
La propietat L: Des de Frobenius fins a les
seves aplicacions passant per Olga Taussky



Autora: Júlia Masó Ferrer

Tutor: Roberto Rubio

FACULTAT DE CIÈNCIES
GRAU EN MATEMÀTIQUES
TREBALL DE FINAL DE GRAU

2024 - 2025

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria donar les gràcies al meu tutor/a per tota la seva orientació durant aquest procés, així com per facilitar-me els recursos necessaris per desenvolupar aquest treball.

Així mateix, agraeixo a la meva família i als meus amics per tot el suport proporcionat i per dedicar temps a la lectura del meu treball. Gràcies per la seva paciència i la seva comprensió durant aquesta etapa, sense ells no hauria estat possible.

Índex

Introducció	1
1 Els inicis de la propietat L: la propietat P	4
1.1 Les matrius que compleixen la propietat P	4
1.2 Una condició menys restrictiva	7
2 La propietat L	10
2.1 Resultats sobre la propietat L per a parells de matrius	10
2.2 Relació entre la propietat L i la propietat P	15
2.2.1 Connexions inicials entre cinc propietats	15
2.2.2 Límits en l'equivalència de les cinc propietats	19
3 Aplicacions de la propietat L en l'estudi de matrius exponencials	23
3.1 Resultats previs	23
3.2 Vincle entre les matrius exponencials i la propietat L	32
3.2.1 Un cas particular	32
3.2.2 La connexió principal	34
Bibliografia	38
Apèndix	40
A Definicions bàsiques	40
B Matrius exponencials	42

Introducció

Siguin A i B dues matrius d'ordre $n \times n$ qualssevol amb arrels del polinomi característic λ_i i μ_i per $i = 1, \dots, n$ (possiblement amb repeticions). Existeixen parells de matrius (A, B) que satisfan la propietat que les arrels del polinomi característic de qualsevol combinació lineal $\alpha A + \beta B$, són exactament $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ per $i = 1, \dots, n$, prenent un ordre adequat de les arrels λ_i i μ_i independent dels valors d' α i β . Aquesta s'anomena propietat L , denominada així per Olga Taussky, a causa de la seva linealitat, qui la va estudiar conjuntament amb Theodore Samuel Motzkin [8].

Olga Taussky-Todd (30 d'agost del 1906 - 7 d'octubre del 1995) va ser una matemàtica d'origen austrohongarès amb nacionalitat estatunidenca coneguda per les seves contribucions en la teoria de números algebraics i en la teoria de matrius, així com per la publicació de diferents articles sobre la teoria de grups i l'anàlisi numèrica.

Durant la Segona Guerra Mundial, mentre estava de llicència de la Universitat de Londres, Taussky es va trobar a la biblioteca de la Queen's University, a Irlanda, un resultat de Neal Henry McCoy que generalitzava una propietat estudiada per Frobenius, la qual McCoy anomena propietat I_n i, posteriorment, ella i Motzkin l'anomenen propietat P . Aquesta propietat estableix que si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n amb arrels del polinomi característic λ_i i μ_i , respectivament, i sigui f una funció polinòmica de dues variables, llavors les arrels del polinomi característic de la matriu $f(A, B)$ són de la forma $f(\lambda_i, \mu_i)$ amb un ordre adequat de les λ_i i μ_i independentment de la funció f .

Frobenius va provar que si A i B són dues matrius commutatives, aleshores satisfan la propietat P , però McCoy va demostrar que la commutativitat de matrius no és una condició necessària, sinó que, de forma més general, les matrius simultàniament triangularitzables són les que compleixen la propietat P .

A partir d'aquí, Taussky va començar a intercanviar correspondència amb McCoy provocant un augment en el seu interès en l'àmbit de les matrius, compartint diverses publicacions sobre aquestes. Arran d'això, mentre treballava a la Universitat de Londres, es va plantejar el problema de buscar una relació explícita entre les arrels del polinomi característic d' A , B i $A + B$, menys restrictiva que la propietat P . Va ser

finalment quan Mark Kac li va presentar la idea de la propietat L que, conjuntament amb Theodore Samuel Motzkin, al juliol de 1952 publiquen l'article "*Pairs of Matrices with Property L*", el qual pren rellevància gràcies a la connexió explícita que estableix entre les arrels del polinomi característic d' A , B i $\alpha A + \beta B$. Posteriorment, al novembre del 1955 publiquen un segon treball que continua amb la mateixa línia d'estudi.

Aquest treball es divideix en tres parts, cadascuna d'elles acompanyada d'una perspectiva històrica que segueix el desenvolupament matemàtic.

En la primera part ens centrem en els orígens de la propietat L , és a dir, en estudiar la propietat P . Aquesta inclou l'anàlisi de Frobenius, que demostra com les matrius commutatives satisfan la propietat P . Per a poder dur a terme aquest estudi ha estat necessari traduir l'article de Frobenius de l'alemany a l'anglès, així com desenvolupar un parell de demostracions de lemes necessaris per a la prova del teorema principal, les quals ell no escriu explícitament o les tracta amb un enfocament diferent. Més concretament, aquestes demostracions corresponen a les que estudien les arrels del polinomi característic de la matriu $g(A)$, on g és una funció polinòmica d'una variable (lema 1.2), i de la matriu $\alpha A + \beta B$ quan el parell (A, B) és commutatiu (lema 1.3).

A més a més, s'incorpora l'estudi de la condició, desenvolupada per McCoy, per a satisfer la propietat P . McCoy demostra que dues matrius siguin simultàniament triangularitzables és una condició necessària i suficient perquè la verifiquin. En aquest treball, per motius de claredat, ens centrem només en la implicació que si dues matrius són simultàniament triangularitzables, aleshores compleixen la propietat P .

La segona part està centrada en el primer article de Taussky i Motzkin, on s'estudien dos resultats sobre matrius que satisfan la propietat L . En particular, el primer estudia que si dues matrius respecten la propietat L i una de les matrius és diagonalitzable, aleshores l'altre es pot expressar com una matriu per blocs on el polinomi característic d'aquesta depèn únicament dels polinomis característics de cadascun dels blocs de la diagonal, i el segon diu que dues matrius hermitianes que tenen la propietat L són commutatives. A més a més, s'estableix una relació entre la propietat P i la propietat L a partir d'introduir cinc propietats diferents. Aquestes, a part de la propietat L i P , inclouen la commutativitat, la quasi-commutativitat i la 1-linealitat entre dues matrius.

Es determina una cadena d'implícacions entre les propietats, elaborant la demostració d'aquesta cadena que Taussky i Motzkin no donen en el seu article, i es proporcionen contraexemples per a les implicacions recíproques, incloent-hi quatre exemples originals (Exemples 2.13, 2.15, 2.16 i 2.17). Entre ells, destaca el fet que la propietat L no sempre implica la propietat P .

Finalment, en la tercera part ens centrem en una aplicació recent de la propietat L , donada en un article de Clément de Seguins Pazzis, on s'estableix una connexió entre les matrius exponencials de la forma $e^{\alpha A+B}$ amb la propietat L . Concretament, si les matrius exponencials de A i B compleixen que $e^{\alpha A+B} = e^{\alpha A}e^B = e^Be^{\alpha A}$ per tot $\alpha \in \mathbb{N}$, aleshores (A, B) satisfan la propietat L . A més, amb una hipòtesi més restrictiva, si les exponencials de les matrius A i B compleixen $e^{\alpha A+\beta B} = e^{\alpha A}e^{\beta B}$ per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, aleshores les matrius A i B són commutatives.

Per tal d'establir aquest vincle, s'ha requerit un treball de comprensió dels resultats necessaris per a la demostració d'aquest, amb la finalitat d'escriure seguint les demostracions originals, però amb paraules pròpies. A més, s'han formalitzat resultats independents que s'han provat de forma separada, com han estat les proposicions 3.7 i 3.16 i els lemes 3.14 i 3.21.

Durant el treball, tret que s'especifiqui el contrari, utilitzarem la següent notació:

Notació: Treballem sobre un cos algebraicament tancat que anomenem K . A més, considerarem dues matrius A i B en l'espai de matrius quadrades d'ordre n amb coeficients a K , el qual denotem per $M_n(K)$. Designem f com una funció polinòmica de dues variables i $\mathbf{0}$ quan fem referència a una matriu o vector nul.

Les imatges de la portada han estat extretes de la pàgina *MacTutor History of Mathematics*: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>.

1. Els inicis de la propietat L: la propietat P

Ferdinand Georg Frobenius (26 d'octubre del 1849 - 3 d'agost del 1917) va ser un matemàtic alemany destacat principalment en el camp de l'àlgebra. Se'l considera un dels principals contribuïdors al desenvolupament de la teoria de grups, arran de la combinació de diversos resultats de teoria de nombres, geometria i equacions algebraïques. A més, també va fer grans aportacions en equacions diferencials i en teoria de matrius. Una d'elles consisteix el desenvolupament de la propietat P [1], sobre la qual ens basarem en aquest apartat.

Definició 1.1. *Siguin A i B dues matrius amb arrels dels respectius polinomis característics λ_i i μ_i (amb possibles repeticions), per $i = 1, \dots, n$. Diem que A i B tenen la propietat P quan les arrels de la matriu $f(A, B)$ són de la forma $f(\lambda_i, \mu_i)$ per $i = 1, \dots, n$ amb l'ordre corresponent per cada λ_i i μ_i , independentment de la funció f .*

1.1. Les matrius que compleixen la propietat P

Frobenius demostra que unes de les matrius que compleixen aquesta propietat són aquelles que són commutatives entre si (Teorema 1.4). Per dur a terme la demostració d'aquest teorema, primer provarem dos lemes, enunciat en la publicació [1], relacionats amb les arrels del polinomi característic.

Abans d'iniciar la demostració d'aquests resultats, hem de recordar els següents conceptes bàsics que tindrem en compte al llarg de tot el treball (es pot trobar informació més detallada a l'apèndix A):

- Les arrels del polinomi característic de A i de $\hat{A} = P^{-1}AP$ són les mateixes, on el polinomi característic d'una matriu es defineix com a $p_A(x) = |xI - A|$.
- Els blocs de Jordan d'una matriu A associats a cadascuna de les diferents arrels del polinomi característic segons la seva multiplicitat es poden definir com $J_{m_i, \lambda_i} \in M_r(K)$, on $\lambda_i \in K$ per $i = 1, \dots, r$ són les arrels del polinomi característic d' A i m_r la seva multiplicitat. Definim així $J_A = \text{diag}(J_{m_1, \lambda_1}, \dots, J_{m_r, \lambda_r})$ com una forma de Jordan de la matriu A .
- Si J_A és una matriu de Jordan, aleshores $J_A^k = P^{-1}A^kP$.
- Si A i B són dues matrius commutatives, aleshores A i B són simultàniament triangularitzables ([10], teorema 2.3.3).

Tenint això en compte enunciem dos lemes essencials.

Lema 1.2. *Siguin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ la família de les arrels del polinomi característic d' A (amb repeticions), aleshores $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$ són les arrels del polinomi característic de $g(A)$, amb g una funció polinòmica d'una variable.*

Demostració: Existeix $J_A = P^{-1}AP$ on J_A és una matriu de Jordan associada a A . Aleshores el determinant d'aquesta matriu és $|J_A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ on λ_i són les arrels del polinomi característic d' A . A més, sigui $g(A) = a_r A^r + \dots + a_1 A + a_0$ amb $r \in \mathbb{N}$, sabent que $J_A^k = P^{-1}A^kP$, s'obté:

$$g(J_A) = a_r P^{-1}A^r P + \dots + a_1 P^{-1}AP + a_0 = P^{-1}(a_r A^r + \dots + a_1 A + a_0)P \Rightarrow g(J_A) = P^{-1}g(A)P.$$

A continuació, provarem que $|g(J_A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$ on $g(\lambda_i)$ són les arrels del polinomi característic de $g(A)$.

Notem que aplicar g a la matriu J_A és aplicar g en cadascun dels blocs de Jordan de J_A . En efectuar aquesta operació, obtenim que g transforma aquests blocs de Jordan J_{m_i, λ_i} en matrius de la forma $g(J_{m_i, \lambda_i}) = g(\lambda_i)I + N_i$ on I és la matriu identitat d'ordre corresponent i N_i una matriu triangular superior amb zeros en la diagonal. Així doncs, $g(J_A)$ és una matriu triangular superior amb els valors de $g(\lambda_i)$ en la diagonal i, per tant, $|g(J_A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$.

□

Lema 1.3. *Siguin A i B dues matrius commutatives amb λ_i i μ_i les arrels dels seus respectius polinomis característics comptant repeticions. Aleshores les arrels associades al polinomi característic de la matriu $\alpha A + \beta B$ són exactament $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ per un ordre adequat de λ_i i μ_i , independentment d' α i β .*

Demostració: Com que A i B són dues matrius commutatives sabem que A i B són simultàniament triangularitzables, és a dir, existeix P , una matriu invertible, tal que $T_A = P^{-1}AP$ i $T_B = P^{-1}BP$ són matrius triangulars superiors amb les arrels dels seus polinomis característics com els valors dels elements de les seves corresponents diagonals.

