio, donde permaneció hasta su jubilación en 1995, y siguió su investigación desde el anonimato. El resto de su relación científica se reduce a un artículo de 1966 sobre el fotón, mucho menos conocido que el anterior.

Yang y Mills en su artículo de 1954 parten de la idea de que el protón y el neutrón son dos estados distintos de la misma partícula, el nucleón, que es uno u otro dependiendo del spin isotópico. Tal y como remarcan en el resumen del artículo, parten de la invarianza local bajo rotaciones del spin isotópico y postulan la existencia de una campo **b** que sea al spin isotópico, lo que la carga eléctrica es al campo electromagnético.

La interacción protón-neutrón se describe en términos de piones, que pueden tener carga positiva, negativa o neutra. Estos tres tipos de piones se corresponden con la dimensión del grupo de Lie $SU(2)$ (matrices 2×2 unitarias de determinante 1), que es el grupo considerado en el artículo, sin darle ese nombre. Tras un proceso similar al del electromagnetismo, llegan a la que es la primera formulación de las ecuaciones de Yang-Mills:



One obtains from this the following equations of motion:

$$\partial f_{\mu\nu}/\partial x_\nu + 2\epsilon(b_\nu \times f_{\mu\nu}) + J_\mu = 0,$$
$$\gamma_\mu(\partial_\mu - i\epsilon\tau\cdot b_\mu)\psi + m\psi = 0, \qquad (12)$$

Según las teorías actuales la interacción fuerte la realizan 8 gluones que se encuadran dentro de la Cromodinámica cuántica, y que son los encargados de unir los quarks que hay dentro de cada nucleón. El número 8 corresponde a la dimensión de $SU(3)$. En cualquier caso, la historia no es ni mucho menos tan sencilla, ya que hay que tener en cuenta una cuarta fuerza hasta ahora no nombrada: la fuerza débil, y el proceso de unificación de las fuerzas electrodébil y fuerte corresponde al grupo de estructura producto $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ que tiene algunas condiciones por la relación entre las fuerzas fuerte y débil. Aunque esto ya es otra historia: la del premio Nobel de 1979 para Glashow, Salam y Weinberg por el modelo estándar.

El interés de la teoría de **Yang-Mills** radica en que se puede generalizar para otros grupos, y éste es el camino que vamos a recorrer, para lo cual será conveniente volver al electromagnetismo.

Una de las ideas de la teoría de Yang-Mills es poder describir cualquier interacción de la materia variando el grupo de estructura. Veamos cómo se pueden ver las ecuaciones de Maxwell en forma de las ecuaciones de Yang-Mills.

Para ello necesitamos el operador estrella de Hodge $*$, que, gracias a una forma de volumen en una variedad M (para lo cual basta que sea pseudo-riemanniana y tenga forma de volumen ω), manda $\bigwedge^k T^*M$ en $\bigwedge^{n-k} T^*M$, cumpliendo $\eta\wedge *\eta=\omega$, es decir si $\omega = e_1\wedge\ldots\wedge e_n$, se tiene $*(e_1\wedge\ldots\wedge e_k) = e_{k+1}\wedge\ldots\wedge e_n$.

Las ecuaciones de Maxwell en notación estándar se pueden escribir como:

$$\mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \mathrm{div}B = 0$$
$$\mathrm{rot}B - \frac{\partial E}{\partial t} = j \quad \mathrm{div}E = \rho\ ,$$

donde E representa el campo eléctrico, B el campo magnético, ρ la densidad de carga y j la densidad de la corriente eléctrica.

Consideramos que estamos en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^4$ con coordenadas x_0, x_1, x_2, x_3 y tenemos una métrica de signatura $(1,-1,-1,-1)$, con lo que x_0 representa el tiempo. Suponiendo $E = (E_1, E_2, E_3)$ y $B = (B_1, B_2, B_3)$, definimos el siguiente campo:

$$F = -E_1 dx_0\wedge dx_1 - E_2 dx_0\wedge dx_2 - E_3 dx_0\wedge dx_3$$
$$B_3 dx_1\wedge dx_2 - B_2 dx_1\wedge dx_3 + B_1 dx_2\wedge dx_3.$$

Se comprueba que entonces las ecuaciones de Maxwell son simplemente

$$dF = 0 \qquad d*F = j$$

tras desarrollar las diferenciales y utilizar las definiciones de divergencia y rotacional. De la primera ecuación obtenemos $\mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ y $\mathrm{div}B = 0$, y de la segunda, las dos restantes.

La segunda ecuación se suele escribir $\delta F = *j$, definiendo $\delta := *d*$. A partir de ahora supondremos que trabajamos en el vacío y por tanto, $j = 0$.