A més a més, a conseqüència de la commutativitat de A i B , $\alpha A + \beta B$ és una matriu que commuta amb A , ja que:

$$A(\alpha A + \beta B) = \alpha A^2 + \beta AB = \alpha A^2 + \beta BA = (\alpha A + \beta B)A.$$

De forma anàloga, $\alpha A + \beta B$ i B són dues matrius commutatives. Per tant, la matriu $T_{\alpha A + \beta B} = P^{-1}(\alpha A + \beta B)P$ també és una matriu triangular superior i la seva diagonal està formada per les arrels del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$.

Per altra banda, $T_{\alpha A + \beta B} = \alpha T_A + \beta T_B$ a causa de:

$$T_{\alpha A + \beta B} = P^{-1}(\alpha A + \beta B)P = \alpha P^{-1}AP + \beta P^{-1}BP = \alpha T_A + \beta T_B.$$

Tenim doncs, que els elements de la diagonal de $T_{\alpha A + \beta B}$ són de la forma $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ i aquest es corresponen amb les arrels del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$.

□

Una vegada enunciat aquests dos lemes, Frobenius demostra el següent:

Teorema 1.4. (Frobenius, [1]) *Qualsevol parell de matrius commutatives, A i B , compleixen la propietat P .*

Demostració: Seguint la demostració proposada per Frobenius, pel lema 1.3 determinem que les arrels del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$ són de la forma $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$. Així mateix, pel lema 1.2 les de la matriu A^m són λ_i^m i, de la mateixa manera, les de B^l corresponen a μ_i^l , per $m, l \in \mathbb{N}$.

A més, observem que les matrius A , B , A^m , B^l i $\alpha A + \beta B$ són commutatives dos a dos. Llavors utilitzant el lema 1.3, obtenim que les arrels del polinomi característic de la matriu $\alpha A + \beta B + uA^m + vB^l$ són $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i + u\lambda_i^m + v\mu_i^l$.

Per una altra banda, utilitzant el lema 1.2, es té que les del polinomi característic de $(\alpha A + \beta B)^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta^2 B^2$ corresponen a:

$$(\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)^2 = \alpha^2\lambda_i^2 + \alpha\beta\lambda_i\mu_i + \beta^2\mu_i^2$$

D'aquí deduïm que les arrels del polinomi característic de AB resulten ser $\lambda_i\mu_i$. Aquest raonament es pot aplicar sobre $(\alpha A + \beta B)^s$, per $s \in \mathbb{N}$, obtenint que les solucions quan s'igualen a zero el polinomi característic de $A^m B^l$ són $\lambda_i^m \mu_i^l$. A més a més, la matriu $A^m B^l$ és commutativa amb $\alpha A + \beta B$, aleshores utilitzant el lema 1.3, la forma les arrels del polinomi característic de la matriu $\gamma A^m B^l + \delta(\alpha A + \beta B)$ s'escriuen com $\gamma\lambda_i^m \mu_i^l + \delta(\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)$.

Per tant, qualsevol combinació polinòmica de les matrius A i B , anomenada $f(A, B)$ té com arrels del polinomi característic $f(\lambda_i, \mu_i)$.

□

Observació 1.5. Els lemes 1.2, 1.3 i el teorema 1.4 es poden aplicar per un nombre finit de matrius $A_1, \dots, A_s$ amb $s \in \mathbb{N}$.

1.2. Una condició menys restrictiva

Frobenius demana commutativitat per complir la propietat P . Ara bé, tot i ser suficient, no és necessària. Neal Henry McCoy (6 de març del 1905 - 5 de gener del 2001) un matemàtic americà conegut per les seves contribucions en l'àmbit de l'àlgebra, va generalitzar el resultat en qüestió l'any 1936 amb la publicació del seu article "*On the characteristic roots of matrix polynomials*" [5]. McCoy demostra que les matrius que es poden expressar en forma triangular superior simultàniament també satisfan aquesta propietat, ampliant significativament l'abast del teorema original. Aquesta condició menys restrictiva sobre les matrius que compleix la propietat P va permetre a Taussky i Motzkin poder dur a terme un estudi més elaborat de la propietat L .

McCoy en [5], l'article sobre el qual treballarem en aquest apartat, estudia com la triangulació simultània de dues matrius implica que aquestes tenen la propietat P per un nombre d'arrels del polinomi característic menor o igual que n . En aquest treball ens centrarem en el cas d'exactament n arrels del polinomi característic, a causa dels seus avantatges estructurals, el qual Taussky i Motzkin utilitzen per a l'estudi de la propietat L .

Definim $\mathcal{P}$ com l'àlgebra de polinomis en les matrius A i B , és a dir:

$$\mathcal{P} := \{f(A, B) \mid f \text{ és un polinomi en dues variables}\}.$$

Gràcies al treball d'Emmy Noether en representacions reductibles [2], sabem que per a un submòdul U d'un mòdul M sobre una àlgebra, amb M un mòdul de dimensió finita, existeix una sèrie de composició finita per U tal que:

$$U \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_k = 0,$$

on cadascun dels quocients U_{i-1}/U_i és un mòdul irreductible, és a dir, no admet cap submòdul no trivial. Fet que implica que les matrius que representen l'acció de l'àlgebra sobre el mòdul poden ser expressades en forma de matrius triangulars superiors per

blocs. Aquesta estructura és única llevat d'isomorfismes.

A partir d'aquí, McCoy aprofita aquesta representació adaptant-la per poder considerar el cas que tots els elements de $\mathcal{P}$ poden reduir-se simultàniament mitjançant un canvi de base adequat. Fet que és possible perquè tots els elements de $\mathcal{P}$ estan generats a partir de les mateixes matrius, és a dir, tenen la mateixa estructura de mòduls invariants. En aquest context, l'àlgebra $\mathcal{P}$ actua sobre l'espai vectorial K^n , el qual és de dimensió finita i s'interpreta com un mòdul respecte a $\mathcal{P}$, a més les descomposicions dels elements de l'àlgebra a matrius per blocs reflecteixen l'estructura de mòduls irreductibles descrita. Obtenint així que tots els elements de $\mathcal{P}$ es poden representar de la forma:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & \dots & \dots & R_{1l} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2l} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R_{kk} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

on cada bloc R_{ii} de la diagonal es correspon amb una representació irreductible determinada de l'àlgebra $\mathcal{P}$. Això és a causa del fet que els espais sobre els quals actuen els blocs de la diagonal corresponen als quocients U_{i-1}/U_i descrits per Noether, per tant, la forma (1) reflecteix la descomposició de submòduls invariants.

Destacant que, depenent de les matrius A i B , es pot donar el cas que (1) estigui formada per un únic bloc en la diagonal o que cadascun dels R_{ii} siguin d'ordre 1.

Teorema 1.6. *Si els blocs de la diagonal de la representació dels elements de l'àlgebra $\mathcal{P}$ són d'ordre 1, aleshores el parell de matrius (A, B) compleix la propietat P .*

Demostració: Si cada R_{ii} és d'ordre 1 i $A, B \in \mathcal{P}$, per definició de $\mathcal{P}$, es té que per una base adequada i, segons la notació utilitzada, les matrius A i B són simultàniament triangularitzables. En particular, existeixen dues matrius $T_A = S^{-1}AS$ i $T_B = S^{-1}BS$ triangulars superiors, amb S una matriu invertible. Els elements de la diagonal de les matrius T_A i T_B són les arrels del polinomi característic d'aquestes. Conseqüentment, també ho són de A i B , definides com a λ_i i μ_i , respectivament, per a $i = 1, \dots, n$. Per tant, si f és una funció polinòmica, la matriu $T_{f(A,B)} = S^{-1}f(A, B)S$ serà una matriu triangular superior amb els elements de la diagonal iguals a $f(\lambda_i, \mu_i)$. Com a resultat s'obté que les arrels del polinomi característic de $f(A, B)$ són $f(\lambda_i, \mu_i)$ per a $i = 1, \dots, n$,

amb un ordre adequat de λ_i i μ_i i independentment de la funció f . Demostrant així que el parell (A, B) té la propietat P .

□

2. La propietat L

Després que Olga Taussky trobés en la biblioteca de la Queen's University el resultat de McCoy, va adquirir un especial interès en les matrius, la qual cosa la va portar a desenvolupar diferents articles sobre aquestes. Destaca el seu article sobre la propietat L conjuntament amb Motzkin.

Theodore Samuel Motzkin (26 de març del 1908 - 15 de desembre del 1970) va ser un matemàtic alemany amb nacionalitat estatunidenca que va destacar pels seus treballs en programació lineal. Es va especialitzar en àlgebra, combinatòria, teoria de nombres i anàlisi numèrica, ressaltant les seves contribucions en la geometria algebraica i en l'estudi de matrius.

La propietat L sorgeix de voler establir una relació, més general que la propietat P , entre les arrels del polinomi característic de les combinacions lineals de matrius. Arran d'això, Taussky i Motzkin publiquen conjuntament dos articles utilitzant aquesta propietat com a eina fonamental. Taussky es destaca per la difusió i promoció d'aquesta propietat dins de la teoria de matrius, assumint voluntàriament el paper de “torchbearer” [8].

En el primer article [6], publicat l'any 1952, defineixen la propietat L i estudien algunes condicions en què aquesta implica diagonalització per blocs o commutativitat, així com estableixen una relació entre la propietat L i la propietat P . En aquest capítol del treball ens centrarem en aquesta publicació, utilitzant-la com a referència principal.

Definició 2.1. *Diem que el parell de matrius (A, B) amb arrels del polinomi característic λ_i i μ_i comptant repeticions, compleix la **propietat L** si, per tot α i β , $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ són totes les arrels del polinomi característic de la matriu de la forma $\alpha A + \beta B$ amb l'ordre adequat de les arrels λ_i i μ_i i independentment d' α i β .*

2.1. Resultats sobre la propietat L per a parells de matrius

Establerta la definició de la propietat L , estudiem quina connexió tenen algunes matrius que la satisfan amb la diagonalització i la commutativitat.

En el primer teorema, enunciat a continuació, descrivim la forma que pren la matriu B , en el cas que la matriu A sigui una matriu diagonalitzable.

Teorema 2.2. *Considerem el parell de matrius (A, B) que compleix la propietat L . Anomenem t el nombre d'arrels diferents del polinomi característic d' A , agrupades segons multiplicitat m_i amb $i = 1, \dots, t$. Prenem P una matriu d'ordre n invertible tal que $A' = P^{-1}AP$ és una forma de Jordan d' A , és a dir, $A' = J_A$. Supposem, a més, que A' és diagonal, de manera que A és una matriu diagonalitzable. Aleshores la matriu $B' = P^{-1}BP$ és de la forma:*

$$B' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \dots & B_{tt} \end{pmatrix}$$

on cada B_{ii} és una matriu $m_i \times m_i$, per $i = 1, \dots, t$, i compleix que:

$$|xI - B'| = \prod_{i=1}^t |xI - B_{ii}|. \quad (2)$$

A més, per tots els $j < k$ amb el parell (j, k) fora de B_{ii} per cada $i = 1, \dots, t$, es verifica que:

$$\sum b'_{jk} b'_{kj} = 0. \quad (3)$$

Demostració: Comencem provant la igualtat (2). Considerem $\lambda_1 = 0$, sense pèrdua de generalitat, ja que la propietat L no es veu afectada per una translació. Així podem escriure les matrius A' i B' com:

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{11} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} B_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

on A_{11} és una matriu d'ordre $(n - m_1) \times (n - m_1)$ invertible, ja que cap dels elements de la diagonal és 0, mentre que B_{11} és una matriu d'ordre $m_1 \times m_1$ i

$$C_{12} = \begin{pmatrix} B_{12} & \dots & B_{1t} \end{pmatrix}; \quad C_{21} = \begin{pmatrix} B_{21} \\ \vdots \\ B_{t1} \end{pmatrix}; \quad C_{22} = \begin{pmatrix} B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t2} & \dots & B_{tt} \end{pmatrix}.$$

Sabent que les arrels del polinomi característic d' A i A' i les de B i B' són les mateixes

i que $\lambda_1 = 0$ amb multiplicitat m_1 obtenim:

$$|xI - \alpha A' - \beta B'| = \prod_{i=1}^n (x - \alpha \lambda_i - \mu_i) = \prod_{i=1}^{m_1} (x - \mu_i^{(1)}) \prod_{i=m_1+1}^n (x - \alpha \lambda_i - \mu_i^C).$$

On denotem per $\mu_i^{(1)}$ les arrels del polinomi característic de la matriu B tals que $\alpha \lambda_1 + \beta \mu_i^{(1)}$ és arrel del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$ i per μ_i^C les altres arrels del polinomi característic de la matriu B . A partir d'aquí estudiem el coeficient de α^{n-m_1} de cadascun dels extrems d'aquesta darrera igualtat. De la part esquerra obtenim que els coeficients són $|xI - B_{11}||A_{11}|$, mentre que de la part dreta deduïm que els coeficients són $\prod_{i=1}^{m_1} (x - \mu_i^{(1)}) \prod_{i=m_1+1}^n \lambda_i$. Igualant aquests dos resultats i tenint en compte que $|A_{11}| \neq 0$, ja que A_{11} és una matriu invertible, es verifica:

$$|xI - B_{11}| = \prod_{i=1}^{m_1} (x - \mu_i^{(1)}).$$

Concloent així que $\mu_i^{(1)}$ són les arrels del polinomi característic de B_{11} . Repetim el procés de manera anàloga per cada B_{ii} , però considerant les matrius $A'^{(i)}$ i $B'^{(i)}$, a les quals s'han intercanviat la primera fila i columna amb la fila i columna i -èsima. D'aquesta manera podem repetir el procés considerant $\lambda_i = 0$, aconseguint:

$$A'^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{ii} \end{pmatrix} \quad B'^{(i)} = \begin{pmatrix} B_{ii} & C_{i2} \\ C_{2i} & C_{22}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Amb aquest raonament obtenim que:

$$|xI - B_{ii}| = \prod_{j=1}^{m_i} (x - \mu_j^{(i)}). \quad (4)$$

On es denota per $\mu_j^{(i)}$ les arrels del polinomi característic de B_{ii} per cada $i \in \{1, \dots, t\}$. Per altra banda, com que μ_i són les arrels del polinomi característic de B' , podem escriure'l de la següent forma:

$$|xI - B'| = \prod_{i=1}^n (x - \mu_i) = \prod_{i_1=1}^{m_1} (x - \mu_{i_1}^{(1)}) \prod_{i_2=1}^{m_2} (x - \mu_{i_2}^{(2)}) \cdots \prod_{i_t=1}^{m_t} (x - \mu_{i_t}^{(t)}).$$

Substituint aquests productes per l'equació (4), s'obté $|xI - B'| = |xI - B_{11}||xI - B_{22}| \dots |xI - B_{tt}|$, verificant així l'equació (2).

Per a la demostració de l'equació (3), considerem primer el cas $n = 4$. Prenem, doncs, la matriu:

$$B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} & b'_{14} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} & b'_{24} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} & b'_{34} \\ b'_{41} & b'_{42} & b'_{43} & b'_{44} \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad B' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Utilitzant l'equació (2), calculem el coeficient del terme x^2 a cada costat de la igualtat. De la part esquerra de la igualtat obtenim que el coeficient de x^2 és $b'_{11}b'_{22} - b'_{12}b'_{21} + b'_{33}b'_{44} - b'_{34}b'_{43} + b'_{22}b'_{44} + b'_{22}b'_{33} + b'_{11}b'_{33} + b'_{11}b'_{44} - b'_{13}b'_{31} - b'_{41}b'_{14} - b'_{23}b'_{32} - b'_{24}b'_{42}$, mentre que de la part dreta de la igualtat obtenim que el coeficient de x^2 és $b'_{11}b'_{22} - b'_{12}b'_{21} + b'_{33}b'_{44} - b'_{34}b'_{43} + b'_{22}b'_{44} + b'_{22}b'_{33} + b'_{11}b'_{33} + b'_{11}b'_{44}$ demostrant així que $b'_{13}b'_{31} + b'_{41}b'_{14} + b'_{23}b'_{32} + b'_{24}b'_{42} = 0$, tal com indica l'equació (3).

Aquest procediment es pot reiterar de manera similar per una n qualsevol, estudiant els coeficients de x^{n-2} . Els elements de la part dreta de la igualtat seran la suma dels determinants de B_{ii} més la multiplicació dels termes de la diagonal de B_{ii} amb els termes de la diagonal de B_{jj} , per $j \neq i$. Mentre que els elements de la part esquerra seran la suma de tots els menors d'ordre 2. Quan s'igualen aquests dos coeficients, es verifica l'equació (3). □

Aquest teorema no es pot aplicar en un parell de matrius que compleix la propietat L i la matriu A no és diagonalitzable. En el nostre cas, oferim un exemple més simplificat respecte a l'article [6] que permet facilitar la comprensió, proporcionant així una de les contribucions originals d'aquest treball.

Exemple 2.3. *Considerem les matrius:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les arrels dels seus polinomis característics són 0, 1 i 1, -1, 0 respectivament. Observem que aquest parell de matrius compleix la propietat L , ja que la matriu $\alpha A + \beta B$ té com a arrels del polinomi característic $\beta = 0\alpha + 1\beta$, $-\beta = 0\alpha - 1\beta$ i $\alpha = 1\alpha + 0\beta$. Aquest fet

es pot comprovar quan se substitueixen els valors adequats de λ_i i μ_i en el determinant:

$$|\lambda_i\alpha + \mu_i\beta - \alpha A - \beta B| = \begin{vmatrix} \lambda_i\alpha + \mu_i\beta & -\alpha & 0 \\ 0 & \lambda_i\alpha + \mu_i\beta & -\beta \\ \beta & -\beta & \lambda_i\alpha + \mu_i\beta - \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Arribant així a $|0\alpha+1\beta-\alpha A-\beta B| = 0$, $|0\alpha-1\beta-\alpha A-\beta B| = 0$ i $|1\alpha+0\beta-\alpha A-\beta B| = 0$ i comprovant que el parell de matrius (A, B) compleix la propietat L , per un ordre adient de λ_i i μ_i . Per altra banda, observem que tot i tenir la propietat L , la matriu A no és diagonalitzable, ja que aquesta ja es troba expressada en forma de Jordan, per tant, no es verifica el teorema 2.2. Es pot comprovar això veient que no se satisfà l'equació (2), per una banda:

$$|xI - B| = x^3 - x.$$

Per l'altre banda, considerant

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = (0),$$

s'obté que $|xI - B_{11}| = x^2$ i $|xI - B_{22}| = x$, és a dir, $|xI - B_{11}||xI - B_{22}| = x^2x = x^3$. Per tant, $|xI - B| \neq |xI - B_{11}||xI - B_{22}|$.

Tampoc es compleix l'equació (3), perquè en el nostre cas, el sumatori és $-1 \times 0 + 1 \times 1 = 1 \neq 0$.

El segon teorema que estudiarem es dona una propietat que respecten els parells de matrius que tenen la propietat L i que són hermitianes. En aquest cas treballem amb dues matrius $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Per enunciar-lo recordem primer unes definicions i teoremes essencials [10].

Definició 2.4. Una matriu quadrada A es denomina matriu hermitiana si $A^* = A$, on la matriu A^* és definida per $A^* = \bar{A}^T$. Més concretament, per cada (i, j) es té $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Definició 2.5. Una matriu P d'ordre n es denomina unitària si $P^*P = I$.

Teorema 2.6. (Teorema espectral per a matrius hermitianes [12]) Les matrius hermitianes compleixen:

a) Totes les arrels del polinomi característic són reals.

- b) Cadascun dels vectors associats a diferents arrels del polinomi característic són ortogonals.
- c) Existeix una base ortogonal a tot l'espai formada pels diferents vectors associats a les arrels del polinomi característic de la matriu.

Aquest darrer teorema ens diu que totes les matrius hermitianes són diagonalitzables, en altres paraules, ens permet afirmar que existeix una matriu P unitària tal que $P^{-1}AP$ és diagonal. A partir d'aquí, enunciem el segon teorema que donen Taussky i Motzkin.

Teorema 2.7. *Si el parell de matrius (A, B) està format per dues matrius hermitianes que tenen la propietat L , llavors A i B commuten, és a dir, $AB = BA$.*

Demostració: Per demostrar aquest teorema utilitzarem el teorema 2.6. Considerant P una matriu unitària, es deriva que $A' = P^{-1}AP$ és una matriu diagonal. A més a més, A' és una matriu hermitiana també, a causa del fet que $(A')^* = (P^{-1}AP)^* = P^*A^*(P^{-1})^* = P^{-1}AP = A'$ i, de forma equivalent podem assegurar que $B' = P^{-1}BP$ és una matriu hermitiana.

Adicionalment, notem que ens trobem en el cas del teorema 2.2, aplicant l'equació (3) ens implica que $B_{ik} = 0$ per cada $i \neq k$. Això es deriva del fet que en ser B' una matriu hermitiana, per definició $b'_{ik} = \bar{b'_{ki}}$, és a dir, b'_{ik} i b'_{ki} són conjugats l'un de l'altre. Així s'obté que $b'_{ik}b'_{ki} \geq 0$, però segons l'equació (3), es té $\sum b'_{ik}b'_{ki} = 0$ el que ens indica que $b'_{ik}b'_{ki} = 0$ i, per tant, $b'_{ik} = 0$ i $b'_{ki} = 0$.

En conseqüència, B' és una matriu diagonal per blocs, els quals són d'ordre 1 per la diagonalització d' A' . Com a resultat, B' és una matriu diagonal, fet que ens permet afirmar que A' i B' commuten i, per tant, A i B també commuten.

□

2.2. Relació entre la propietat L i la propietat P

En la resta de la secció estudiem quina és la relació entre la propietat P i la propietat L .

2.2.1. Connexions inicials entre cinc propietats

Comencem establint un vincle entre les propietats L i P per matrius d'ordre 2.

Teorema 2.8. *Siguin A i B dues matrius d'ordre 2 que compleixen la propietat L , aleshores aquestes satisfan la propietat P .*

Demostració: Per a la demostració d'aquest teorema es consideren tres casos diferents segons la forma de la matriu A .

Per al primer cas, considerem A una matriu escalar, és a dir, considerem A una matriu tal que $A = aI$ on I és la matriu identitat d'ordre 2 i a és un escalar qualsevol. S'obté que $AB = BA$, ja que $AB = aIB = aBI = BaI = BA$ i, com que A i B són commutatives, es compleix la propietat P segons el teorema 1.4.

Per al segon cas suposem que A és una matriu amb dues arrels del polinomi característic simples. A' és, doncs, una matriu diagonal, a més com que A i B compleixen la propietat L , pel teorema 2.2, B' també és diagonal. En conseqüent, $A'B' = B'A'$ fet que implica que $AB = BA$. Així doncs, pel teorema 1.4, obtenim que A i B compleixen la propietat P .

Finalment, considerem el cas que A és una matriu amb una única arrel del polinomi característic la qual té multiplicitat doble. En aquest cas considerem que A' i B' tenen la forma següent:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad i \quad B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Utilitzant que A i B tenen la propietat L , $|\alpha A' + \beta B' - \alpha \lambda I - \beta \mu_i I| = \beta^2[(b_{11} - \mu_i)(b_{22} - \mu_i) - b_{12}b_{21}] - \alpha\beta b_{21} = 0$, però $(b_{11} - \mu_i)(b_{22} - \mu_i) - b_{12}b_{21} = |B' - \mu_i I| = 0$, pel fet que μ_i és una arrel del polinomi característic de B' . Com que això es compleix per tot α i β , obtenim que $b_{21}=0$. Com a conseqüència, es té que A' i B' són dues matrius triangular superiors, és a dir, existeix una matriu P invertible per a la qual A i B són simultàniament triangularitzables. Aleshores, pel teorema 1.6, les matrius A i B tenen la propietat P .

□

Tot i que és immediat veure que el recíproc d'aquest teorema no és cert, tal com fan Taussky i Motzkin a l'article [6], és interessant generalitzar aquest estudi en el cas de les matrius d'ordre n , centrant-nos en la relació entre les següents cinc propietats fonamentals:

1. A i B són commutatives.
2. A i B són quasi-commutatives, és a dir, $AB - BA = C$ on C és una matriu commutativa amb A i amb B [3].

3. A i B compleixen la propietat P .
4. A i B compleixen la propietat L .
5. A i B són 1-lineals, és a dir, almenys una de les arrels del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$ per qualsevol α i β és de la forma $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ per un valor fix de i .

Teorema 2.9. *Les cinc propietats mencionades es troben relacionades entre si jeràrquicament, de manera que:*

$$\text{Propietat 1} \Rightarrow \text{Propietat 2} \Rightarrow \text{Propietat 3} \Rightarrow \text{Propietat 4} \Rightarrow \text{Propietat 5}.$$

Abans de demostrar aquest teorema enunciem els següents resultats:

Teorema 2.10. *([Drazin, Dungey, Greunberg, 1951], ([9], secció 40.4)). Dues matrius A i B són simultàniament triangularitzables si i només si la matriu $p(A, B)(AB - BA)$ és nilpotent per a cada polinomi de dues variables $p(x, y)$ amb x, y indeterminades no commutatives.*

Lema 2.11. *([Jacobson, 1935], ([4], lema 2)) Siguin A i B dues matrius tals que $AB - BA = C$ on C commuta amb A o amb B aleshores C és nilpotent.*

Demostració: Sense pèrdua de generalitat suposem que C commuta amb B . Considerem l'aplicació lineal $D(X) = AX - XA$, que compleix les propietats formals d'una derivada, ja que és lineal i,

$$D(XY) = AXY - XYA = (D(X) + XA)Y - X(AY - D(Y)) = D(X)Y - XD(Y).$$

Observem que $D(B) = AB - BA = C$. A més, existeix un polinomi p mònic no nul tal que $p(B) = \mathbf{0}$, com per exemple el polinomi característic o el polinomi mínim de B . A partir d'aquest punt considerem aquest polinomi.