De la ecuación $dF = 0$, obtenemos que existe una 1-forma A tal que $dA = F$, A la podemos escribir como $A = A_0dx_0 + A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3$ y resulta cumplirse que A_0 corresponde al potencial eléctrico, que da el campo eléctrico $E = \nabla A_0$, y $\bar{A} = (A_1, A_2, A_3)$ da el campo magnético por $B = \mathrm{rot}A$ (nótese que el campo magnético no es conservativo).

Si variamos el potencial, sumándole una forma exacta, tendremos que las ecuaciones siguen siendo válidas, es decir, dada cualquier 1-forma A, tal que $dF = 0$ y $d*F = 0$, $A' = A + df$ es solución. Por tanto hay una elección arbitraria de f que da origen al término *gauge*, que significa calibre. Tal elección es una forma de calibrar la 1-forma A.

El punto clave es que ciertas consideraciones físicas fuerzan a que las leyes sean invariantes por una transformación gauge local, lo que hace necesario introducir el lenguaje de los fibrados principales. Bajo ese punto de vista, A es la 1-forma de conexión y F es la curvatura de un fibrado con grupo de estructura $U(1)$.

Es fundamental remarcar que el hecho de que el fibrado sea de línea y que $U(1)$ sea un grupo abeliano simplifica muchísimo las expresiones. En un contexto general, dado un fibrado principal con grupo de estructura G cualquiera, para una 1-forma de conexión A, la curvatura es $F = dA + A\wedge A$, y las ecuaciones de Yang-Mills vienen dadas por

$$D^A F = 0 \qquad *D^A*F = 0\,.$$

La primera de estas ecuaciones es obvia matemáticamente, ya que corresponde a la identidad de Bianchi. La segunda es la que supone un problema interesante matemáticamente, ya que es una ecuación en derivadas parciales, que como veremos no es nada fácil de resolver.

Cuando la resolución de unas ecuaciones como las de Yang-Mills supone tanta dificultad, lo habitual es intentar reducir el problema para poder llegar a soluciones particulares. Si trabajamos sobre una variedad de dimensión 4, el operador estrella de Hodge va de 2-formas en 2-formas y podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$F = *F \qquad F = -*F\,,$$

que se llaman, respectivamente, ecuación autodual de Yang-Mills o de los instantones y antiautodual de Yang-Mills o de los anti-instantones.

De manera trivial, se ve que las soluciones de estas ecuaciones son soluciones de la ecuación de Yang-Mills, pues por Bianchi $D_AF = 0$ y por tanto $D_A*F = D_A\pm F = \pm D_AF = 0$.

El nombre **instantón** viene del caso en que la variedad base es S^4, ya que las soluciones que se hallan explícitamente están muy localizadas en el espacio-tiempo, es decir, la solución hace referencia a un instante muy concreto tanto en el tiempo como en el espacio. El uso de la palabra instantón se generaliza a aquellas soluciones de la ecuación autodual que minimizan el funcional de Yang-Mills:

$$YM(A) = \int_{\mathbb{R}^4} |F|^2 d\mu$$

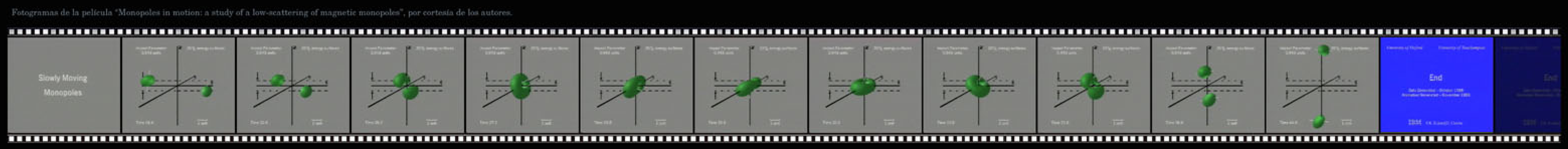
Otra forma de encontrar más soluciones es la reducción dimensional: se consideran soluciones que son invariantes por la acción de algún grupo. El caso más sencillo es considerar las que son invariantes en una dirección. Un ejemplo de éstas son los **monopolos**, que vienen de las llamadas ecuaciones de Bogomolnyi.

Un monopolo es una hipotética carga magnética, que no se ha encontrado en la naturaleza (los imanes siempre tienen dos polos), y cuya existencia implicaría, como probó Dirac en 1931, la cuantización de la carga eléctrica, esto es, la existencia de una mínima carga eléctrica de la que toda carga es un múltiplo entero.

En todos estos casos, además de las soluciones en sí mismas, interesa considerar el espacio de soluciones módulo cierta equivalencia, lo que es conocido como espacio de *moduli* al que se le puede dotar de cierto tipo de estructura que nos puede aportar nueva información. *Moduli* significa parámetros: el espacio resultante es un espacio que parametriza las soluciones.