Per una banda, gràcies a la commutativitat de B amb C , aplicant la regla de la cadena obtenim que $D(p(B)) = p'(B)D(B) = p'(B)C$. Per l'altra banda, $D(p(B)) = Ap(B) - p(B)A = \mathbf{0}$. Per tant, es té $p'(B)C = \mathbf{0}$.

Calculant $D(D(p(B))) = D^{(2)}(p(B))$, s'obté $D^{(2)}(p(B)) = p''(B)C^2 + p'(B)D(C) = \mathbf{0}$. Aleshores multipliquem aquesta igualtat per C a l'esquerra i, gràcies a la commutativitat de C amb B , arribem a que:

$$p''(B)C^3 + p'(B)CD(C) = \mathbf{0} \implies p''(B)C^3 = \mathbf{0}.$$

Calculem $D^{(3)}(p(B))$, obtenint:

$$D^{(3)}(p(B)) = p'''(B)C^3 + 3p''(B)CD(C) + p'(B)D^{(2)}(C) = \mathbf{0}.$$

Multiplicant aquesta igualtat per C^2 a l'esquerra:

$$p'''(B)C^5 + 3p''(B)C^3D(C) + p'(B)C^2D^{(2)}(B) = \mathbf{0} \implies p'''(B)C^5 = \mathbf{0}$$

Iterant aquest procés, la derivada $D^{(h)}$ es multiplica per C^{h-1} assolint així que $p^{(h)}(B)C^{2h-1} = \mathbf{0}$. A més, si suposem que el polinomi $p(B)$ és de grau $r \in \mathbb{N}$, llavors $p^{(r)} = r!$, és a dir, $p^{(r)}(B)C^{2r-1} = r!C^{2r-1} = \mathbf{0}$. Per tant, $C^{2r-1} = \mathbf{0}$, demostrant que C és nilpotent.

□

Ara ja podem demostrar el teorema 2.9:

Demostració del teorema 2.9: Demostrem cadascuna de les implicacions de la cadena per separat.

- La propietat 1 implica la propietat 2:

Suposem que les matrius A i B són commutatives, aleshores $AB - BA = \mathbf{0}$. A més, $\mathbf{0}$ commuta amb A i B , per tant, A i B són quasi-commutatives.

- La propietat 2 implica la propietat 3:

En aquest cas si demostrarem que A i B són dues matrius simultàniament triangularitzables, aleshores pel teorema 1.6 compleixen la propietat P . Separem en dos casos diferents:

- a) Si A i B són commutatives, pel teorema 1.4 tenen la propietat P .
- b) Si A i B no són commutatives, però sí que són quasi-commutatives.

Utilitzant el lema 2.11, per definició de quasi-commutativitat, A i B commuten amb $AB - BA$ obtenint així que $AB - BA$ és nilpotent.

A més, si C és una matriu nilpotent, és a dir, $C^k = \mathbf{0}$ per un cert $k > 0$ i $CD = DC$, aleshores CD és nilpotent, ja que $(CD)^k = C^k D^k = \mathbf{0} \times D^k = \mathbf{0}$. Per tant, com que $p(A, B)$ i $AB - BA$ commuten entre elles per la commutativitat de A i B amb $AB - BA$, s'obté que $p(A, B)(AB - BA)$ és nilpotent amb $p(x, y)$ un polinomi de dues variables. Conseqüentment, pel teorema 2.10, obtenim que A i B són simultàniament triangularitzables.

- La propietat 3 implica la propietat 4:

Suposem que el parell de matrius (A, B) té la propietat P , és a dir, $f(A, B)$ té com a arrels del polinomi característic $f(\lambda_i, \mu_i)$. Considerem $f(A, B) = \alpha A + \beta B$, aleshores, per un ordre adequat de λ_i i μ_i , les seves arrels del polinomi característic són $f(\lambda_i, \mu_i) = \alpha\lambda_i + \beta\mu_i$, independentment d' α i β . D'aquesta forma es comprova que A i B satisfan la propietat L .

- La propietat 4 implica la propietat 5:

Suposem que A i B compleixen la propietat L , és a dir, les arrels del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$ són de la forma $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$, per un ordre adequat de λ_i i μ_i . Per tant, per definició es veu que A i B són 1-lineals.

□

2.2.2. Límits en l'equivalència de les cinc propietats

Cal destacar que les implicacions recíproques no són, en general, certes. Estudiem diferents casos segons el tipus de matrius.

Cas de matrius generals d'ordre 2:

Teorema 2.12. *Si dues matrius tenen ordre 2, aleshores la propietat 4 implica la propietat 3, però, generalment, no impliquen la propietat 2 ni la 1.*

Si se satisfà la propietat 4, pel teorema 2.8, sabem que també ho farà la propietat 3. Tanmateix, que compleixin aquesta no implica que ho faci també la propietat 2. Per il·lustrar aquest fet proporcionem el següent exemple original:

Exemple 2.13. *Considerem les matrius*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les arrels del polinomi característic d' A són $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$ i la de B és $\mu = 1$ amb multiplicitat 2. Mentre que les arrels del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$ són de la forma $\alpha\lambda_1 + \beta\mu = 3\alpha + \beta$ i $\alpha\lambda_2 + \beta\mu = 2\alpha + \beta$, com es pot comprovar:

$$|\alpha A + \beta B - (3\alpha + \beta)I| = 0 \quad i \quad |\alpha A + \beta B - (2\alpha + \beta)I| = 0.$$

Per tant, podem afirmar que el parell de matrius (A, B) té la propietat L , és a dir, compleix la propietat 2. A més, com que l'ordre de les matrius és 2, també se satisfà la propietat 3.

Ara bé, notem que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

però,

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad CA = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Això ens indica que $AC \neq CA$ i, per tant, el parell de matrius (A, B) no és quasi-commutatiu, és a dir, no obeeix la propietat 2. Addicionalment, $AB \neq BA$, de manera que tampoc respecta la propietat 1.

Cas de matrius generals d'ordre 3:

Teorema 2.14. Quan A i B són dues matrius d'ordre 3, en general, cap de les 5 propietats són equivalents.

Estudiem la demostració d'aquest teorema mitjançant contraexemples. Comencem analitzant el cas que dues matrius A i B tenen la propietat 2, però no la propietat 1, per a fer-ho proporcionem un contraexemple original.

Exemple 2.15. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En aquest cas

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On $AC = \mathbf{0} = CA$ i $BC = \mathbf{0} = CB$. Per tant, les matrius A i B són quasi-commutatives complint així la propietat 2, però com que $AB \neq BA$ no són commutatives, no respecten la propietat 1.

Seguidament, presentem un altre exemple original per demostrar que la propietat 3 no implica la propietat 2.

Exemple 2.16. *Siguin les matrius:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dues matrius triangularitzables sobre la mateixa base, en concret, sobre la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Pel teorema 1.6, tenen la propietat P, és a dir, compleixen la propietat 3. Ara bé, no són quasi-commutatives, ja que $AC \neq CA$ i $BC \neq CB$ on:

$$C = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, no satisfan la propietat 2.

A continuació, donem un contraexemple per demostrar que la propietat 4 no implica la propietat 3.

Exemple 2.17. *Considerem les matrius de l'exemple 2.3. Tal com hem vist, aquestes tenen la propietat L, és a dir, compleixen la propietat 4. Aquest parell de matrius, però, no respecta la propietat P, fet que podem observar si analitzem la funció $f(A, B) = AB$. Tenim que:*

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les arrels del polinomi característic d' AB són $0, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ i $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, que no són de la forma $f(\lambda_i, \mu_i) = \lambda_i \mu_i$ amb λ_i les arrels del polinomi característic d' A , és a dir, 0 i 1, i, μ_i les arrels del polinomi característic de B , és a dir, 0, 1 i -1 . Conseqüentment, deduïm que no satisfan la propietat 3.

Finalment, proposem un exemple més senzill (sense paràmetres) que el proporcionat en el document [6] de Taussky i Motzkin, en el qual les matrius A i B són 1-lineals, en altres paraules, compleixen la propietat 5, però no la propietat 4.

Exemple 2.18. *Siguin les matrius*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les arrels del polinomi característic de la matriu A és 1 amb multiplicitat 3, i les del de la matriu B són 1, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$. La matriu $\alpha A + \beta B$ té com una de les seves arrels del polinomi característic $1\alpha + 1\beta = \alpha + \beta$, però no $\alpha + \sqrt{2}\beta$ ni $\alpha - \sqrt{2}\beta$. La qual cosa es pot comprovar amb $|\alpha A + \beta B - (\alpha + \beta)I| = 0$, $|\alpha A + \beta B - (\alpha + \sqrt{2}\beta)I| = (1 - \sqrt{2})\beta^3$ i $|\alpha A + \beta B - (\alpha - \sqrt{2}\beta)I| = (1 + \sqrt{2})\beta^3$. Concloem així, que A i B no tenen la propietat L , és a dir, no compleixen la propietat 4, tot i satisfer la propietat 5.

Cas de matrius hermitianes d'ordre n :

Existeix un cas particular on un parell de matrius d'ordre n amb la propietat 4 implica les propietats anteriors: aquest és el cas de les matrius hermitianes.

Teorema 2.19. *Si A i B són dues matrius hermitianes que compleixen la propietat 4, aleshores A i B presenten la propietat 1 i, conseqüentment, les propietats 2 i 3.*

Demostració: La demostració d'aquest teorema sorgeix a partir del teorema 2.7. Gràcies a aquest, si suposem que el parell de matrius hermitianes (A, B) compleix la propietat 4, es pot afirmar que aquest parell de matrius és commutatiu entre si, és a dir, també disposa de la propietat 1. Per tant, per el teorema 2.9 té també les propietats 2 i 3.

□

En acabar el primer article, Taussky i Motzkin, en publiquen un altre l'any 1955 anomenat “*Pairs of Matrices With Property L. II*” [7]. En aquest segon, aprofundeixen en la descripció de parells de matrius amb la propietat L , introdueixen el que anomenen propietat D i estudien la relació entre les matrius diagonals, les commutatives i els llaips de matrius. En el nostre cas, no aprofundirem en aquest, ens centrarem a analitzar una de les aplicacions de la propietat L , en particular, la connexió que trobem entre la propietat L i les matrius exponencials.

3. Aplicacions de la propietat L en l'estudi de matrius exponencials

El coneixement i l'ús de la propietat L ha anat creixent al llarg dels anys, així com les seves aplicacions en la teoria d'operadors, ja que Irving Kaplansky va generalitzar-hi la propietat L . També resultats originalment obtinguts mitjançant la propietat L per Motzkin i Taussky, s'han demostrat novament utilitzant teoria de pertorbacions, per Tosio Kato, o han estat generalitzats per Shmuel Friedland [8].

Una contribució recent que afavoreix al desenvolupament de la propietat L es troba en l'estudi de les matrius exponencials, en concret en l'article “*On commuting Matrices and Exponentials*” [11] publicat per Clément de Segunis Pazzis l'any 2013. Aquest dona una visió més àmplia del coneixement sobre la propietat L , observant com dues matrius A i B tals que, per tot $\alpha \in \mathbb{N}$, es compleix que $e^{\alpha A+B} = e^{\alpha A}e^B = e^Be^{\alpha A}$, satisfan la propietat L . En aquest capítol abordarem aquesta relació que s'estableix entre les matrius exponencials i la propietat L .

A partir d'aquest instant, el cos sobre el qual treballarem serà $\mathbb{C}$. A més, aquest capítol utilitza la referència [11] com a font principal, estudiant els diversos resultats que s'hi presenten.

3.1. Resultats previs

Per tal d'introduir el vincle principal entre les matrius exponencials i la propietat L , exposem primer una reformulació de la propietat L , juntament amb una sèrie de resultats que cal destacar.

Definició 3.1. (Reformulació de la propietat L de Motzkin-Taussky, [11])

Diem que el parell de matrius (A, B) té la propietat L si i només si existeixen funcions afins $f_1, \dots, f_n$ amb $f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tals que les arrels del polinomi característic comptant repeticions de $A + zB$, per tot $z \in \mathbb{C}$, són de la forma $f_i(z)$ per $i \in \{1, \dots, n\}$.

A partir d'aquest instant, excepte que s'especifiqui el contrari, considerarem les funcions $f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. A més, per als resultats posteriors hem de tenir en compte les següents definicions:

Definició 3.2. *Siguin A i B dues matrius d'ordre n :*

- *Un llapis de matrius és una família de matrius $A + zB$ amb $z \in \mathbb{C}$ un paràmetre.*
- *Un punt excepcional $z_0 \in \mathbb{C}$ és un valor per al qual la matriu $A + z_0B$ té menys arrels del polinomi característic que la majoria de les matrius de la família $A + zB$.*

A partir d'aquí enunciem uns resultats que ens ajudaran a demostrar la relació entre les matrius exponencials i la propietat L .

Teorema 3.3. *(Refinació del teorema de Motzkin-Taussky, ([11], teorema 6))*
Sigui (A, B) un parell de matrius que satisfà la propietat L . Suposem que B és diagonalitzable i que $A + z_0B$ és diagonalitzable en cada punt excepcional del llapis de matrius $A + zB$. Aleshores es compleix que A i B són commutatives.

A continuació provarem la següent proposició:

Proposició 3.4. *Si les arrels del polinomi característic de la matriu $\alpha A + B$ pertanyen a $\mathbb{Z}$, per tot $\alpha \in \mathbb{N}$, llavors el parell de matrius (A, B) té la propietat L .*

Abans de fer la prova és necessari establir primer com són els polinomis característics definits a partir de les sèries de Puiseux, una generalització de les sèries de potències:

Proposició 3.5. *[11] El polinomi característic de la matriu $A + zB$ en un entorn de zero es pot descriure mitjançant sèries de Puiseux com:*

$$\prod_{j=1}^q \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_{d_j}(z)} (x - f_j(\zeta)).$$

Per un radi $r > 0$, un enter $q \in \{1, \dots, n\}$, i enters positius $d_1, \dots, d_q$ tals que $n = d_1 + \dots + d_q$ i per funcions analítiques $f_1, \dots, f_q$ definides en un entorn del zero les quals són expressades per les arrels del polinomi característic. On $\mathbb{U}_{d_j}(z)$ és el conjunt de les d_j -èsimes arrels de z , és a dir, són aquells valors tals que $\zeta^{d_j} = z$.

Així com un lema que proporcionem per facilitar la demostració:

Lema 3.6. *Siguin $p(z)$ i $q(z)$ dos polinomis amb $z \in \mathbb{C}$ tals que $p(z) = q(z)$ en un entorn del zero, aleshores $p(z) = q(z)$ per tot $z \in \mathbb{C}$.*

Demostració: Definim $\phi(z) = p(z) - q(z)$ una funció polinòmica per tot $z \in \mathbb{C}$. Per hipòtesi $p(z) = q(z)$ en un entorn del zero, obtenint així que en aquest entorn $\phi(z) = 0$,

és a dir, hi ha infinits punts on $\phi(z) = 0$. Un polinomi no nul només té un nombre finit de zeros, per tant, d'aquí deduïm que $\phi(z) = 0$ per tot $z \in \mathbb{C}$. Tenim així que $p(z) = q(z)$ per tot $z \in \mathbb{C}$.

□

Demostració de la proposició 3.4: Per demostrar aquesta proposició es prova que les funcions $f_1, \dots, f_q$ de les sèries de Puiseux són funcions polinòmiques.

Per a fer-ho, sense pèrdua de generalitat, considerem la funció f_1 i la seva expansió en sèrie de potències $f_1(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$ amb $a_j \in \mathbb{C}$. Sigui $\alpha_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $1/\alpha_0 < r$ amb $r > 0$. Considerem $z = \alpha^{-1}$ per $\alpha \geq \alpha_0$, aleshores $\zeta = \sqrt[d_1]{\alpha^{-1}} = \alpha^{-1/d_1}$ i, en conseqüència, $f_1(\alpha^{-1/d_1})$ és arrel del polinomi característic de $A + \alpha^{-1}B$. Per tant, $\alpha f_1(\alpha^{-1/d_1})$ és arrel del polinomi característic de $\alpha A + B$ i per hipòtesi és un enter. De la mateixa manera, $(\alpha + 1)f_1((\alpha + 1)^{-1/d_1})$ és un enter, ja que és una arrel del polinomi característic de la matriu $(\alpha + 1)A + B$.

Conseqüentment, s'obté:

$$(\alpha + 1)f_1((\alpha + 1)^{-1/d_1}) - \alpha f_1(\alpha^{-1/d_1}) \in \mathbb{Z}.$$

A més, a l'aplicar la sèrie de potències es verifica:

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)f_1((\alpha + 1)^{-1/d_1}) - \alpha f_1(\alpha^{-1/d_1}) &= (\alpha + 1) \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (\alpha + 1)^{-j/d_1} - \alpha \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \alpha^{-j/d_1} \\ &= a_0 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0, d_1\}} a_j ((\alpha + 1)^{1-j/d_1} - \alpha^{1-j/d_1}) \end{aligned}$$

Suposem que existeix un $s \in \mathbb{N} \setminus \{0, d_1\}$ tal que $a_s \neq 0$ i amb tots termes anteriors a aquest nuls. Veurem com aquest fet no és possible arribant a una contradicció.

Per un costat, per cada enter $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, d_1\}$ es té:

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)^{1-j/d_1} - \alpha^{1-j/d_1} &= \alpha^{1-j/d_1} \left(\left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{1-j/d_1} - 1 \right) \\ &\underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{1-j/d_1} \frac{1-j/d_1}{\alpha} = \left(1 - \frac{j}{d_1} \right) \alpha^{-j/d_1}. \end{aligned}$$

Fet que ve donat a partir de la fórmula de Taylor $(1 + \frac{1}{x})^r - 1 \sim r \cdot \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per l'altre costat, observem que tots els termes posteriors a $j = s$ són asimptòticament menyspreables. A causa de considerar $j > s$, obtenim $-s/d_1 > -j/d_1$, és a dir, $\alpha^{1-s/d_1} > \alpha^{1-j/d_1}$ tenint en compte que $\alpha \geq \alpha_0$, de la mateixa manera, $(1 + \alpha)^{1-s/d_1} >$

$(1 + \alpha)^{1-j/d_1}$. Com que estem realitzant la suma polinòmica amb $1 - s/d_1$ el grau més gran, la sèrie actua asimptòticament com el terme d'aquest grau, és a dir:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0, d_1\}} a_j ((\alpha + 1)^{1-j/d_1} - \alpha^{1-j/d_1}) &\underset{\alpha \rightarrow \infty}{\sim} a_s ((\alpha + 1)^{1-s/d_1} - \alpha^{1-s/d_1}) \\ &\underset{\alpha \rightarrow \infty}{\sim} a_s \left(1 - \frac{s}{d_1}\right) \alpha^{-s/d_1} \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

Per tant, $\{(\alpha + 1)f_1((\alpha + 1)^{-1/d_1}) - \alpha f_1(\alpha^{-1/d_1}) - a_0\}_{\alpha \geq \alpha_0}$ és una successió amb els seus termes en $\mathbb{Z}$ i convergent a 0, però no nul·la, fet que ens porta a una contradicció. En conseqüència, obtenim que per tot $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, d_1\}$ es té que $a_j = 0$. Així, $f_1(z) = a_0 + a_{d_1} z^{d_1}$. Aquest procediment es pot aplicar per cada f_k amb $k \in \{1, \dots, q\}$. Llavors, podem afirmar que existeix un $b_k \in \mathbb{C}$ tal que $f_k(z) = f_k(0) + b_k z^{d_k}$ en un entorn de zero.

Així mateix, utilitzant la proposició 3.5 i considerant que, per tot $\zeta \in \mathbb{U}_{d_k}$, es té $\zeta^{d_k} = z$, és a dir, en cada $\mathbb{U}_{d_k}$ es troben d_k elements tals que $f_k(\zeta) = f_k(0) + b_k \zeta^{d_k} = f_k(0) + b_k z$. Podem concloure que el polinomi característic de $A + zB$ en un entorn de zero és igual a:

$$\prod_{j=1}^q \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_{d_j}(z)} (x - f_j(\zeta)) = \prod_{j=1}^q (x - f_j(0) - b_j z)^{d_j}.$$

Pel lema 3.6, es pot estendre això a tot $\mathbb{C}$ obtenint que existeixen funcions afins $g_1, \dots, g_n$ amb $g_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ per tot $i \in \{1, \dots, n\}$ tals que $g_i = f_i(0) + b_i z$ i, aquestes són les arrels del polinomi característic de $A + zB$ per tot $z \in \mathbb{C}$.

Resultant així, per la definició 3.1, que les matrius A i B tenen la propietat L .

□

Un altre resultat important a considerar durant aquesta secció és:

Proposició 3.7. *Les solucions de l'equació $e^X = I$ són les matrius diagonalitzables X tals que les arrels del seu polinomi característic pertanyen a $2\pi i\mathbb{Z}$.*

Demostració: Suposem primer que es compleix l'equació $e^X = I$. Observem que aleshores $e^{J_X} = I$ amb J_X una forma de Jordan de la matriu X . A més, pel lema 1.2, si λ_i és una arrel del polinomi característic de la matriu X per $i \in \{1, \dots, n\}$, llavors e^{λ_i} és una arrel del polinomi característic de la matriu e^X . Com que $e^X = I$, les arrels del polinomi característic de e^X són $e^{\lambda_i} = 1$, obtenint així que $\lambda_i \in 2\pi i\mathbb{Z}$, per tant, les arrels del polinomi característic de e^X pertanyen a $2\pi i\mathbb{Z}$.

Utilitzant reducció a l'absurd, suposem que X no és una matriu diagonalitzable, com

a conseqüència, existeix com a mínim un bloc de Jordan tal que $J_{m_j, \lambda_j} = \lambda_j I + N$ per algun $j \in \{1, \dots, t\}$ on t representa el nombre d'arrels diferents del polinomi característic de X , m_j la multiplicitat de λ_j i $N \neq \mathbf{0}$ una matriu nilpotent amb zeros a la diagonal. A més, observem que $e^{J_X} = \text{diag}(e^{J_{m_1, \lambda_1}}, \dots, e^{J_{m_t, \lambda_t}}) = I$ si i només si per cada $i \in \{1, \dots, t\}$ es té que $e^{J_{m_i, \lambda_i}} = I$. Aleshores, com que $\lambda_j \in 2\pi i\mathbb{Z}$,

$$e^{J_{m_j, \lambda_j}} = e^{\lambda_j I + N} = e^{\lambda_j I} e^N = e^N \neq I.$$

És a dir, $e^{J_X} \neq I$, el que és una contradicció, per tant, X és una matriu diagonalitzable. La implicació recíproca també es compleix si suposem que X és una matriu diagonalitzable amb arrels del polinomi característic a $2\pi i\mathbb{Z}$. Ja que $X = P J_X P^{-1}$ on J_X és una forma de Jordan de la matriu X i $e^{J_X} = I$. Pel que,

$$e^X = e^{P J_X P^{-1}} = P e^{J_X} P^{-1} = P I P^{-1} = I.$$

□

A partir de les proposicions anunciades anteriorment podem demostrar el següent lema donat a [11]:

Lema 3.8. *Siguin A i B dues matrius tals que $e^{\alpha A + \beta B} = I$ per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Aleshores A i B són commutatives.*

Demostració: Definim les matrius $A' = \frac{1}{2\pi i} A$ i $B' = \frac{1}{2\pi i} B$. Per la proposició 3.7, la matriu $\alpha A + \beta B$ és diagonalitzable, per tant, considerem la següent matriu:

$$\alpha A' + \beta B' = \alpha \left(\frac{1}{2\pi i} A \right) + \beta \left(\frac{1}{2\pi i} B \right) = \frac{1}{2\pi i} (\alpha A + \beta B),$$

i obtenim que $\alpha A' + \beta B'$ és diagonalitzable.

Sigui δ_j una arrel del polinomi característic de $\alpha A + \beta B$ per cada j , aleshores les arrels del polinomi característic de $\alpha A' + \beta B'$ són de la forma $\delta'_j = \frac{1}{2\pi i} \delta_j$. Com que, per la proposició 3.7, $\delta_j \in 2\pi i\mathbb{Z}$ es té que $\delta'_j \in \mathbb{Z}$ per cada j . A partir d'aquí podem deduir que les arrels del polinomi característic de $\alpha A' + \beta B'$ pertanyen a $\mathbb{Z}$.