A la izquierda puede verse una secuencia del vídeo "Monopoles in motion" realizado en 1989 por Atiyah, Hitchin, Merlin, Pottinger y Ricketts.

Fotogramas de la película "Monopoles in motion: a study of a low-scattering of magnetic monopoles", por cortesía de los autores.



En 1987, Nigel Hitchin publica el artículo "The self-duality equations on a Riemann surface", donde considera una reducción dimensional de las ecuaciones autoduales de Yang-Mills sobre $\mathbb{R}^4$: busca las soluciones que son invariantes por dos traslaciones, con lo que obtiene un conjunto de ecuaciones sobre el plano:

$$F + [\Phi, \Phi^*] = 0 \qquad d''_A\Phi = 0\,.$$

En el primer párrafo de este artículo, Hitchin deja bien claro que así como las soluciones (con acción -energía- finita) invariantes por una traslación son los monopolos, el caso que contempla "no tiene ningún significado físico claro", pero "pese a ello, éstas son las ecuaciones que consideraremos".

Este punto de partida que pudiera parecer arbitrario, no lo es en absoluto. Para empezar las ecuaciones resultantes tienen una propiedad fundamental: la invarianza conforme, que le permite definir las ecuaciones en una superficie de Riemann (variedad compleja de dimensión 1), con lo que introduce un interés geométrico. Interés que se hace palpable en las 68 páginas del artículo y todo el trabajo desarrollado hasta nuestros días.

Estas ecuaciones permiten definir un objeto conocido como **fibrado de Higgs**. Este nuevo objeto está íntimamente relacionado con el grupo fundamental de la variedad sobre la que trabajamos. De hecho, se tiene que el espacio de *moduli* de los fibrados de Higgs es isomorfo al espacio de *moduli* de representaciones del grupo fundamental de la variedad (la palabra *moduli* también se utiliza para espacios que parametricen estructuras, no sólo soluciones). Esta equivalencia supone una restricción sobre los posibles grupos fundamentales que puede tener una variedad.

En abril de 2006, casi 20 años después del artículo de Hitchin, Kapustin y Witten publicaron "Electric-Magnetic duality and the geometric Langlands program", artículo donde los fibrados de Higgs se relacionan con conceptos como branas, que tocan la teoría de cuerdas, una tentativa de unificar todas las fuerzas (nótese que el modelo estándar no unificaba la gravedad).

Si la Tierra tuviese forma de rosquilla (lo que en Matemáticas se llama toro), localmente seguiríamos percibiendo un mundo plano:

Imagen tomada por GoogleEarth.

El grupo fundamental es un invariante topológico que permite distinguir, en particular, entre la esfera y el toro. Intuitivamente cuenta el número de agujeros.

El 24 de mayo de 2000, el Instituto Clay de Matemáticas (con sede en Cambridge) propuso en un congreso en París, e inspirado por la lista de David Hilbert de 23 problemas para "matemáticos futuros", 7 problemas del milenio, dotado cada uno con un millón dolares para quien lo resolviese. Uno de ellos se titula precisamente "Existencia de Yang-Mills y brecha de masa" y se formula en los siguientes términos: "Probar que para cualquier grupo gauge simple compacto G, una teoría no trivial de Yang-Mills existe en $\mathbb{R}^4$ y tiene una brecha de masa $\Delta > 0$." Este problema se entiende en términos de Teoría Cuántica de Campos (QFT en inglés) y la "brecha de masa" se interpreta como una energía mínima que ha de tener cualquier estado no vacío.

BIBLIOGRAFÍA

M.F. Atiyah y N. Hitchin "The geometry and dynamics of magnetic monopoles" Princeton Universtity Press, 1988.
Graham Farmelo (ed.) "Fórmulas elegantes" Metatemas. Tusquets, 2004.
M. Göckeler y T. Schücker "Differential geometry, gauge theories, and gravity." Cambridge University Press, 1987.
N.J. Hitchin "The self-duality equations on a Riemann surface." Proc. London Mathematical Society (3) 55 (1987), 59-126.
A. Jaffe y E. Witten "Quantum Yang-Mills Theory" Web del Instituto Clay.
A. Kapustin y E. Witten "Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program" arXiv:help-th:0604151 v1
K.B. Marathe y G. Martucci "The mathematical foundations of gauge theories" North-Holland, 1992.
C.N. Yang y R.L. Mills "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance" Physical review. 96 (1954) pp. 191-195.

AGRADECIMIENTOS

Marco Castrillón López, Óscar García Prada, Mario García Fernández, Álvaro Antón Sancho, Luis Álvarez Cónsul, Tomás Luis Gómez de Quiroga, Nigel Hitchin y Raúl Rubio Núñez.

madrid
Área de Gobierno de Empleo y Servicios a la Ciudadanía
Dirección General de Educación y Juventud

Residencia de Estudiantes

CSIC

semana de la ciencia mi+d