Com a conseqüència, si $\beta = 1$ i $\alpha \in \mathbb{N}$, les arrels del polinomi característic de la matriu $\alpha A + B$ estan contingudes en $\mathbb{Z}$. Aleshores, per la proposició 3.4, obtenim que A' i B' compleixen la propietat L , és a dir, les arrels del polinomi característic de la matriu $\alpha A' + \beta B'$, amb un ordre adequat i comptant repeticions de λ'_i i μ'_i , arrels dels polinomis característics de A' i B' , són de la forma $\alpha \lambda'_i + \beta \mu'_i \in \mathbb{Z}$ per tot i . Per tant, $\lambda'_i, \mu'_i \in \mathbb{Z}$,

ja que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Tenint en compte que $\alpha A' + \beta B'$ és diagonalitzable, llavors $B' = 0 \times A' + 1 \times B'$ també ho és, de manera que existeixen μ'_k i μ'_j dues arrels del polinomi característic de B' tals que $\mu'_k \neq \mu'_j$ per $k \neq j$. Llavors podem deduir que els punts excepcionals, obtinguts en igualar els diferents valors de les arrels del polinomi característic del llapis de matrius $A' + zB'$, són nombres racionals, ja que:

$$\lambda'_k + z_0 \mu'_k = \lambda'_j + z_0 \mu'_j \implies z_0 = \frac{\lambda'_j - \lambda'_k}{\mu'_k - \mu'_j} \quad \text{amb} \quad k \neq j.$$

Com que $\lambda'_i, \mu'_i \in \mathbb{Z}$, s'obté que $z_0 \in \mathbb{Q}$. Concloent així, que $A' + z_0 B'$ és diagonalitzable, perquè es pot considerar la matriu $A' + \frac{\beta}{\alpha} B' = \frac{1}{\alpha}(\alpha A' + \beta B')$ i $z_0 = \frac{\beta}{\alpha}$ amb $\alpha \neq 0$.

Utilitzant el teorema 3.3, obtenim que A' i B' són commutatives, resultant així que A i B també són commutatives.

□

Seguidament, enunciem alguns resultats, proporcionats a l'article [11], que seran necessaris per provar la connexió entre matrius exponencials i la propietat L . Concretament, seran útils per poder estudiar el cas en què e^A i e^B tenen una única arrel del polinomi característic. Fet que ens permetrà treballar amb matrius $A' = A - \gamma I$ i $B' = B - \delta I$, les quals tenen les arrels del polinomi característic contingues en $2\pi i\mathbb{Z}$ si e^γ i e^δ són les arrels del polinomi característic de e^A i e^B .

Notació 3.9. Denotem com $K_\lambda(C)$ el subespai característic de la matriu C respecte a $\lambda \in \mathbb{C}$, és a dir, $K_\lambda(C) = \ker((C - \lambda I)^j)$, amb $0 < j \leq n$. A més a més, considerant $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definim:

$$\varphi_k : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_k(\rho, \omega) = \rho^k \omega,$$

on ρ i ω són arrels del polinomi característic de les matrius e^A i e^B , respectivament.

Lema 3.10. Supposem que, per tot λ_1 i λ_2 , arrels diferents del polinomi característic de la matriu A que satisfan que si $\lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ aleshores $\lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Llavors existeix un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que φ_k és injectiva.

Demostració: Demostrem aquest lema per reducció a l'absurd. Supposem que per tot $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existeixen parells d'arrels del polinomi característic de e^A i e^B , (ρ_1, ω_1) i (ρ_2, ω_2) , diferents tals que $\varphi_k(\rho_1, \omega_1) = \rho_1^k \omega_1 = \rho_2^k \omega_2 = \varphi_k(\rho_2, \omega_2)$.

Si considerem $k = a$ i $k = b$ amb $a \neq b$, per parells (ρ_1, ω_1) i (ρ_2, ω_2) diferents de zero s'obté que:

$$\rho_1^a \omega_1 = \rho_2^a \omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^a \quad \text{i} \quad \rho_1^b \omega_1 = \rho_2^b \omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^b.$$

Per tant, $(\frac{\rho_1}{\rho_2})^a = (\frac{\rho_1}{\rho_2})^b$, deduint així que $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ és una arrel unitària. En conseqüència, pel lema 1.2 i com la funció exponencial és expressada per una sèrie de potències convergent, es té que, per λ_1, λ_2 arrels del polinomi característic d' A , $\rho_1 = e^{\lambda_1}$ i $\rho_2 = e^{\lambda_2}$. Obtenint que $(\frac{\rho_1}{\rho_2})^{a-b} = e^{(a-b)(\lambda_1-\lambda_2)} = 1$, és a dir:

$$\lambda_1 - \lambda_2 \in \frac{2\pi i \mathbb{Z}}{a-b} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i \mathbb{Q}.$$

Ara bé, per hipòtesi, això implica que $\lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i \mathbb{Z}$, o sigui, $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\pi i s$ per $s \in \mathbb{Z}$. Per tant, s'arriba a $\rho_1 = e^{\lambda_1} = e^{\lambda_2 + 2\pi i s} = e^{\lambda_2} = \rho_2$. Arran d'això, deduint que $\omega_1 = \omega_2$, cosa que contradiu el fet que els parells (ρ_1, ω_1) i (ρ_2, ω_2) siguin diferents.

□

Proposició 3.11. *Suposem que φ_1 és injectiva i que el parell de matrius (A, B) satisfà que $e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B}$ per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Aleshores els subespais característics de les matrius e^A i e^B són subespais invariants per A i B .*

Durant la demostració d'aquesta proposició utilitzarem la següent notació:

Notació 3.12. *Denotem per $Sp(D)$ a l'espectre de la matriu D , és a dir, al conjunt d'arrels del polinomi característic de la matriu D sense repetició.*

Demostració de la proposició 3.11: Observem primer, que $A + B$ és una matriu commutativa amb e^{A+B} , per tant, per hipòtesi, $A + B$ commuta amb $e^A e^B$. Deduint així que els subespais característics de $e^A e^B$ són invariants per $A + B$ (veure demostració lema A.7).

Donat que les matrius e^A i e^B són commutatives, els subespais característics de e^B són invariants per e^A , ja que $e^B e^A = (e^{-A} e^{-B})^{-1} = e^A e^B$. Això ens diu que podem descompondre $K_\omega(e^B)$ com a suma directa dels seus subespais característics respecte e^A , que són de la forma $K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B)$. Obtenint que per tot $\omega \in Sp(e^B)$ es té:

$$K_\omega(e^B) = \bigoplus_{\rho \in Sp(e^A)} K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B).$$

Per altra banda, per la commutativitat de e^A i e^B , derivem que $K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B)$ és un espai invariant per e^A i e^B . Així mateix, sigui $v \in K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B)$, concretament, $(e^A - \rho I)^j v = 0$ i $(e^B - \omega I)^k v = 0$ per $j, k \leq n$. Observem que:

$$e^A e^B - \rho \omega I = e^A e^B - \rho e^B + \rho e^B - \rho \omega I = (e^A - \rho I) e^B + \rho (e^B - \omega I),$$

aleshores:

$$(e^A e^B - \rho \omega I)^s v = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} ((e^A - \rho I) e^B)^i (\rho (e^B - \omega I))^{s-i} v,$$

prenent $s = \min\{j + k - 1, n\}$. Si $s = n$, per la commutativitat de e^A i e^B , es té que $(e^A e^B - \rho \omega I)^s v = 0$. Ara bé, si $s = j + k - 1$ s'anul·len tots els termes que contenen $i \geq j$ i, de fet, també la resta, ja que si $i < j$ aleshores $s - i \geq k$. És a dir, $v \in K_{\rho\omega}(e^A e^B)$, deduint que $K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B) \subseteq K_{\rho\omega}(e^A e^B)$.

A més a més, que com φ_1 és injectiva, per tots els parells (ρ_1, ω_1) i (ρ_2, ω_2) resulta que $K_{\rho_1\omega_1}(e^A e^B) \cap K_{\rho_2\omega_2}(e^A e^B) = \{0\}$. Concloent així que la suma directa dels subespais $K_{\rho\omega}(e^A e^B)$ cobreix tot $\mathbb{C}^n$ per cada parell (ρ, ω) . De la mateixa manera, també ho fa la suma directa dels subespais de $K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B)$, ja que per definició $K_\omega(e^B)$ cobreix tot $\mathbb{C}^n$. Com a resultat, es té:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\omega \in Sp(e^B)} \bigoplus_{\rho \in Sp(e^A)} K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B) = \bigoplus_{\omega \in Sp(e^B)} \bigoplus_{\rho \in Sp(e^A)} K_{\rho\omega}(e^A e^B)$$

Fet que implica que $K_\rho(e^A) \cap K_\omega(e^B) = K_{\rho\omega}(e^A e^B)$. Demostrant així:

$$K_\omega(e^B) = \bigoplus_{\rho \in Sp(e^A)} K_{\rho\omega}(e^A e^B).$$

Això ens prova que els subespais característics de e^B són invariants per $A + B$, ja que cadascun dels subespais característics de $e^A e^B$ són invariants per $A + B$. A més, per la commutativitat entre e^B i B , els subespais característics de e^B també són invariants per B . En conseqüència, aquests són invariants per A , pel fet que $A = (A + B) - B$ i un subespai és tancat per la resta.

Seguint el mateix raonament s'arriba a què els subespais característics de e^A són invariants per A i B .

□

Juntament amb aquesta proposició i la definició enunciada a continuació:

Definició 3.13. *Diem que el parell de matrius (A, B) és descomponible si existeix una descomposició no trivial $\mathbb{C}^n = F \oplus G$ amb F i G subespais lineals invariants tant per A com per B . En cas contrari, diem que el parell és indescomponible.*

Podem demostrar el següent lema:

Lema 3.14. *Siguin A i B dues matrius indescomponibles tals que $e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B}$ i sigui φ_1 injectiva, aleshores les matrius e^A i e^B tenen una única arrel del polinomi característic.*

Demostració: Demostrem el lema per reducció a l'absurd. Suposem que existeixen ρ_1 i ρ_2 dues arrels del polinomi característic de la matriu e^A . Llavors, per definició:

$$\mathbb{C}^n = K_{\rho_1}(e^A) \oplus K_{\rho_2}(e^A),$$

però, per la proposició 3.11, $K_{\rho_1}(e^A)$ i $K_{\rho_2}(e^A)$ són invariants per A i per B . Això implica que, per definició, A i B són descomponibles, la qual cosa contradueix el fet que A i B són indescomponibles. Per tant, e^A té una única arrel del polinomi característic. Seguint el mateix raonament es pot demostrar que e^B té una única arrel del polinomi característic.

□

Observació 3.15. *La proposició 3.11 i el lema 3.14 també se satisfan si el parell de matrius compleix que $e^{\alpha A + B} = e^{\alpha A} e^B = e^B e^{\alpha A}$ per tot $\alpha \in \mathbb{N}$.*

Finalment, enunciem una proposició, la qual ens permet veure una relació entre les matrius nilpotents, les exponencials i la commutativitat.

Proposició 3.16. *Siguin A i B dues matrius nilpotents tals que $e^A e^B = e^B e^A$, llavors A i B són commutatives.*

Demostració: Donat que A és una matriu nilpotent, existeix un enter positiu m tal que per tot $j \geq m$ es té $A^j = 0$. Aleshores es dedueix que l'exponencial es redueix a un polinomi finit tal que:

$$e^A - I = A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!}.$$

D'on s'obté que $e^A - I$ una matriu nilpotent, ja que és una suma de potències nilpotents. Gràcies a això, la sèrie de potències de la matriu $\log(e^A)$ està ben definida perquè és finita [14]. A més, com que la sèrie de potències de la matriu exponencial i de la matriu logarítmica són inverses l'una de l'altre, pel fet que, en aquest cas, són finites obtenim que $\log(e^A) = A$.

Utilitzant la sèrie de Taylor de la funció $\log(1+x)$, per $j \in \mathbb{N}$, arribem a:

$$A = \log(e^A) = \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^{k+1}}{k} (e^A - I)^k.$$

Per tant, A és un polinomi en e^A i, de la mateixa manera, B és un polinomi en e^B . Per la commutativitat de e^A i e^B qualsevol polinomi en aquestes també commuta, és a dir, A i B són commutatives.

□

3.2. Vincle entre les matrius exponencials i la propietat L

3.2.1. Un cas particular

Estudiem primer un cas particular, proporcionat a [11], per establir la relació entre les matrius exponencials i la propietat L , en el qual les arrels dels polinomis característics de A i B estan contingudes en $2\pi i\mathbb{Z}$. Per a fer-ho, introduïm alguns conceptes necessaris per a la demostració d'aquest cas.

Teorema 3.17. (*Descomposició de Jordan-Chevalley* [13]) *Sigui A una matriu tal que el seu polinomi característic està format per la multiplicació de polinomis mínims de la forma $m_A = p(x)^r$ on $p(x)$ és irreductible i separable amb $r \in \mathbb{N}$. Aleshores existeix una descomposició única $A = D + N$ on D és diagonalitzable, N és nilpotent, el parell (D, N) és commutatiu i les arrels del polinomi característic de la matriu A són les mateixes que les de la matriu D .*

A partir d'aquí podem enunciar i provar la següent proposició:

Proposició 3.18. *Siguin A i B dues matrius tals que, per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B}$ amb les arrels del polinomi característic de A i B contingudes en $2\pi i\mathbb{Z}$. Aleshores A i B són dues matrius commutatives i tenen la propietat L .*

Demostració: En aquesta demostració provarem que A i B són commutatives i utilitzant el teorema 2.9 demostrem que tenen la propietat L .

Seguint l'article [11], com que $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, podem aplicar el teorema 3.17 i dur a terme aquesta prova a partir de la descomposició de Jordan-Chevalley. Així doncs, considerem les matrius $A = D_A + N_A$ i $B = D_B + N_B$. Fet que ens permet analitzar l'espectre de les matrius αD_A i βD_B , per $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, obtenint que les arrels del polinomi característic d'aquestes matrius estan contingudes en $2\pi i\mathbb{Z}$.

Tenint això en compte, i donat que els parells de matrius (D_A, N_A) i (D_B, N_B) són commutatius, s'obté:

$$e^{\alpha A} = e^{\alpha D_A + \alpha N_A} = e^{\alpha D_A} e^{\alpha N_A} = e^{\alpha N_A} \quad ; \quad e^{\beta B} = e^{\beta D_B + \beta N_B} = e^{\beta D_B} e^{\beta N_B} = e^{\beta N_B}.$$

Aleshores, per hipòtesi:

$$e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha N_A} e^{\beta N_B}.$$

A més a més, $e^{\alpha N_A} e^{\beta N_B} = e^{\beta N_B} e^{\alpha N_A}$ i, en particular, e^{N_A} i e^{N_B} commuten. Això és gràcies a la commutativitat de $e^{\alpha A}$ i $e^{\beta B}$:

$$e^{\beta B} e^{\alpha A} = ((e^{\beta B} e^{\alpha A})^{-1})^{-1} = (e^{-\alpha A} e^{-\beta B})^{-1} = (e^{-(\alpha A + \beta B)})^{-1} = e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B},$$

deduint que $e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\beta B} e^{\alpha A}$.

Donat que N_A i N_B són matrius nilpotents, per la proposició 3.16, aquestes són commutatives. Obtenim així que $e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha N_A} e^{\beta N_B} = e^{\alpha N_A + \beta N_B}$.

A més, com que $N_A N_B = N_B N_A$ si apliquem el binomi de Newton sobre la matriu $(\alpha N_A + \beta N_B)^s$ per $s = m + k$, on $N_A^m = 0$ i $N_B^k = 0$ amb $m, k \in \mathbb{N}$, s'obté $(\alpha N_A + \beta N_B)^s = 0$, és a dir, $\alpha N_A + \beta N_B$ és una matriu nilpotent i, tal com s'ha demostrat en la proposició 3.16, aquesta és un polinomi en $e^{\alpha N_A + \beta N_B} = e^{\alpha A + \beta B}$. Com a conseqüència, les matrius $\alpha N_A + \beta N_B$ i $\alpha A + \beta B$ són commutatives.

Per la descomposició de Jordan-Chevalley i per la proposició 3.7, deduïm que $\alpha D_A + \beta D_B$ és diagonalitzable i que les seves arrels del polinomi característic pertanyen a $2\pi i\mathbb{Z}$, ja que:

$$e^{\alpha D_A + \beta D_B} = e^{\alpha A + \beta B - \alpha N_A - \beta N_B} = e^{\alpha A + \beta B} e^{-(\alpha N_A + \beta N_B)} = I.$$

Així doncs, pel lema 3.8, les matrius D_A i D_B són commutatives. El que ens indica que, si considerem $\alpha = 1$ i $\beta = a$ o $\beta = b$ amb $a \neq b$, les matrius $D_A + aD_B$ i $D_A + bD_B$ també ho són i, per tant, són simultàniament diagonalitzables.

Per la commutativitat entre $N_A + aN_B$ i $A + aB$, es té que $N_A + aN_B$ i $D_A + aD_B$ commuten. El mateix raonament podem aplicar-lo sobre $N_A + bN_B$ i $D_A + bD_B$. Així

com, donat que N_A i N_B són commutatives, també ho són les matrius $N_A + aN_B$ i $N_A + bN_B$. Llavors $(A + aB)(A + bB) = (A + bB)(A + aB)$, però:

$$\begin{cases} (A + aB)(A + bB) = A^2 + bAB + aBA + abB^2 \\ (A + bB)(A + aB) = A^2 + aAB + bBA + abB^2 \end{cases}$$

amb $a \neq b$, per tant, $AB = BA$. En conseqüència, pel teorema 2.9, el parell de matrius (A, B) satisfà la propietat L .

□

3.2.2. La connexió principal

El principal vincle que s'estableix entre la propietat L i les matrius exponencials està en el següent teorema:

Teorema 3.19. *Siguin A i B dues matrius. Si per tot $\alpha \in \mathbb{N}$ es compleix:*

$$e^{\alpha A + B} = e^{\alpha A} e^B = e^B e^{\alpha A}, \quad (5)$$

aleshores A i B tenen la propietat L . A més, si per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ se satisfà:

$$e^{\alpha A + \beta B} = e^{\alpha A} e^{\beta B}, \quad (6)$$

llavors el parell (A, B) és commutatiu.

Per efectuar la demostració d'aquest teorema són necessaris els següents dos resultats:

Lema 3.20. *Sigui k un enter positiu, es verifiquen les següents afirmacions:*

- i) El parell de matrius (A, B) és commutatiu i té la propietat L si i només si el parell (kA, B) és commutatiu i té la propietat L .*
- ii) El parell de matrius (A, B) satisfà les equacions (5) i (6) si i només si el parell (kA, B) també les satisfà.*

Lema 3.21. *Sigui A una matriu i definim el conjunt:*

$$F = \mathbb{Q} \cap \frac{1}{2\pi i} \{ \lambda_1 - \lambda_2 \mid \lambda_1 \text{ i } \lambda_2 \text{ són arrels diferents del polinomi característic d'A} \}.$$

Aleshores existeix un enter positiu q tal que $qF \subset \mathbb{Z}$ i les arrels del polinomi característic de la matriu qA , λ'_1 i λ'_2 , satisfan:

$$\lambda'_1 - \lambda'_2 \in 2\pi i\mathbb{Q} \implies \lambda'_1 - \lambda'_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Demostració: Observem primer que l'enter q existeix pel fet que hi ha un nombre finit d'arrels del polinomi característic d' A , és a dir, el conjunt F és un conjunt finit tal que $F \subset \mathbb{Q}$. Així doncs, considerem q com el mínim comú múltiple dels denominadors dels elements de F , obtenint que $qF \subset \mathbb{Z}$.

Sigui r un nombre racional, $r \in F$ si $2i\pi r = \lambda_1 - \lambda_2$. Les arrels del polinomi característic de qA són de la forma $\lambda'_1 = q\lambda_1$, aleshores $\lambda'_1 - \lambda'_2 = q(\lambda_1 - \lambda_2)$. A més, se satisfà que si $\lambda'_1 - \lambda'_2 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ s'obté que $\lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Q}$, és a dir, $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\pi ip$ amb $p \in \mathbb{Q}$. Per definició $p \in F$ i $qF \subset \mathbb{Z}$ pel que $qp \in \mathbb{Z}$ i, per tant, $\lambda'_1 - \lambda'_2 = q(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\pi iqp \in 2\pi i\mathbb{Z}$. $\square$

Tenint això en compte demostrem el teorema 3.19. Per a fer-ho l'article original [11] separa la demostració en dos casos diferents. Primer tracta el cas quan les matrius són descomponibles, per així poder reduir el teorema a matrius de dimensió menor a n utilitzant inducció. Seguidament, tracta el cas de les matrius indescomponibles, el qual és més complex i per demostrar-ho es busquen matrius que segueixin les mateixes hipòtesis, però limitant les formes de les arrels dels polinomis característics per tal d'arribar a les propietats desitjades.

Demostració teorema 3.19: Separem la demostració en dues situacions diferents:

- El parell de matrius (A, B) és descomponible.

Per justificar aquests resultats utilitzarem inducció sobre l'ordre de les matrius n .

Pel cas $n = 1$, considerem les matrius $A = (a)$ i $B = (b)$. En aquest cas $AB = BA$ i en conseqüència, pel teorema 2.9, les matrius A i B tenen la propietat L , verificant el teorema 3.19.

Suposem cert el teorema per matrius fins a ordre $n - 1$. A més, suposem que existeixen dues matrius d'ordre n que satisfan les equacions (5) i (6). Donat que el parell d' A i B és descomponible, aquestes comparteixen subespais invariants no trivials. Per tant,

definim P una matriu invertible d'ordre n tal que:

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{i} \quad B = P \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

on A_1, B_1 són matrius d'ordre $k \in \{1, \dots, n-1\}$ i A_2, B_2 matrius d'ordre $n-k$. Com que A i B satisfan l'equació (6):

$$\alpha A + \beta B = P \begin{pmatrix} \alpha A_1 + \beta B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha A_2 + \beta B_2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow e^{\alpha A + \beta B} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha A_1 + \beta B_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\alpha A_2 + \beta B_2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

i

$$e^{\alpha A} e^{\beta B} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha A_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\alpha A_2} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} e^{\beta B_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\beta B_2} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha A_1} e^{\beta B_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\alpha A_2} e^{\beta B_2} \end{pmatrix} P^{-1},$$

deduint que els parells de matrius (A_1, B_1) i (A_2, B_2) també compleixen l'equació (6), i de forma anàloga obtenim que satisfan l'equació (5).

Per hipòtesi d'inducció, els parells (A_1, B_1) i (A_2, B_2) són commutatius i tenen la propietat L . Per tant, concloem que el parell (A, B) també és commutatiu i satisfà la propietat L , demostrant així el teorema 3.19 per aquest cas.

- El parell de matrius (A, B) és indescomponible.

En aquest context, pel lema 3.20, sense pèrdua de generalitat, es pot substituir A per qA . D'aquesta manera, podem deduir pel lema 3.21 que aquesta nova A , considerant l'enter q definit en aquest lema, compleix que si λ_1, λ_2 són arrels del polinomi característic d' A aquestes satisfan que $\lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ implica $\lambda_1 - \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Això ens permet aplicar el lema 3.10 i si, pel lema 3.20, redefinim la nova A per kA , podem suposar que φ_1 és injectiva. Fet que és possible gràcies a considerar que si ρ' és una arrel del polinomi característic de e^A llavors $(\rho')^k = \rho$ és una arrel del polinomi característic de e^{kA} , perquè $e^{kA} = (e^A)^k$.

Pel lema 3.14, les matrius e^A i e^B tenen una única arrel dels seus polinomis característics. Concretament, existeixen $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tal que e^γ i e^δ són les arrels dels polinomis característics de e^A i e^B , respectivament. Si definim les matrius $A' = A - \gamma I$ i $B' = B - \delta I$, aquestes tenen les arrels del polinomi característic contingudes en $2\pi i\mathbb{Z}$, ja que $e^{A'} = e^{A-\gamma I} = e^A e^{-\gamma I} = e^{-\gamma} e^A$, és a dir, les arrels del polinomi característic de

$e^{A'}$ són $e^{-\gamma}e^{\gamma} = 1$ i, se segueix el mateix raonament per B' .

Observem que si el parell de matrius (A, B) satisfà les equacions (5) i (6), llavors:

$$e^{\alpha A' + \beta B'} = e^{\alpha(A - \gamma I) + \beta(B - \delta I)} = e^{\alpha A + \beta B - (\alpha\gamma + \beta\delta)I} = e^{\alpha A} e^{-\alpha\gamma I} e^{\beta B} e^{-\beta\delta I} = e^{\alpha(A - \gamma I)} e^{\beta(B - \delta I)}$$

gràcies a la hipòtesi i a la commutativitat de $\alpha A + \beta B$ amb $(\alpha\gamma + \beta\delta)I$. Resultant així, que el parell (A', B') també compleix l'equació (6) i, de forma anàloga, s'obté que compleix l'equació (5).

Per una banda, les matrius (A', B') satisfan l'equació (5), gràcies a això podem afirmar que $e^{A'}$ i $e^{B'}$ són commutatives i, pel teorema 2.9, tenen la propietat P . Com a conseqüència, donat que $e^{\alpha A' + \beta B'} = e^{\alpha A'} e^{\beta B'} = (e^{A'})^{\alpha} e^{B'}$ es té que les arrels del polinomi característic de $\alpha A' + \beta B'$ estan contingudes a $2\pi i\mathbb{Z}$.

Per tant, per la proposició 3.4, podem afirmar que el parell de matrius $(\frac{1}{2\pi i}A', \frac{1}{2\pi i}B')$ respecte la propietat L . Això implica que el parell (A', B') compleix també aquesta propietat i, com a resultat, el parell (A, B) també la satisfan. Fet que és a causa de considerar:

$$A + zB = (A' + \gamma I) + z(B' + \delta I) = A' + zB' + (\gamma + z\delta)I$$

i, donat que $A' + zB'$ commuta amb $(\gamma + z\delta)I$, obtenim $Sp(A + zB) = Sp(A' + zB') + (\gamma + z\delta)$. Ara bé, com que A' i B' tenen la propietat L , les arrels del polinomi característic de $A' + zB'$ són funcions afins de z , deduint així que les arrels del polinomi característic de $A + zB$ també ho són. Demostrant la primera part del teorema.

Per altra banda, com que (A', B') satisfan l'equació (6), per la proposició 3.18, determinem que el parell (A', B') és commutatiu i, en conseqüència, el parell (A, B) també és commutatiu, és a dir:

$$\begin{cases} A'B' = (A - \gamma I)(B - \delta I) = AB - \delta A - \gamma B + \gamma\delta I \\ B'A' = (B - \delta I)(A - \gamma I) = BA - \delta A - \gamma B + \gamma\delta I \end{cases} \implies AB = BA.$$

Demostrant la segona part del teorema.

□

Bibliografia

- [1] Ferdinand Frobenius. “Über vertauschbare Matrizen”. A: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1896), pàg. 601 - 614.
- [2] Emmy Noether. “Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie”. A: *Mathematische Zeitschrift* 30.1 (1929), pàg. 641 - 692.
- [3] Neal H. McCoy. “On Quasi-Commutative Matrices”. A: *Transactions of the American Mathematical Society* 36.2 (1934), pàg. 108 - 114.
- [4] Nathan Jacobson. “Rational Methods in the Theory of Lie Algebras”. A: *Annals of Mathematics* 36.4 (1935), pàg. 875 - 881.
- [5] Neal H. McCoy. “On the Characteristic Roots of Matric Polynomials”. A: *Bulletin of the American Mathematical Society* 42 (1936), pàg. 592 - 600.
- [6] T. S. Motzkin i Olga Taussky. “Pairs of Matrices with Property L”. A: *Transactions of the American Mathematical Society* 73.1 (1952), pàg. 108 - 114.
- [7] T. S. Motzkin i Olga Taussky. “Pairs of Matrices with Property L. II”. A: *Transactions of the American Mathematical Society* 80.2 (1955), pàg. 387 - 401.
- [8] Olga Taussky. “How I Became a Torchbearer for Matrix Theory”. A: *The American Mathematical Monthly* 95.9 (1988), pàg. 801 - 812.
- [9] V. V. Prasolov. *Problems and theorems in linear algebra*. Vol. 134. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Russian manuscript by D. A. Leites. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [10] Roger A. Horn i Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2nd. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [11] Clément de Seguins Pazzis. “On Commuting Matrices and Exponentials”. A: *Proceedings of the American Mathematical Society* 141.3 (2013), pàg. 763 - 774.
- [12] A. Eremenko. *Spectral Theorems for Hermitian and Unitary Matrices*. Technical Report. Purdue University, 2017.
- [13] David Mingueza, M. Eulàlia Montoro i Alicia Roca. “The Lattice of Characteristic Subspaces of an Endomorphism with Jordan-Chevalley Decomposition”. A: *Linear Algebra and its Applications* 558 (2018), pàg. 63 - 73.

- [14] Howard E. Haber. “Notes on the Matrix Exponential and Logarithm”. Santa Cruz Institute for Particle Physics, University of California, Santa Cruz, CA, USA. Manuscript. Nov. de 2023.

Apèndix

A. Definicions bàsiques

Enunciem alguns dels coneixements que cal tenir en compte durant el treball. Comencem donant una definició més detallada de polinomi característic i d'arrels del polinomi característic juntament amb altres definicions elementals.

Definició A.1. *Sigui A una matriu quadrada, el polinomi característic d' A és el polinomi definit per $p_A(x) = |xI - A|$, mentre que les arrels del polinomi característic són els valors de x que satisfan l'equació $p_A(x) = 0$.*

Definició A.2. *Una matriu és invertible si i només el seu determinant és diferent de zero.*

Lema A.3. *Sigui P una matriu invertible qualsevol, aleshores les arrels del polinomi característic d' A i de $\hat{A} = P^{-1}AP$ són les mateixes.*

Demostració: Volem provar que $|xI - A| = |xI - P^{-1}AP|$, però observem que $|xI - P^{-1}AP| = |xP^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xI - A)P| = |P^{-1}||xI - A||P| = |xI - A|$, ja que $|P^{-1}||P| = 1$.

□

Una altra definició que hem de tenir en compte durant el treball és la definició de subespai invariant:

Definició A.4. *Sigui V un espai vectorial sobre K i $f : V \rightarrow V$ una transformació lineal. Un subespai $W \subseteq V$ és invariant si per tot $w \in W$ es compleix $f(w) \in W$.*

A partir d'aquí enunciem una definició elemental juntament amb uns resultats bàsics que ens acompanyen durant tot el treball:

Definició A.5. *Una matriu en forma de Jordan és una matriu quadrada formada per la suma directa de blocs de Jordan, on un bloc de Jordan és una matriu de la forma:*

$$J_{m_i, \lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_r(K)$$

i, per tant, les matrius de Jordan són de la forma:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{m_1, \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_r, \lambda_r} \end{pmatrix}.$$

On $\lambda_i \in K$ per $i = 1, \dots, r$ són les arrels del polinomi característic d'una matriu A , m_r la multiplicitat d'aquestes i on cada J_{m_i, λ_i} és un bloc de Jordan associat a l'arrel λ_i . A més a més, existeix una matriu invertible P tal que $J_A = P^{-1}AP$.

Lema A.6. Si J_A una matriu de Jordan, aleshores $J_A^k = P^{-1}A^kP$.

Demostració: Demostrarem aquesta proposició mitjançant inducció.

Comencem provant pel cas $k = 2$. Tenim que $J_A^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$. Suposem que $J_A^k = P^{-1}A^kP$ és cert i demostrem el cas $k + 1$. Així doncs, $J_A^{k+1} = (P^{-1}A^kP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kPP^{-1}AP = P^{-1}A^{k+1}P$. D'aquesta manera, per inducció es verifica que $J_A^k = P^{-1}A^kP$.

□

Lema A.7. ([10], teorema 2.3.3) Si A i B són dues matrius commutatives aleshores A i B són simultàniament triangularitzables.

Demostració: Per a la demostració provarem que existeix una base comuna de vectors associats a cadascuna de les arrels dels polinomis característics respectius. Sigui λ una arrel del polinomi característic d' A , és a dir, existeix un vector v no nul tal que $(\lambda I - A)v = \mathbf{0}$, aleshores $\ker(\lambda I - A) = \{v \in K \mid (\lambda I - A)v = \mathbf{0}\}$ és un subespai invariant per A . Però com que A i B són commutatives, es verifica que $\ker(\lambda I - A)$ també és invariant per B a causa del fet que si $v \in \ker(\lambda I - A)$, llavors $Bv \in \ker(\lambda I - A)$, ja que $(\lambda I - A)Bv = B(\lambda I - A)v = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Com que K és un cos algebraicament tancat, B admet una arrel del polinomi característic μ sobre aquest subespai. En altres paraules, existeix un vector no nul $u \in \ker(\lambda I - A)$ tal que $(\mu I - B)u = \mathbf{0}$. Per tant, u és un vector associat a una arrel del polinomi característic d' A i de B simultàniament.

Pel cas d'arrels del polinomi característic amb multiplicitat major que 1 la demostració és anàloga amb les corresponents elevacions en els subespais generalitzats.

Tot seguit considerem $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ una base de l'espai. En aquesta base les matrius A i B són de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & C_A \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu & C_B \\ \mathbf{0} & B_1 \end{pmatrix}$$

amb $A_1 B_1 = B_1 A_1$, consegüentment podem aplicar de manera recursiva el mateix raonament sobre A_1 i B_1 fins a obtenir una base de tot l'espai on A i B són triangulars superiors.

□

A més a més, durant el treball s'han tractat el concepte de mòduls sobre una àlgebra. Per entendre-ho millor donem les corresponents definicions.

Definició A.8. *Un espai vectorial sobre un cos K és una estructura algebraica formada per un conjunt de vectors E amb dues operacions: la suma i el producte per escalars, on per tot $u, v \in E$ i $\lambda \in K$ es té que $u + v \in E$ i $\lambda u \in E$.*

Definició A.9. *Una àlgebra $\mathcal{P}$ sobre un cos K és un espai vectorial sobre K dotat d'un producte entre els seus elements que compleix que per tot $a, b, c \in \mathcal{P}$ i $\lambda \in K$: $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$ i $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.*

Definició A.10. *Un mòdul M sobre una àlgebra $\mathcal{P}$ és un espai vectorial dotat d'un producte, és a dir, $\psi : \mathcal{P} \times M \rightarrow M$ amb $\psi(a, x) = ax$ tal que $a(x + y) = ax + ay$, $(a + b)x = ax + bx$ i $(ab)x = a(bx)$, per a $a, b \in \mathcal{P}$ i $x, y \in M$.*

Definició A.11. *Un submòdul N del mòdul M és un subespai vectorial del mòdul M tancat per la suma i el producte.*

B. Matrius exponencials

En l'últim capítol del treball s'ha estudiat el vincle entre les matrius exponencials i la propietat L . Per tant, donem informació fonamental de les matrius exponencials i la relació amb la commutativitat.

Recordem que si treballem sobre $\mathbb{C}$, la sèrie de potències de l'expressió e^z per $z \in \mathbb{C}$ és:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Aquesta sèrie de potències es pot redefinir per matrius, establint així l'exponencial d'una matriu A , amb entrades a $\mathbb{C}$, com:

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Tenint en compte, que per tal de parlar de l'exponencial d'una matriu, e^A , és necessari que la matriu A sigui quadrada.

Teorema B.1. *La sèrie de potències de la matriu e^A , on A és una matriu quadrada, és convergent.*

Demostració: Per a la demostració utilitzarem la condició de Cauchy, la qual estableix que una sèrie $\sum A_n$ és convergent si i només si per tot $\epsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per $n_0 \leq N \leq M$ es té:

$$\left\| \sum_{n=N}^M A_n \right\| < \epsilon,$$

on $\|\cdot\|$ és una norma d'una matriu. Aplicant això sobre la sèrie e^A obtenim:

$$\left\| \sum_{n=N}^M \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N}^M \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N}^M \frac{\|A\|^n}{n!}.$$

Com que la norma d'una matriu és un nombre real, aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$ convergeix. Fet que es demostra utilitzant el criteri del quocient, el qual diu que si tenim $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió i suposem que el límit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existeix, aleshores $\sum a_n$ és convergent per $l < 1$. Implementant aquest el criteri per al nostre cas per $e^{\|A\|}$:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|A\|^{n+1}/(n+1)!}{\|A\|^n/n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|A\|}{n+1} = 0 < 1$$

Per tant, aplicant el criteri de Cauchy s'obté $\sum_{n=N}^M \frac{\|A\|^n}{n!} < \epsilon$ assolint que:

$$\left\| \sum_{n=N}^M \frac{A^n}{n!} \right\| < \epsilon.$$

Demostrant que la sèrie de potències de e^A és convergent.

□

Tenint això en compte enunciem el següent teorema:

Teorema B.2. *Siguin A i B dues matrius quadrades commutatives aleshores:*

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

Demostració: La primera igualtat s'obté de forma immediata gràcies a la commuta-

tivitat de les matrius A i B , ja que:

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B^l}{l!} \right) = \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B^l}{l!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) = e^B e^A.$$

Per altra banda, per la segona igualtat si considerem que $n = k + l$ i en un següent pas multipliquem i dividim per $n!$, obtenim:

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B^l}{l!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}.$$

Recordem que si A i B commuten, es pot aplicar el binomi de newton per $(A + B)^n$, arribant a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = e^{A+B}.$$

Deduïm així que $e^A e^B = e^{A+B}$.

□

És important destacar que el recíproc d'aquest teorema no és necessàriament cert, fet que es pot comprovar amb el següent contraexemple, obtingut de la referència [14]:

Exemple B.3. *Considerem les matrius:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi i \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2\pi i \end{pmatrix}.$$

Calculem la matriu exponencial d' A :

$$e^A = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per tant, $e^A = I$.

Per calcular la matriu exponencial de B utilitzem que per una matriu invertible P es té que $B = P J_B P^{-1}$, on J_B és una matriu de Jordan de B . Tenint en compte que les arrels del polinomi característic són 0 i $1\pi i$, s'obté:

$$e^B = P e^{J_B} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

És a dir, $e^B = I$.

Seguint aquest mateix procés, donat que les arrels del polinomi característic de la matriu $A + B$ són 0 i $4\pi i$, aleshores $e^{A+B} = I$.

Deduint així que $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$, però A i B no són commutatives perquè:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4\pi i \end{pmatrix} \quad i \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4\pi \end{pmatrix}.$$